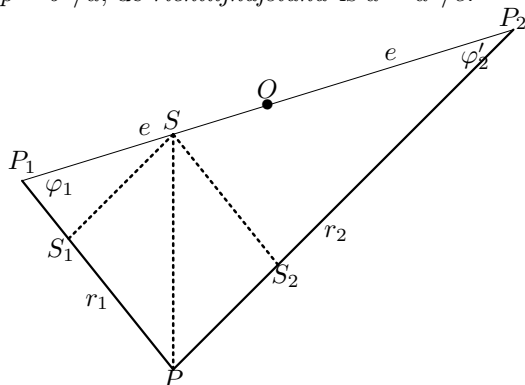


## De spanning bij een tussen twee punten belast koord

In NVOX, "Tijdschrift voor natuurwetenschap op school", verenigingsblad van de NVON, stond in 28e jaargang nummer 2, februari 2003, het artikel "Survival of the Smartest, of hoe spannend kan natuurkunde worden", van Rob Ouwerkerk, stedelijk gymnasium Haarlem. Daarin wordt de spanning geanalyseerd die ontstaat in een koord, dat aan de uiteinden is opgehangen en gespannen wordt door een puntlast ergens daartussen. In het bijzonder wordt het probleem van de grootte en positie van de maximale spanning opgelost voor het geval de ophangpunten even hoog zitten. We analyseren het probleem opnieuw, maar dan voor ongelijke hoogte van de ophangpunten.

### Beschrijving van de situatie

We stellen ons voor dat een (massaloos, dikte-loos,...) koord is opgehangen, enerzijds in punt  $P_1$ , anderzijds in punt  $P_2$ . Zonder verlies van algemeenheid nemen we  $P_2$  rechts van en hoger dan  $P_1$ . De last is zodanig bevestigd dat de koorddelen worden strak getrokken naar een punt  $P$ . Bij een constante lengte van het koord vormen de punten  $P$  een ellips met de punten  $P_1$  en  $P_2$  als brandpunten. De *brandpuntsafstand* is  $2e = P_1P_2$ , de 'lange' as is  $2a = P_1PP_2 = r_1 + r_2$ , de lengte van het koord. De *excentriciteit* is  $\epsilon = e/a$ . De 'korte' as  $2b$  is bepaald door  $b^2 = a^2 - e^2$ . De *kegelsnedeparameter* is  $p = b^2/a$ , de *richtlijnafstand* is  $d = a^2/e$ .



model van de posities en de spanningen

We kiezen de coördinaatas langs  $P_1P_2$ , met de oorsprong halverwege. Merk op, dat de situatie van de ophangpunten ten op zichte van het doorhangpunt 'symmetrisch' is, tenminste als we de tweede hoek als  $\varphi'_2 = \pi - \varphi_2$  zien. De hoeken

worden rechtsonder gemeten van de richting  $OP_2$  af. Dat betekent ook dat we in gedachten de last van onder  $P_2$  'verschuiven' naar onder  $P_1$ , in de richting van toenemende hoeken.

### Spanningen in koord

Tengevolge van de (punt)last  $S$  in het ophangpunt  $P$  van het koord ontstaan spanningen in het koord, en wel in het deel naar het ophangpunt  $P_1$  de spanning  $S_1$  en in het deel naar het ophangpunt  $P_2$  de spanning  $S_2$ . Die spanningen moeten in punt  $P$  de last opheffen: het parallelogram van de spanningen heeft het tegengestelde van de last als diagonaal (zie de gestippelde deelfiguur). De grootte van de spanningen wordt ondermeer bepaald door de hoek die de horizon maakt met de grote as van de ellips ( $P_1P_2$ ); die hoek noemen we  $\varphi_0$ . We vinden deze bijvoorbeeld door de sinusregel toe te passen op de driehoek  $SPS_1$  met zijden  $S_1$ ,  $S_2$  en  $S$  en hoeken  $\varphi_2 - \varphi_0 - \pi/2$ ,  $\pi/2 - (\varphi_1 - \varphi_0)$  en  $\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$ :

$$\frac{S_1}{S} = \frac{-\cos(\varphi_2 - \varphi_0)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

We zien dat de spanning is uitgedrukt in een quotiënt, waarvan de noemer bepaald wordt door de hoek tussen de twee koordeinden  $\varphi_2 - \varphi_1$ . De teller wordt bepaald door de cosinus van hoek die het andere koordeind maakt met de horizontale richting: als een koordeel een kleine hoek met de horizontaal maakt leidt dat tot een grote spanning in het andere koordeel.

### Welk ophangpunt voelt de meeste spanning

Kiezen we het lastpunt  $P$  vertikaal onder een ophangpunt, zeg  $P_2$ , dan is  $S_2 = S$  en  $P_2$  draagt alles. Zodra het lastpunt echter van het ophangpunt af beweegt zal een deel van de last worden overgenomen door het andere ophangpunt. Op welk punt (of punten) verwisselen  $S_2$  en  $S_1$  van 'rol'?

De voorwaarde  $S_2 > S_1$  komt overeen met de voorwaarde (zie de spanningsdriehoek)

$$\varphi_2 - \varphi_0 - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi - (\varphi_1 - \varphi_0)$$

welke vereenvoudigt tot de voorwaarde

$$\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) < \frac{1}{2}\pi + \varphi_0 \quad (1)$$

Het linkerlid stelt de deellijn voor van de hoek tussen de twee koorddelen, het rechterlid de verticale richting. Het is een wel bekende eigenschap van de ellips dat de deellijn van hoek  $P_1PP_2$  naar de brandpunten gelijk is aan de normaal op de raaklijn in  $P$  aan de ellips. Het gezochte evenwichtspunt heeft dus een horizontale raaklijn aan de ellips. Daaruit volgt:

De spanning  $S_2$  is groter dan  $S_1$  als  $P$  ligt tussen  $P_2$  en het laagste punt van de ellips.

## Spanning boven de last(1)

De spanning  $S_2$  (of  $S_1$ ) zal alleen groter kunnen worden dan de last  $S$  als het koord 'voldoende is gespannen', waardoor de koordeinden vrijwel in elkaars verlengde komen te liggen. In dat geval mogen we aannemen dat het koorddeel naar het laagste ophangpunt (in onze figuur  $P_1$ ) de kleinste hoek zal krijgen met de horizontaal, en dus de spanning maximaal zal worden in het andere deel ( $S_2$ ).

De voorwaarde  $S_2 > S$  komt overeen met de voorwaarde (zie spanningsdriehoek)

$$\frac{1}{2}\pi - (\varphi_1 - \varphi_0) > \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$$

welke vereenvoudigt tot de voorwaarde

$$\varphi_2 - \varphi_0 - \frac{1}{2}\pi > 2(\varphi_1 - \varphi_0) \quad (2)$$

Het linkerlid stelt de hoek voor die het koorddeel naar  $P_2$  maakt met de vertikaal, het rechterlid het dubbele van de hoek die het koorddeel naar  $P_1$  maakt met de horizontaal. Daaruit volgt:

De spanning  $S_2$  is groter dan de last  $S$  als de hoek die  $PP_2$  met de vertikaal maakt minstens 2 maal de hoek is die  $PP_1$  met de horizontaal maakt.

Als we onder  $P_2$  beginnen, dan is de hoek met de vertikaal 0, en aan de ongelijkheid voldaan

als  $\varphi_1 < \varphi_0$ : het koord loopt vanaf  $P_1$  omhoog. Voor de lengte geldt dan  $2a < (\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0)2e$ , wat kan worden herleid tot:

$$\epsilon^{-1} < \sqrt{2} \sin(\varphi_0 + \frac{1}{4}\pi)$$

Dit is wel een voldoende voorwaarde om  $S_2$  boven  $S$  te laten groeien, maar niet een noodzakelijke, omdat alleen aan de rand is gekeken. Zo krijgen we bijvoorbeeld bij even hoge ophangpunten de oneindig strakke voorwaarde  $\epsilon = 1$ .

Is het koord niet zo strak, dan zal weggaande van de rand eerst  $S_2$  onder  $S$  zakken, maar kan  $S_2$  even verder alsnog boven de last stijgen en voldoen aan de hoekvoorwaarde. Dat vergt een nadere analyse van de spanning als functie van de positie.

## Positie, hoek en spanning

Het is duidelijk dat bij gegeven koordlengten  $r_1$  of  $r_2$  de positie van het lastpunt  $P$  bepaald is, zowel als de hoeken waaronder koorddelen staan. Zoals altijd heeft het voordeel om symmetrische en dimensieloze variabelen te gebruiken. We kiezen als *positieparameter*  $t$ , de afstand van het lastpunt tot het midden van het koord, gemeten in eenheden  $e$ :  $t = (r_1 - a)/e = (a - r_2)/e$ . Het blijkt overigens dat  $t = x/a$ , met  $x$  de coördinaat van het lastpunt langs de lange as van de ellips. De cosinus van de hoeken van de koorddelen worden als volgt in  $t$  uitgedrukt (zie bijlage Posities en hoeken):

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\epsilon + t}{1 + \epsilon t} \\ \cos \varphi_2 &= -\frac{\epsilon - t}{1 - \epsilon t} \end{aligned}$$

De positieparameter  $t$  kan variëren tussen de posities waar het lastpunt vertikaal onder een ophangpunt is. Vertikaal onder  $P_1$ :  $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi + \varphi_0$ , en vertikaal onder  $P_2$ :  $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi + \varphi_0$ . De minimale en maximale  $t$ -waarden liggen daarom in de buurt van  $\pm\epsilon$ :

$$\begin{aligned} t_{\min} = t_1 &= -\frac{\epsilon + \sin \varphi_0}{1 + \epsilon \sin \varphi_0} \geq -1 \\ t_{\max} = t_2 &= +\frac{\epsilon - \sin \varphi_0}{1 - \epsilon \sin \varphi_0} \leq 1 \end{aligned}$$

Ook de vergelijkingen voor de sinus van de hoeken en de spanningen kunnen we uitdrukken in de positieparameter  $t$ . Daarbij bezien we de

spanningen  $S_2$  en  $S_1$  ten op zichte van de last  $S$ . Na wat omwerkingen (zie bijlage Spanningen) en gebruikmakend van de relatieve *kegelsnedeparameter*  $\lambda = p/e = 1/\epsilon - \epsilon$ . vinden we:

$$\frac{S_2}{S} = \frac{(\epsilon^{-1} - t)(\epsilon + t)}{2\sqrt{\epsilon\lambda}\sqrt{1-t^2}} \cos \varphi_0 + (\epsilon^{-1} - t) \frac{\sin \varphi_0}{2}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{S} = \sqrt{\lambda/\epsilon} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cos \varphi_0 + \epsilon^{-1} \sin \varphi_0$$

## Spanning boven de last(2)

We hervatten de analyse naar de voorwaarde: "de maximum spanning komt juist boven de last  $S$ ". We 'beperken' ons daarbij tot de situatie met  $S_2 > S_1$  en  $S_2 > S$ . Daartoe moet de waarde van  $\epsilon$  voldoende hoog zijn (koord voldoende strak getrokken).

Als de last recht onder  $P_2$  hangt is natuurlijk  $S_2 = S$ , dus voor  $t = t_2$  is  $S_2/S = 1$ . Als de maximale spanning boven de last is, dan zal  $S_2/S = 1$  als functie van  $t$  behalve een oplossing  $t = t_2$  nog één of twee oplossingen hebben voor kleinere  $t$ . Het maximum ligt dan tussen die oplossingen in. Wanneer twee oplossingen samenvallen moet dat tegelijkertijd het maximum zijn: de vergelijking  $S_2/S = 1$  heeft dan een dubbele oplossing.

De vergelijking  $S_2/S = 1$  kan worden geschreven als een vierdegraads veelterm in  $t$ , met parameters  $\epsilon$  en  $\varphi_0$  en de bekende oplossing  $t = t_2$ . Door uitdelen van de bekende oplossing wordt de veelterm omgezet in een derdegraads veelterm in  $t$  (zie bijlage Lastspanning):

$$0 = \epsilon^2(1 + \epsilon \sin \varphi_0)t^3 +$$

$$- \epsilon(2 - 3\epsilon^2 - \epsilon \sin \varphi_0)t^2 +$$

$$+ (1 - 2\epsilon^2 - \epsilon \sin \varphi_0)t + (3\epsilon - 4\epsilon^3 - \sin \varphi_0)$$

Een derdegraads veelterm heeft een dubbel nulpunt als zijn determinant nul is. Het nul worden van de determinant leidt tot de voorwaarde waarbij de spanning nog juist gelijk is aan de last:

$$\sin \varphi_0 = (1 + 18\epsilon^2 - 27\epsilon^4)/8\epsilon$$

Het rechterlid van de laatste vergelijking is een niet stijgende functie van  $\epsilon$ , met als laagste waarde  $-1$  als  $\epsilon = 1$ . Hoe groter de hellingshoek  $\varphi_0$ , hoe kleiner de excentriciteit kan worden waarbij de spanning boven de last kan uitkomen. Gelukkigerwijze is de vergelijking oplosbaar voor drie randgevallen van  $\sin \varphi_0$ . Allereerst voor  $\sin \varphi_0 = 1$ :  $\epsilon = 1/3$ , vervolgens

voor  $\sin \varphi_0 = 0$ :  $\epsilon = \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}/3 = 0,8475$ , en tenslotte voor  $\sin \varphi_0 = -1$ :  $\epsilon = 1$ . Voor  $\epsilon < 1/3$  wordt het rechterlid groter dan 1, zodat geen oplossing voor  $\varphi_0$  mogelijk is. Conclusie over het maximum van de spanning boven de last:

De maximale spanning  $S_2$  is groter dan de last  $S$  als  $\epsilon \geq 0,8475$ ; is  $\frac{1}{3} \leq \epsilon \leq 0,8475$  dan is dat het geval bij voldoende grote  $\varphi_0$ ;

## Topspanning

Voor het vinden van de maximale spanning gaan we uit van de nulpunten van de afgeleide van  $S_2/S$ . We gebruiken daarvoor de spanning uitgedrukt in de ellipshoekvariabele  $\phi$ :  $t = x/a = \cos \phi$ . De topspanning wordt bereikt als de afgeleide van de spanning naar de hoek nul is. Het blijkt dan dat voor de topspanning geldt, uitgedrukt in de variabele  $Y = 1/\sin \phi$  (zie bijlage Topspanning):

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} \left( \frac{1}{Y} \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + (\lambda Y^2)^2 \right) + \right.$$

$$\left. + \tan \alpha (\epsilon - \lambda Y^2) \right)$$

waarbij we de parameter  $\lambda$  (kegelsnedeparameter) hebben benut en de scheefheidsparameter  $\alpha$ :  $\tan \alpha = \sqrt{1 - \epsilon^2} \tan \varphi_0$ . De variabele  $Y$  is de kleinste oplossing boven 1 van de zesdegraads vergelijking:

$$0 = \lambda^2 Y^6 - 2\lambda \tan \alpha Y^3 - Y^2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

We zien dat een grotere  $\epsilon$ , dus kleinere  $\lambda$ , leidt tot een kleinere  $Y$ , dus een oplossing dicht bij  $Y = 1$ ,  $\phi = \pi/2$  of  $t = 0$ . Deze vergelijking kent geen algemene oplossing. Wel kan ze worden 'opgelost' als het koord horizontaal hangt,  $\varphi_0 = \alpha = 0$ , omdat de vergelijking dan reduceert tot een derdegraads vergelijking:

$$\cos \varphi = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda$$

$$\lambda Y^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi/3)$$

In het algemeen echter moeten we ons tot numerieke oplossingen beperken. Voor een inzicht zie grafieken van de spanning bij enkele  $\lambda$  ellipswaarden en enkele hoeken  $\varphi_0$ .

## BIJLAGEN

### Bijlage: Posities en hoeken

We stellen eerst de vergelijkingen op waaraan de posities  $P_1, P_2, P$ , de hoeken  $\varphi_1 > 0, \varphi_2 > \pi/2$ , de afstanden  $r, r_1$  en  $r_2$  moeten voldoen. We kunnen de cosinus- en sinusregel ieder driemaal toepassen op de driehoek  $P_1P_2P$  met zijden  $r_2, r_1$  en  $2e$ , en hoeken  $\varphi_1, \varphi_2 - \pi$  en  $\varphi_2 - \varphi_1$ :

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 + 4e^2 - 4er_1 \cos \varphi_1 \\ r_1^2 &= r_2^2 + 4e^2 + 4er_2 \cos \varphi_2 \\ 4e^2 &= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin \varphi_1/r_2 &= \sin \varphi_2/r_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)/(2e) \end{aligned}$$

Verder moeten de vergelijkingen voldoen aan de voorwaarde van een vaste koordlengte  $l$ :

$$r_1 + r_2 = 2a = l \quad (3)$$

Daarmee kunnen we de vergelijkingen herschrijven, gebruikmakend van de elliptische parameters *excentriciteit*  $\epsilon = e/a$ , en *korte as*  $b$ , met  $b^2 = a^2 - e^2$ , en kegelsnedeparameter  $p = b^2/a$ :

$$\begin{aligned} p &= r_1(1 - \epsilon \cos \varphi_1) \\ p &= r_2(1 + \epsilon \cos \varphi_2) \\ b^2 &= r_1r_2 \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) \\ \sin \varphi_1/r_2 &= \sin \varphi_2/r_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)/(2e) \\ &= (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)/(2a) \end{aligned}$$

Het is zinvol de vergelijking met verschilhoek te vereenvoudigen, door over te gaan op halve hoeken:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{r_1r_2} \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) &= \epsilon \sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) \end{aligned}$$

Zoals altijd heeft het voordeel om dimensieloze variabelen te gebruiken. We kiezen de *positieparameter*  $t = x/a$ , de  $(x)$ coördinaat van het lastpunt langs de lange as van de ellips, gemeten in eenheden  $a$ . De *richtlijnafstand*  $d = a^2/e$  is de afstand van het midden van de ellips tot een richtlijn. Een ellips heeft de eigenschap dat de verhouding tussen de afstand tot een brandpunt en de afstand tot de bijpassende richtlijn gelijk is aan de excentriciteit. Dus  $r_1 = \epsilon(d+x) = \epsilon d + \epsilon x = a + \epsilon x/a = (\epsilon^{-1} + t)e$  en  $r_2 = \epsilon(d-x) = (\epsilon^{-1} - t)e$ . De positieparameter  $t$  is niets anders dan de positie van het lastpunt,

gemeten vanaf het middenpunt van het koord, uitgedrukt in de constante lengte-eenheid  $e$ , de halve afstand tussen de brandpunten van de ellips.

$$t = \frac{x}{a} = \frac{r_1 - a}{e} = \frac{a - r_2}{e}$$

Verder gebruiken we de relatieve *kegelsnedeparameter*  $\lambda = p/e = 1/\epsilon - \epsilon$ . De afstanden uitgedrukt in  $t$  worden:

$$r_1 = (\epsilon^{-1} + t)e \quad r_2 = (\epsilon^{-1} - t)e$$

Relaties tussen hoeken en posities worden:

$$\begin{aligned} \lambda &= (\epsilon^{-1} + t)(1 - \epsilon \cos \varphi_1) \\ &= (\epsilon^{-1} - t)(1 + \epsilon \cos \varphi_2) \\ \sqrt{\lambda} &= \sqrt{\epsilon^{-2} - t^2} \sqrt{\epsilon} \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \frac{\sin \varphi_1}{\epsilon^{-1} - t} &= \frac{\sin \varphi_2}{\epsilon^{-1} + t} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \end{aligned}$$

De cosinus van de hoeken uitgedrukt in  $t$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\epsilon + t}{1 + \epsilon t} \\ \cos \varphi_2 &= -\frac{\epsilon - t}{1 - \epsilon t} \\ \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) &= \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\sqrt{1 - \epsilon^2 t^2}} \end{aligned}$$

### Bijlage: Spanningen

De spanningen  $S_2$  en  $S_2 - S_1$  ten op zichte van de last  $S$  zijn:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S} &= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \frac{S_2 - S_1}{S} &= \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \frac{\cos(\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) - \varphi_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$

Splitsen van de tellers geeft:

$$\begin{aligned} \frac{S_2}{S} &= \frac{\cos \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos \varphi_0 + \\ &\quad + \frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \varphi_0 \\ \frac{S_2 - S_1}{S} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos \varphi_0 + \\ &\quad + \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

De vergelijkingen voor de spanning drukken we uit in de relatieve positie  $t$ . Het quotiënt van sinus in de tweede term is rechtstreeks te vinden uit de sinusregels:

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)} = \frac{1}{2}(\epsilon^{-1} - t) = \frac{1 - \epsilon t}{2\epsilon}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)} = \epsilon^{-1} = \frac{1}{\epsilon}$$

De cosinussen van  $\varphi_1$  en  $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$  vonden we al eerder uit de cosinusregels. Voor de sinus van de verschilhoek, en de cosinus van de somhoek, is meer werk nodig, uitgaande van de cosinus van de halve verschilhoek:

$$\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1 - \frac{\epsilon^{-2} - 1}{\epsilon^{-2} - t^2}}$$

$$= \frac{\epsilon \sqrt{1 - t^2}}{\sqrt{1 - \epsilon^2 t^2}}$$

$$\sin \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{\sqrt{1 - \epsilon^2 t^2}}$$

$$\cos \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1) = \sqrt{1 - \epsilon^2} \frac{t}{\sqrt{1 - \epsilon^2 t^2}}$$

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$$

$$= 2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \frac{\sqrt{1 - t^2}}{1 - \epsilon^2 t^2}$$

Door invullen van de verschillende cosinus en sinus factoren worden de vergelijkingen voor de spanning  $S_2$ :

$$\frac{S_2}{S} = \frac{(\epsilon + t)(1 - \epsilon^2 t^2)}{(1 + \epsilon t)2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{1 - t^2}} \cos \varphi_0 +$$

$$+ (1 - \epsilon t) \frac{\sin \varphi_0}{2\epsilon}$$

$$= \frac{\cos \varphi_0}{2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}} \frac{(\epsilon + t)(1 - \epsilon t)}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\sin \varphi_0}{2\epsilon} (1 - \epsilon t)$$

en voor  $S_2 - S_1$ :

$$\frac{S_2 - S_1}{S} = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \varphi_0}{\epsilon} \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{\sin \varphi_0}{\epsilon}$$

Dit is een goed uitgangspunt voor 'spanning boven de last'.

Een ander inzicht in het functieverloop ontstaat door over te gaan op de hoekparameter  $\cos \phi = x/a$  met de substitutie  $t = \cos \phi$ :

$$(\epsilon + t)(1 - \epsilon t) = (1 - \epsilon^2)t + \epsilon(1 - t^2)$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} (\sin \phi + \lambda \cot \phi) + \frac{\sin \varphi_0}{2\epsilon} (1 - \epsilon \cos \phi)$$

## Bijlage: Lastspanning

Door de vergelijking in  $t$  van  $S_2$  te vermenigvuldigen met de noemer van de eerste term in het rechterlid bij lastspanning  $S_2 = S$  krijgen we:

$$2\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{1 - t^2} = \cos \varphi_0 (\epsilon + t)(1 - \epsilon t) +$$

$$+ \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{1 - t^2} \sin \varphi_0 (1 - \epsilon t)$$

$$(2\epsilon - \sin \varphi_0 (1 - \epsilon t)) \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{1 - t^2} =$$

$$= \cos \varphi_0 (\epsilon + t)(1 - \epsilon t)$$

Door kwadrateren ontstaat een vierdegraads veelterm in  $t$ .

$$(1 - \epsilon^2)(2\epsilon - \sin \varphi_0 (1 - \epsilon t))^2 (1 - t^2) =$$

$$= (1 - \sin^2 \varphi_0)(\epsilon + t)^2 (1 - \epsilon t)^2$$

We weten echter dat het rechterraandpunt voldoet:  $t = t_2$  is een oplossing, en de factor  $p_1 = (1 - \epsilon \sin \varphi_0)(t_2 - t) = \epsilon - \sin \varphi_0 - (1 - \epsilon \sin \varphi_0)t$  kan worden afgesplitst. Merk op, dat

$$2\epsilon - \sin \varphi_0 (1 - \epsilon t) = p_1 + (\epsilon + t)$$

zodat we de term in de kwadratische vgl die geen  $p_1$  bevat uit het linkerlid naar het rechterlid kunnen brengen:

$$(1 - \epsilon^2)p_1(p_1 + 2(\epsilon + t))(1 - t^2) =$$

$$= (\cos^2 \varphi_0 (1 - \epsilon t)^2 - (1 - \epsilon^2)(1 - t^2)) (\epsilon + t)^2$$

$$= ((\epsilon - t)^2 - \sin^2 \varphi_0 (1 - \epsilon t)^2) (\epsilon + t)^2$$

$$= ((\epsilon - t) + \sin \varphi_0 (1 - \epsilon t)) p_1 (\epsilon + t)^2$$

De  $p_1$  factor kan worden uitgedeeld. Verder uitwerken (Maple) geeft de derdegraads veelterm:

$$0 = \epsilon^2(1 + \epsilon \sin \varphi_0)t^3 +$$

$$- \epsilon(2 - 3\epsilon^2 - \epsilon \sin \varphi_0)t^2 +$$

$$+ (1 - 2\epsilon^2 - \epsilon \sin \varphi_0)t + (3\epsilon - 4\epsilon^3 - \sin \varphi_0)$$

Met de relatieve coëfficiënten:  $a = a_2/a_3$ ,  $b = a_1/a_3$ ,  $c = a_0/a_3$ , de verschuiving  $t - a/3$  en coëfficiënten  $p = (b - a^2/3)$  en  $q = (c - ab/3 + 2a^3/27)$  krijgt de veelterm de vorm  $t^3 + pt + q$ . Met de determinant  $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$  kan de oplossing van deze derdegraads veelterm worden bepaald, waarbij het teken van  $D$  het type van de oplossing bepaalt. Voor negatieve  $D$  heeft de oplossing de gedaante  $t = a/3 - 2\sqrt{-p/3} \cos(\alpha/3)$  met  $\cos \alpha = (q/2)/(-p/3)^{3/2}$ .

De determinant blijkt te kunnen worden gefactoriseerd (Maple):

$$D = \frac{4 \cos^2 \varphi_0 (1 - \epsilon^2)^2}{27 \epsilon^4 (1 + \epsilon \sin \varphi_0)^4} (1 + 18 \epsilon^2 - 27 \epsilon^4 - 8 \epsilon \sin \varphi_0)$$

Het nul worden van de determinant geeft aan dat twee nulpunten samenvallen, dat wil zeggen de twee punten waarbij  $S_2 = S$  vallen samen. Dus is de voorwaarde waarbij de spanning nog juist boven de last is:

$$\sin \varphi_0 = (1 + 18 \epsilon^2 - 27 \epsilon^4) / 8 \epsilon$$

Omdat de sinus tussen 1 en  $-1$  moet liggen vinden we daaruit de beperkingen voor het hebben van een spanning boven de last.

## Bijlage: Topspanning

De spanning kon worden uitgedrukt in de ellipsohoekvariabele  $\phi$ :

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} (\sin \phi + \lambda \cot \phi) + \frac{\sin \varphi_0}{2} (\epsilon^{-1} - \cos \phi)$$

De notatie kan nog iets worden vereenvoudigd met behulp van het faseverschil  $\alpha$  tussen de sinus- en cosinusterm:

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{\epsilon\lambda} \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \tan \varphi_0$$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} (\sin \phi + \lambda \cot \phi + \tan \alpha (\epsilon^{-1} - \cos \phi))$$

Vanuit de voorstelling van de spanning als functie van  $\phi$  kunnen we eenvoudig de voorwaarde voor de topspanning afleiden. Immers bij de topspanning zal de afgeleide van de spanning 0 zijn:

$$\left(\frac{S_2}{S}\right)' = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{S_2}{S}\right) \Big/ \frac{dt}{d\phi}$$

$$0 = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} \left(\cos \phi - \frac{\lambda}{\sin^2 \phi} + \tan \alpha \sin \phi\right)$$

De voorwaarde voor topspanning gebruiken we om de cos-term uit te drukken in de sin-term bij de topwaardepositie  $\sin \phi = Z$ :

$$\cos \phi = \frac{\lambda}{Z^2} - Z \tan \alpha$$

Hierbij is  $Z$  de 'geschikte' oplossing voor  $\sin \phi$  met  $1 - \sin^2 = \cos^2$ . Geschikt is: de grootste  $Z < 1$  oplossing, die maximum geeft. Kwadrateren en vereenvoudigen geeft een zesdegraads

veelterm in  $Z$ :

$$1 - Z^2 = \left(\frac{\lambda}{Z^2} - Z \tan \alpha\right)^2$$

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda \tan \alpha Z^3 - Z^4 + \frac{Z^6}{\cos^2 \alpha}$$

Door substitueren van de cos-term en sin-term uitgedrukt in  $Z$ , en uitwerken, vinden we voor de topspanning

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} \left( Z \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(\frac{\lambda}{Z^2}\right)^2 \right) + \tan \alpha \left( \epsilon - \frac{\lambda}{Z^2} \right) \right)$$

Om de topwaarde te kunnen bepalen moeten we eerst de waarde van  $Z$  vinden. Er is geen simpele oplossing van  $Z$  voor een zesdegraads veelterm. Merk op, dat de term  $\lambda/Z^2$  een belangrijke rol speelt. Door de combinatie  $W = \lambda/Z^2$  als variabele te nemen is de vergelijking te 'vereenvoudigen'. Vervang  $Z$  door  $\sqrt{\lambda}/\sqrt{W}$ , zodat  $W$  voldoet aan de 'veelterm':

$$0 = W^3 - 2\lambda \tan \alpha YW - W + \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha}$$

De topwaarde die daarbij hoort is:

$$\frac{S_2}{S} = \frac{\cos \varphi_0}{2\sqrt{\epsilon\lambda}} \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{W}} \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + W^2 \right) + \tan \alpha (\epsilon - W) \right)$$

In het bijzonder, met  $\sqrt{W}$  als parameter (numeriek), geldt een derdegraads vergelijking in  $W$ :

$$0 = W^3 - (1 + 2\sqrt{\lambda} \tan \alpha \sqrt{W})W + \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha}$$

die door de substitutie  $W = a(w + w^{-1})$  en de keuze  $3a^2 = 1 + 2\sqrt{\lambda} \tan \alpha \sqrt{W}$  overgaat in de tweedegraads vergelijking in  $w^3$ :

$$a = \frac{\sqrt{1 + 2\sqrt{\lambda} \tan \alpha \sqrt{W}}}{\sqrt{3}}$$

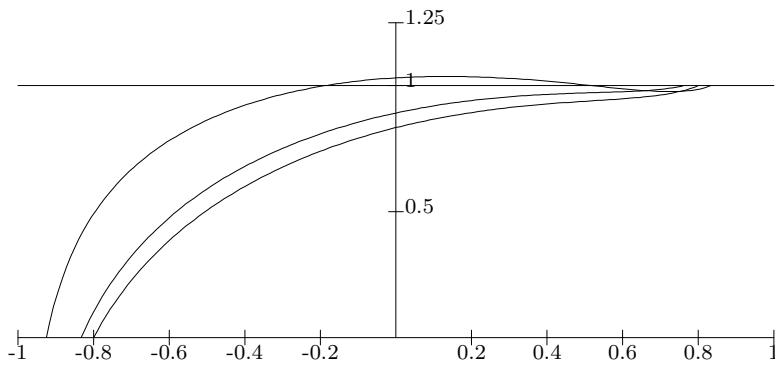
$$0 = a^3 (w^3 + w^{-3}) + \frac{\lambda}{\cos^2 \alpha}$$

De laatste heeft reële oplossingen als  $a^3 \geq \lambda/(2 \cos^2 \alpha)$  (dus als  $\lambda$  klein genoeg is) met  $w$  op de eenheidscircel van het complexe vlak:

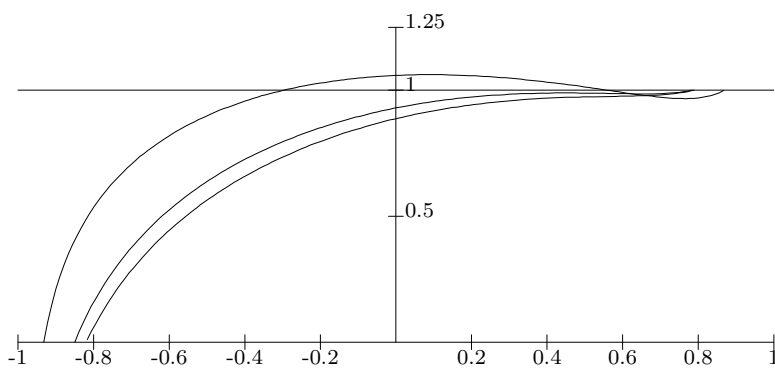
$$w^3 = e^{i\varphi} \quad \cos \varphi = -\frac{\lambda}{2a^3 \cos^2 \alpha}$$

$$W = \lambda/Z^2 = 2a \cos(\varphi/3)$$

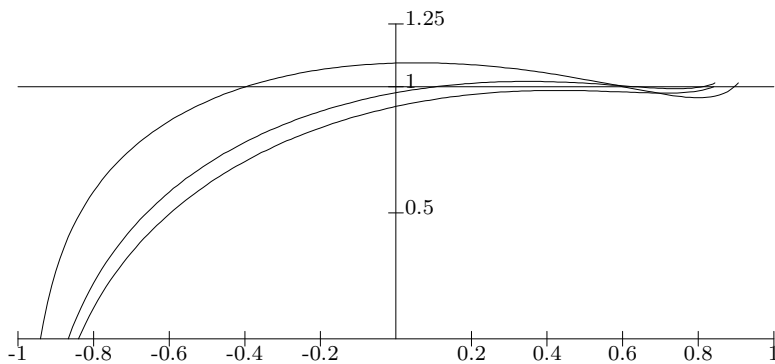
De geschikte  $\varphi/3$  is de keuze met de kleinste  $W > \lambda$  oplossing.



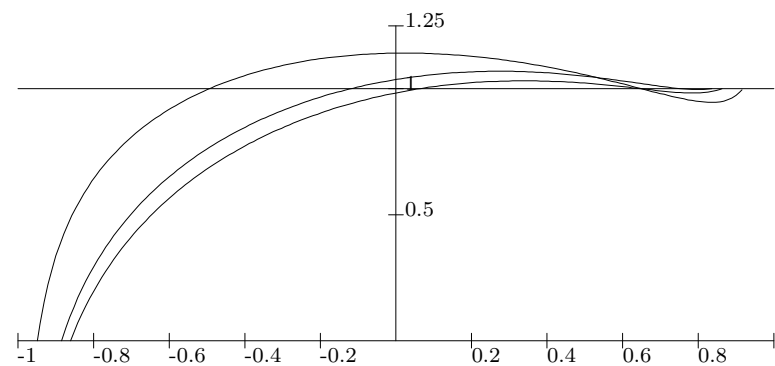
De belasting als functie van  $t$  bij  $\lambda = 0.45$  en  $\varphi_0 = 0.5, 0.1$  en  $0$ .



De belasting als functie van  $t$  bij  $\lambda = 0.40$  en  $\varphi_0 = 0.5, 0.1$  en  $0$ .



De belasting als functie van  $t$  bij  $\lambda = 0.35$  en  $\varphi_0 = 0.5, 0.1$  en  $0$ .



De belasting als functie van  $t$  bij  $\lambda = 0.30$  en  $\varphi_0 = 0.5, 0.1$  en  $0$ .