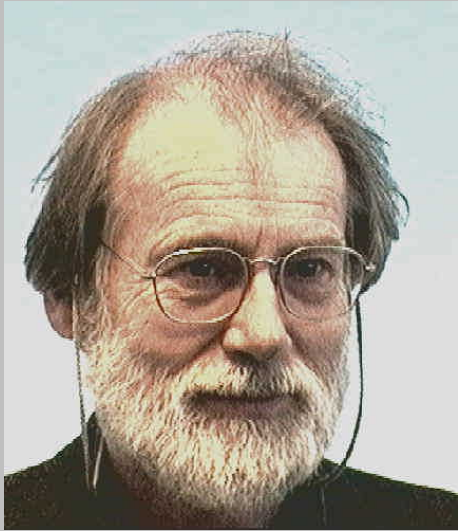


# Elektron natuurkunde 1

Vastestof

dr.ir. C.M.Fortuin



Cornelis Marius  
Fortuin  
(1940– )

*De schrijver van dit boek heeft zich jarenlang verdiept in de natuurkunde van 'de vaste stof': tijdens zijn studie technische natuurkunde aan de TH Delft bij het afstuderen, tijdens zijn werk aan de RU Leiden bij het promotieonderzoek en daarna bij UC San Diego, KU Nijmegen en de Universiteit van Amsterdam bij theoretisch onderzoek. Die achtergrond werkt natuurlijk door in de leerstof die hij als docent natuurkunde schreef en gebruikte bij de Hogeschool Gelderland te Arnhem, tegenwoordig Hogeschool Arnhem en Nijmegen (HAN). Na zijn pensioen bereidde hij de 'WorldWideWeb' publicatie van dit boek voor.*

*'Elektron Natuurkunde deel1' laat zien, door behandeling van de natuurkundige achtergrond, hoe en waarom de elektronische componenten — die dankzij hun uiterst kleine afmetingen de wereld voorgoed hebben veroverd — werken, en waarom ze zich soms onder bijzondere omstandigheden anders gedragen. In deel 2 worden de klassieke componenten behandeld, met de elektrische en magnetische velden. De leerstof is gedacht voor gebruik in de propaedeuse van elektrotechniek en technische natuurkunde, en voor wie maar is geïnteresseerd!*

ELEKTRON NATUURKUNDE  
Deel 1  
VASTE STOF  
dr.ir. C.M.Fortuin

In 1995 was de uitgever Educatieve Partners Nederland BV, Houten  
ISBN 90 401 03682

©2011 C.M.Fortuin, Oosterbeek ([e.m.fortuin@hecnet.nl](mailto:e.m.fortuin@hecnet.nl)) (fortuinc@xs4all.nl)  
Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden openbaar ge-  
maakt zonder bron vermelding.

## VOORWOORD

### Hoe ontstaan?

Dit boek is gegroeid in de praktijk van de natuurkunde lessen aan de eerste- (en tweede-)jaars studenten elektrotechniek van de HTS Arnhem. Door de onstuimige ontwikkeling van de techniek, maar evengoed van didactiek en regelgeving rond het onderwijs, moest de leerstof geregeld worden aangepast. Dat houdt in, dat meerdere collega's hebben meegewerkt aan het tot stand komen; dat vele studenten, door hun gevraagde en ongevraagde commentaar, de vormgeving hebben beïnvloed. De voorname drijfveer was om de *hedendaagse* natuurkundige kennis achter de moderne elektronische apparatuur in de leerstof op te nemen. Als toetsteen geldt daarbij de wijze waarop de 'oude' natuurkundige kennis, de mechanica, de elektrische en magnetische velden, al meer dan 50 jaar geleden beschikbaar was gemaakt voor het onderwijs. Naar mijn mening kunnen de huidige leerboeken die toets der kritiek niet doorstaan. De natuurkundeboeken voor de propadeuse HBO, en dit geldt enigermate ook voor het UO, lopen 'achter'.

### Karakter van de leerstof.

Natuurkundig gezien is 'Elektron natuurkunde' een 'inleiding' op de elektron-ische verschijnselen: van de klassieke elektrische en magnetische velden tot de geleiding in vastestoffen. Een goed begrip daarvan, een grondige basiskennis, is een 'must' voor degenen die te maken gaan krijgen met elektronische apparatuur in de breedste betekenis. Basiskennis, omdat zicht wordt gegeven op de natuurkundige achtergrond (denk daarbij aan onderwerpen als: quantum-mechanica, statistische mechanica, vastestofnatuurkunde) zonder er diep op in te gaan. Didactisch gezien is de leerstof zó aangeboden, dat ze tot in hoge mate zelfstandig kan worden doorgewerkt—daartoe zijn vele 'tussenvragen' en 'testopgaven' in de leerstof verwerkt. Daarom is dit boek geschikt voor ieder die, vrij zelfstandig, een goed *begrip* wil krijgen van de wereld van die verschijnselen. Zodat—als alle begrippen goed zijn verwerkt—de *achtergrond* daarvan bespreekbaar en 'berekenbaar' is.

### Voor welke lezer bedoeld?

De leerstof is in het bijzonder gedacht voor de studierichtingen *elektrotechniek* en *natuurkunde*. Vanwege het karakter van het hedendaagse HBO, is voor wat betreft de benodigde voorkennis gedacht aan een student met HAVO vooropleiding. Dat wil niet zeggen dat het gemakkelijke stof zal zijn: zeker niet! Er zal hard moeten worden gewerkt om alles te doorgronden—maar dan kan ook tot een goed begrip van de moderne toepassingen van de natuurkunde worden gekomen.

**Wat is speciaal aan deze leerstof?**

De lezer oordele zelf. Hier een lijstje, met ‘trefwoorden’, over wat speciaal is aan de leerstof:

- de vastestof ‘elektron’ eigenschappen worden behandeld vóór de theorie van de ‘velden’;
- de betekenis van Fermi-energie (Voltapotentiaal) voor geleiding, en de behandeling van stroom bij halfgeleiders;
- het ‘stroomlijnen-potentiaaloppervlakken’ beeld voor velden;
- de behandeling van de lichtstraal-moden in de glasvezel;

**Wat de lezer móet weten.**

De leerstof is welbewust afgedrukt in drie lettertypen:

1. romein voor *rustig te bestuderen* leerstof (theorie);
2. schreefloos voor *aktief door te werken* leerstof;
3. klein voor *extra uitvoerige* leerstof;

Bij de opgaven geven sterren aan wat van de lezer wordt verwacht:

- \* theorie controle vraagstuk: direkt ‘maken’, en bij verkeerd antwoord (achter hoofdstuk) terug lezen;
- \*\* toepassingsgerichte oefening: direkt maken, en doorgaan tot antwoord goed is;
- \*\*\* theorie doordenker, eventueel antwoord laten toelichten;
- \*\*\*\* toepassings opgave: een laatste test op verwerking;

Toegevoegd zijn een ‘Inhoud’ en een ‘Index’, met trefwoorden.

**Wat is speciaal aan de uitgave?**

Voor het elektronisch ‘zetten’ van de tekst, en het merendeel der figuren, heb ik gebruik gemaakt van de ‘public domain’ tekstverwerker ‘ $\text{\TeX}$ ’. De internationale  $\text{\TeX}$ -gemeenschap heeft vele nuttige hulpmiddelen gemaakt waarvan ik kon profiteren. Het manuscript is klaar-voor-kopiëren afgedrukt en de verdere afwerking in handen van de uitgever gelegd.

**Voor een enkele lezer.**

Reeds eerder is de medewerking van collega’s genoemd: drs. J.E. Kadijk, ir. C.J.G. Spoorenberg en ir. P.A.C. Ypma hebben kleinere of grotere bijdragen aan de tekst of leerstofkeuze verzorgd. Hans Zoete zorgde voor de onaflaatbare bemoediging die tot deze uitgave heeft geleid.

Oosterbeek, januari 1995

dr.ir. C.M. Fortuin.

**Naar het web.**

De uitgever Stam Techniek gaf de rechten terug. Met ook de figuren elektronisch ‘gezet’ en enkele aanpassingen kan alles het web op.

Oosterbeek, december 2011

dr.ir. C.M. Fortuin.

# Inhoudsopgave

<b>Inhoudsopgave</b>	<b>7</b>
<b>1 ATOOM EN ELEKTRON</b>	<b>11</b>
1.1 Inleiding . . . . .	12
1.2 Atoomkern . . . . .	13
1.3 Elektronwolk . . . . .	18
1.3.1 Kwantisatie van de elektronenergie-verandering . .	18
1.3.2 Kwantisatie van de elektronenergie . . . . .	19
1.3.3 Elektronenergie in waterstofatoom . . . . .	22
1.4 Waterstofatoom-model van Bohr . . . . .	27
1.4.1 Klassieke elektronbaan . . . . .	27
1.4.2 Gekwantiseerde klassieke elektronbaan . . . . .	31
1.5 Het golfmodel . . . . .	35
1.5.1 Inleiding . . . . .	35
1.5.2 Deeltje en Golf . . . . .	35
1.5.3 Van golf naar deeltje . . . . .	36
1.5.4 Elektron en golf . . . . .	39
1.6 Golfmodel voor atomen . . . . .	42
1.6.1 Magnetische kwantumgetal . . . . .	42
1.6.2 Impulsmomentkwantumgetal . . . . .	43
1.6.3 Elektronspin . . . . .	45
1.6.4 Elektronwolk toestanden . . . . .	46
1.7 Straling . . . . .	53
1.7.1 Inleiding . . . . .	53
1.7.2 Röntgenstraling . . . . .	54
1.7.3 Gammastraling . . . . .	57
1.7.4 Beta-straling . . . . .	59
1.8 Laserstraling . . . . .	61
MEERKEUZEANTWOORDEN . . . . .	67

<b>2</b>	<b>KRISTAL EN ELEKTRON</b>	<b>69</b>
2.1	Elektronen in vastestof . . . . .	70
2.2	Elektronen in ideale geleiders . . . . .	75
2.3	Elektronen in halfgeleiders . . . . .	83
2.4	Geleiding in vastestof . . . . .	89
	2.4.1 Zuivere geleiding . . . . .	89
	2.4.2 Invloeden op geleiding . . . . .	95
2.5	Beweeglijkheid en ladingsdichtheid . . . . .	99
2.6	Relaxatie en recombinatie . . . . .	106
	2.6.1 Relaxatie . . . . .	106
	2.6.2 Recombinatie . . . . .	108
2.7	Geleiding en diffusie . . . . .	111
	2.7.1 Coëfficiënten van diffusie en geleiding . . . . .	111
	2.7.2 Geleiding en Fermi-energie . . . . .	118
2.8	Elektronenergie in kristal . . . . .	122
	MEERKEUZEANTWOORDEN . . . . .	129
<b>3</b>	<b>KRISTALRAND EN ELEKTRON</b>	<b>133</b>
3.1	Inleiding . . . . .	134
3.2	Uittree-energie en voltapotentiaal . . . . .	136
	3.2.1 Uittree-energie . . . . .	136
	3.2.2 Foto-elektrisch effect . . . . .	137
	3.2.3 Voltapotentiaal . . . . .	139
	3.2.4 Thermische emissie . . . . .	141
3.3	Contactspanning . . . . .	146
	3.3.1 Contactspanning geleiders . . . . .	146
	3.3.2 Contactspanning halfgeleiders . . . . .	148
3.4	Verarmingsgebied-model . . . . .	155
	3.4.1 Ruimtelading in verarmingsgebied . . . . .	155
	3.4.2 Elektrisch veld in verarmingsgebied . . . . .	158
3.5	Dioden . . . . .	165
	3.5.1 Ideale diode . . . . .	165
	3.5.2 Schottky-diode . . . . .	167
	3.5.3 pn-diode . . . . .	169
	3.5.4 Diode-stroom . . . . .	173
3.6	Veldeffect-transistor . . . . .	179
	3.6.1 Inleiding . . . . .	179
	3.6.2 De JFET . . . . .	179
	3.6.3 MOSFET . . . . .	185
3.7	Bipolaire-transistor . . . . .	188
	MEERKEUZEANTWOORDEN . . . . .	195



<b>4</b>	<b>POLARISATIE EN MAGNETISATIE</b>	<b>197</b>
4.1	Condensator . . . . .	198
4.2	Elektrische veldenergie . . . . .	207
4.3	Polarisatie en diëlektrica . . . . .	212
4.3.1	Elektrisch veld en polarisatie . . . . .	212
4.3.2	Polarisatie en dipoolmoment . . . . .	216
4.4	Spoelen . . . . .	222
4.5	Magnetische veldenergie . . . . .	229
4.5.1	Inductiespanning . . . . .	229
4.5.2	Magnetische veldkracht . . . . .	234
4.6	Magnetisatie en ferromagneten . . . . .	239
	MEERKEUZEANTWOORDEN . . . . .	249
	<b>Index</b>	<b>250</b>



Niels Hendrik  
David Bohr  
(1885–1962)

*De deense natuurkundige Bohr wordt, naast Einstein, gerekend tot de grootste fysici van de twintigste eeuw. In 1913 publiceerde hij een geheel nieuw model van het waterstofatoom. Dat werd de aanzet voor veel verschillende ontwikkelingen, waarvoor hij in 1922 de Nobelprijs kreeg. Op grond van het revolutionaire idee van de kwantumgetallen en zijn gedachten over de betekenis van het golfkarakter van materie werd (door anderen weliswaar) de quantummechanica ontwikkeld. Vele malen hebben Bohr en Einstein heftige discussies gevoerd over het 'ongrijpbare' van een deeltje in de golfvoorstelling van Bohr. De*

*ironie van het lot wilde, dat de uitvoering van een gedachte-experiment—in 1927 bedacht door Einstein en later aangepast door Bohm, om duidelijk te maken dat die golfvoorstelling 'toch niet kon'—door Aspect in 1982 (zo'n 55 jaar later) duidelijk maakte dat Bohr altijd al gelijk had gehad. Bij het begin van de tweede wereldoorlog werd Bohr door de Amerikaanse geheime dienst uit Denemarken ontvoerd naar de Verenigde Staten van Amerika om mee te kunnen werken aan de ontwikkeling van de atoombom. Ter ere van Bohr werd direct na de tweede wereldoorlog een wetenschappelijk tijdschrift geheel aan hem 'gewijd'.*

# Hoofdstuk 1

## ATOOM EN ELEKTRON

### DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de hierna volgende begrippen zodanig te hebben opgenomen, dat u ermee kan werken en dat u ze kan toepassen in situaties, bijvoorbeeld zoals die in de vaste stof voorkomen.

- atoom, kern en elektron; elementaire lading;
- aanslaan, ionisatie van elektronwolk;
- absorptie en emissie van straling;
- elektron-energieniveaus en emissiefoton-energie;
- het atoommodel van Bohr; elementair impulsmoment;
- deeltje en golf karakter van elektron en foton;
- elektrontoestanden en kwantumgetallen voor energie, impulsmoment, magnetisch impulsmoment;
- spin van elektronen;
- Pauli-principe;
- elektronenconfiguratie en periodiek systeem;
- remstraling en röntgenstraling;
- gammastraling en kernstraling;
- proton, neutron en sterke kracht, zwakkekracht;
- protonaantal, massagetal, alfaverval, betaverval;
- gestimuleerde emissie en pompen bij lasers.

## 1.1 Inleiding

Er zijn heel veel natuurkundige en scheikundige processen die we slechts kunnen begrijpen op basis van een atoommodel. Dat wil zeggen: wat wij waarnemen op ‘ons niveau’ (zichtbaar en meetbaar) is alleen begrijpelijk door te bedenken dat er een ‘submicroscopisch niveau’ is, onzichtbaar voor een mens, zelfs al kijkt die door een microscoop, en onmeetbaar.

**het atoom** Het woord atoom komt uit het grieks en betekent zoiets als ondeelbaar; dat geeft het denkbeeld weer, dat alle materie zou zijn opgebouwd uit elementen, met het atoom als kleinste element; zijn afmeting is slechts  $10^{-10}$  m, zijn massa slechts  $10^{-25}$  kg, zijn lading is nul.

In de loop der jaren is het duidelijk geworden, dat er ook andere bouwstenen zijn, dat een atoom wel degelijk deelbaar is, en dat er ook vele soorten atomen zijn. Om de vragen die ons interesseren rond de elektronische processen te kunnen beantwoorden, is het voldoende een ruw inzicht te hebben in de opbouw van atomen. Op het submicroscopische niveau zijn er twee ‘bouwstenen’ van het atoom die een belangrijke rol spelen:

**het elektron** met zijn negatieve elektrische lading (bepalend voor de elektrische verschijnselen en nog meer); zijn afmeting is praktisch onmeetbaar, zijn massa slechts  $10^{-30}$  kg, maar de lading  $10^{-19}$  C;

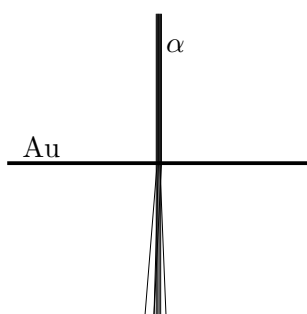
**de kern** met zijn massa (die de atoommassa bepaalt) omgeven door een schil van elektronen (aan de buitenkant en daardoor bepalend voor praktisch alle eigenschappen); zijn afmeting is slechts  $10^{-14}$  m, zijn massa slechts  $10^{-25}$  kg.

In dit hoofdstuk bepalen we ons tot atomen. Hun specifieke eigenschappen—bijvoorbeeld hun vorm—en hun grote aantal beïnvloeden de voor- en meetbare werkelijkheid. Of een stof een geleider is, of een niet-geleider, wordt op atoomniveau bepaald. Of een stof doorzichtig of ondoorzichtig is voor licht, wordt op atoomniveau bepaald. Daarom beogen we nu het geven van inzicht in het begrip atoom, opgebouwd uit een kern en een wolk elektronen er omheen. Later komen we terug op de rol van de ‘apart’ optredende elektronen.

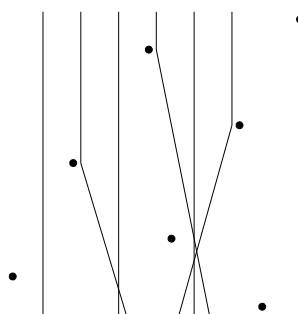
## 1.2 Atoomkern

In 1911 toonde Rutherford aan, dat de materie moet bestaan uit atomen met een zware kern, waarin de massa en positieve elektrische lading geconcentreerd is, en daaromheen elektronen met een negatieve lading. Verder vond hij dat de lading in die kern een geheel aantal positieve elektronladingen is. Hoe vond hij dat resultaat?

**Atoomleegte** Om te weten te komen of er ‘ruimte’ was in de vaste stof—en of er atomen bestaan—nam Rutherford een zo dun mogelijk folie, en daarvoor koos hij het metaal goud. Hij wist natuurlijk dat ‘gewone’ straling als licht niet door zoiets als een goudfolie, hoe dun dan ook, heen gaat. Maar wat gebeurt er als we  $\alpha$ -straling (later bleken dat positief geladen Heliumkernen te zijn) op dat folie stralen? Die straling gaat er dwars doorheen, op een klein gedeelte na, dat in verschillende richtingen verstrooid wordt (zie fig.1.1–1.3)! Nu zijn  $\alpha$ -deeltjes erg



Figuur 1.1 De verstrooiing van  $\alpha$ -straling (He kernen) door een goudfolie (Au atomen): de straling komt met zó'n grote energie op het dunne folie dat ze dóór het folie heen dringt—ze blijkt echter wèl enigszins te worden verstrooid.



Figuur 1.2 De verstrooiing van een enkele He-kern aan een enkele Au-kern: microscopisch gezien kan de He kern gemakkelijk door de elektronwolk van een Au atoom dringen, maar als het daarbij te dicht langs de Au-kern komt wordt ze afgestoten en verandert haar baan van richting.

zwaar vergeleken met elektronen, waaruit het volgende is te concluderen: het goudfolie bestaat ruimtelijk gezien bijna helemaal uit *elektronen*, die de  $\alpha$ -deeltjes eenvoudig niet kúnnen tegenhouden *bij gebrek aan gewicht*. Overigens kunnen die elektronen wel lichtstraling, die niets weegt, tegenhouden (zoals ieder weet).

**Opg 1.2.1** \* Waarom moet de proef van Rutherford in vacuüm worden uitgevoerd?  
[Antw. in lucht worden  $\alpha$ 's teveel verstrooid en geabsorbeerd]

**Kern als puntmassa** We bekijken het verstrooien—dat is het veranderen van de bewegingsrichting—nader. Interessant is, dat een (klein) gedeelte van de  $\alpha$ -straling ‘*puntvormig*’ verstrooid wordt door het folie. Ook bij dünnere folie blijft dat verstrooien, vanuit het trefpunt, precies eender. De verklaring is: in het folie zitten zware bolvormige, geladen *kernen*, die de  $\alpha$ -deeltjes kunnen verstrooien *als die er langs scheren*. Veel ruimte nemen die kernen niet in, anders zou er veel méér verstrooiing zijn. Door het folie zo dun mogelijk te maken kon Rutherford er zeker van worden dat de verstrooiing van één  $\alpha$ -deeltje slechts aan een enkele kern gebeurde (bij dükkere folies zal een  $\alpha$ -deeltje meerdere malen worden verstrooid, zodat op den duur geen energie meer overblijft, en het folie het  $\alpha$ -deeltje ‘vangt’).

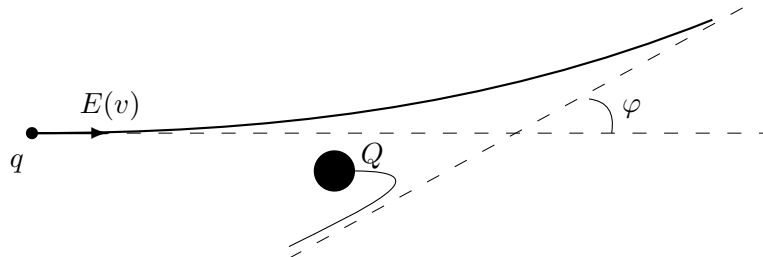
- Opg 1.2.2 \*\*** De massa van 1 m<sup>2</sup> zeer dun goudblad blijkt te zijn  $2 \cdot 10^{-3}$  kg.  
 a Bereken de dükte van het goudblad. [Antw.  $d = 0,104 \mu\text{m}$ ]  
 b Bereken hoeveel atomen dat goudblad dük is, onder de aanname dat de goudatomen een afstand  $d = 0,257$  nm hebben. [Antw. 405 goudatomen]

**Kernlading** Hoe wist Rutherford nu dat die kern *positief geladen* was? Om te beginnen: er moet ‘ergens’ positieve lading zijn om de negatieve lading van de elektronen (proef van Thomson 1897) te neutraliseren. Het lag dus voor de hand ze in dat ‘centrum van verstrooiing’ te denken.

Door precieze metingen wist Rutherford die **kernlading**  $Q$  voor goud te bepalen:  $Q = 79e$  (binnen de meetnauwkeurigheid). Daarbij is de lading uitgedrukt in eenheden  $e$ ; de grootheid  $e$  is de **elementaire lading** met gemeten waarde

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

In het bijzonder is de lading van het *elektron* gelijk aan  $-e$ ; de afkorting ‘ $e$ ’ is düdelijk afgeleid van de naam ‘e’lektron.



Figuur 1.3 Afbuiging van puntlading door kern door de Coulombafstoting. De interactie tijdens het voorbijgaan leidt tot de verandering in de snelheidsrichting

**Coulombverstrooiing** Zou de kern elektrisch geladen zijn, dan zou de kernlading de lading van de alpha-deeltjes afstoten. Een verdere controle was dus te berekenen hoe  $\alpha$ -deeltjes zouden moeten worden afgebogen door Coulomb-afstoting (zie fig. 1.3). Hij berekende dat de **werkzame doorsnede**  $\sigma$ , het deel van verstrooide deeltjes die over een hoek  $\varphi$  worden afgebogen per vierkante meter, gelijk is aan:

$$\sigma = \left( \frac{Qq/(4\pi\epsilon_0)}{4E_k \sin^2(\varphi/2)} \right)^2$$

Om deze formule te kunnen begrijpen bekijken we teller en noemer apart. In de teller is  $Q$  de kernlading en  $q$  de lading van het  $\alpha$ -deeltje; de gehele teller  $Qq/(4\pi\epsilon_0)$  is, op een afstand na, de *afstotende elektrische energie* van kern en lading. In de noemer is  $E_k$  de bewegingsenergie van het  $\alpha$ -deeltje en  $\varphi$  de hoek waarover het tgv de afstotende krachten wordt afgebogen; de gehele noemer is zoiets als de *afbuiging tegengaande bewegingsenergie*. Het rechterlid geeft daarmee de verhouding weer tussen de afstotende (dus afbuigende) energie en de bewegingsenergie die zich daartegen verzet. Merk op, dat de teller de eenheid Jm heeft, en de noemer de eenheid J, waardoor de eenheid van de  $\sigma$  gelijk is aan  $\text{m}^2$ , een oppervlakte. Dáárom noemt men  $\sigma$  de *werkzame doorsnede*.

**Protonaantal  $Z$**  Rutherford vond inderdaad deze Coulombafstoting, en tevens experimenteel dat de waarde van de *kernlading*  $Q$  een veelvoud van de elementaire lading  $e$  is. De evenredigheidsconstante tussen  $Q$  en  $e$  heet het **protonaantal  $Z$** :

$$Q = Ze$$

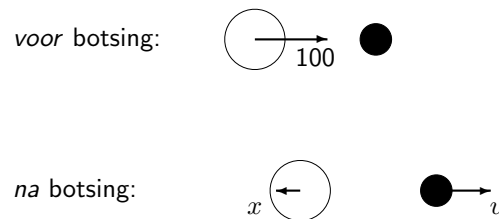
Als het aantal elektronen gelijk aan  $Z$  is, dan hebben we een *atoom*. Een atoom is dan ook elektrisch neutraal; dat is meestal het geval bij gassen. In vaste stoffen en vloeistoffen zullen de atomen vaak níet neutraal zijn; ze zijn dan *geïoniseerd*. Een geïoniseerd atoom wordt een **ion** genoemd; een ion is dus nooit elektrisch neutraal. Zijn er bijvoorbeeld  $Z - 1$  elektronen in de elektronwolk van het ion, dus één elektron te weinig voor een neutraal atoom, dan is de totale ionlading  $Ze + (Z - 1)(-e) = e$ ; het atoom is **enkelvoudig geïoniseerd**. Ionen komen veel voor in de vastestof en vloeistof vorm van de elementen.

**Conclusie** *Het atoom of ion bestaat uit een atoomkern met positieve lading  $Ze$ , en een **elektronwolk**. Bij een atoom bestaat de wolk uit  $Z$  elektronen, bij een positief ion uit minder dan  $Z$ , en bij een negatief ion uit meer dan  $Z$  elektronen.*

**Voorbeeld Massabotsing** Een kern botst centraal en elastisch op een tweemaal zo zwaar deeltje. Met hoeveel snelheid zal het zelf worden teruggekaatst, en hoeveel snelheid krijgt het aangebotste deeltje?

'centrale botsing' betekent dat de twee massa's op de lijn door hun centra blijven bewegen; voor de botsing naar elkaar toe, na de botsing van elkaar af. De botsing speelt zich dus af in een één-dimensionale ruimte.

'elastische botsing' betekent dat het netto energie-effect van de botsing, dus de energie ná de botsing vergeleken met de energie vóór de botsing, slechts mag bestaan uit het overdragen van bewegingsenergie. Afgezien van wat er zich afspeelt tijdens de botsing geldt de *behoudswet* van bewegingsenergie: er is *bewegingsenergiebehoud*.



Voor de botsing stellen we de snelheid 100; na de botsing stellen we de snelheid  $x$  ( $x$  wordt negatief) respectievelijk  $v$  voor het aangebotste deeltje ( $v$  wordt positief). Behalve bewegingsenergiebehoud geldt ook *impulsbehoud* bij deze botsing. De impuls van een deeltje is  $mv$ , de bewegingsenergie  $\frac{1}{2}mv^2$ ; de behoudswetten voor impuls en energie worden:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 100 + 2 \cdot 0 &= 1 \cdot x + 2 \cdot v \\ \frac{1}{2}1 \cdot 100^2 + \frac{1}{2}2 \cdot 0^2 &= \frac{1}{2}1 \cdot x^2 + \frac{1}{2}2 \cdot v^2 \end{aligned}$$

Omgezet naar impuls- en energie-overdracht wordt dat:

$$\begin{aligned} 2 \cdot v &= 1 \cdot (100 - x) \\ \frac{1}{2}2 \cdot v^2 &= \frac{1}{2}1 \cdot (100^2 - x^2) \quad \text{of} \quad 2 \cdot v^2 = 1 \cdot (100^2 - x^2) \end{aligned}$$

Het verschil van twee kwadraten factoriseren we:

$$2 \cdot v^2 = (100^2 - x^2) = 1 \cdot (100 - x)(100 + x)$$

Daarin kan worden gesubstitueerd:  $1 \cdot (100 - x) = 2 \cdot v$ , wat leidt tot:

$$\begin{aligned} 2 \cdot v^2 &= 2 \cdot v(100 + x) \\ v = 0 &\quad \text{of} \quad v = 100 + x \end{aligned}$$

Met de oplossing voor de botsing:  $v = 0$ ,  $x = 100$ , en na de botsing:  $v = \frac{2}{3}100$ ,  $x = -\frac{1}{3}100$ . Dat is gevoelsmatig in orde: de zwaardere massa neemt het merendeel van de energie (in de vorm van snelheid) mee.



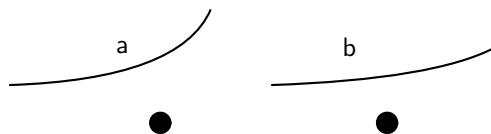
**Opg 1.2.3** \* De diameter van een waterstofatoom is ongeveer:

- A  $10^{-12}$  m
- B  $10^{-11}$  m
- C  $10^{-10}$  m
- D  $10^{-9}$  m

**Opg 1.2.4** \*\* Twee gelijke massa's botsen centraal en elastisch (langs  $x$ -as) Vóór de botsing staat nr.1 stil bij  $x = 0$  en nr.2 is rechts daarvan met een naar links gerichte snelheid  $v$ . Na de botsing bewegen nr 1 respectievelijk nr 2:

- A met snelheid  $v$  naar links resp. staat stil op  $x = 0$
- B met snelheid  $\frac{1}{2}v$  naar links voor beiden
- C met snelheid  $\frac{1}{2}v$  naar links resp met snelheid  $\frac{1}{2}v$  naar rechts
- D versneld naar links resp. staat stil op  $x = 0$

**Opg 1.2.5** \*\*\* We vergelijken de banen die  $\alpha$  deeltje nr.1 met hoge snelheid en  $\alpha$  deeltje nr.2 met lage snelheid volgen wanneer ze op dezelfde wijze een goudkern naderen. Hun afbuiging kan als volgt worden beschreven m.b.v. de getekende banen:



- A 1 als a, 2 als b
- B 1 als b, 2 als a
- C 1 en 2 als a(of b)
- D afbuiging is onbepaald

**Opg 1.2.6** \*\*\* We beschieten een goudfolie met een bundel  $\alpha$ -deeltjes, en, ter vergelijking, een even dik zilverfolie met eenzelfde bundel. We vergelijken de aantallen  $\alpha$ -deeltjes die worden verstrooid in een bepaalde (ruimte) hoek. Voor de hoek tussen  $25^\circ$  en  $30^\circ$  zien we dat de aantallen voor goud en zilver:

- A gelijk zijn
- B afhangen van de atoommassa
- C afhangen van de kernlading
- D afhangen van de atoommassa en de kernlading

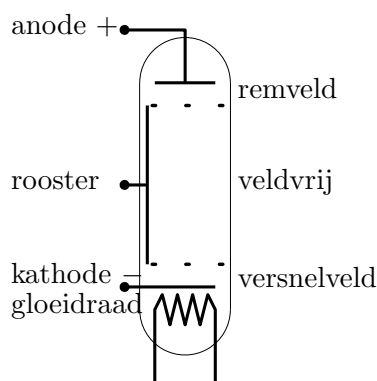
**Opg 1.2.7** \*\*\*\* Bereken het procentuele verlies aan kinetische energie van een  $\alpha$  deeltje (massagetal 4) dat centraal elastisch tegen een stilstaande kern met massagetal 200 botst. [Antw. 0,078]

### 1.3 Elektronwolk

In 1914 toonden Franck en Hertz aan dat de *elektronwolk* van de atomen bestond uit ‘schillen’ met elektronen van een *bepaalde* energie. Verder vonden ze dat de elektronen, door botsingen met elektronen of fotonen, naar een schil met hogere energie kunnen worden ‘aangeslagen’, waarna ze kunnen ‘terugvallen’ naar hun ‘oude schil’. Daarbij wordt een foton uitgezonden dat precies de ‘verschil’ impuls, impulsmoment en energie heeft. Hoe is tot deze conclusie te komen?

#### 1.3.1 Kwantisatie van de elektronenergie-verandering

**Proefopstelling** In een ouderwetse elektronen‘buis’ is een weinig kwikgas. Vanuit het gearde elektronenkanon, de kathode, worden elektronen de ‘ruimte’ ingeschoten en opgevangen op de anode. Echter, als een elektron voldoende wordt vertraagd—door botsingen met gasatomen—dan wordt het door een van de ‘roosters’ gevangen. Daarbij loopt de anodestroom ietsje terug. De bewegingsenergie van een versneld elektron is gelijk aan  $eV$  ( $V$  is de elektrische potentiaal ter plekke, bepaald door de anodespanning  $U_A$ ). Het elektron heeft daardoor maximaal een energie  $eU_A$  die het bij een botsing kan overdragen aan een gasatoom. Daarmee is er een verband tussen anodespanning en elektronenergie.



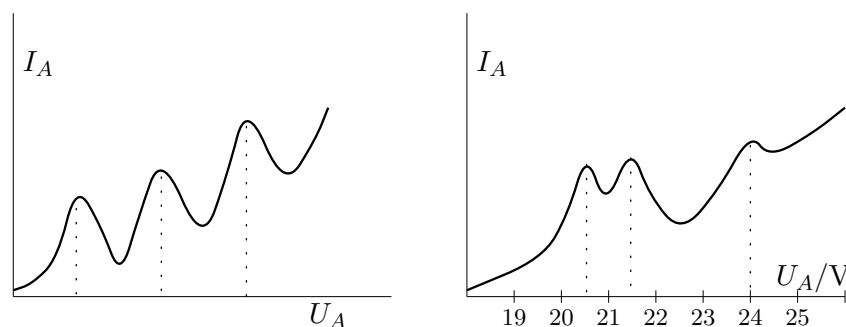
Figuur 1.4 Proef van Franck en Hertz met kwikgas. Elektronen die van de Kathode naar de Anode worden getrokken passeren een ‘rooster’ruimte. De Gas‘roosters’ worden bij voldoende snelheid gepasseerd; botst het elektron echter tegen een kwikatoom, dan verliest het zoveel snelheid dat het op het Gasrooster terecht komt en afvloeit

**Botsing elektron–gasatoom** Bij het botsen van een elektron op de elektronwolk van een gasatoom zijn er *twee* mogelijkheden:

1. de botsing is zonder bewegingsenergieverlies, *elastische botsing*;
2. bij de botsing neemt de elektronwolk bewegingsenergie op, *inelastische botsing*.

Bij een *inelastische* botsing is er bewegingsenergie verloren gegaan, en zal het elektron gemakkelijk door een rooster worden ‘gevangen’; uiteindelijk zullen veel van die langzame elektronen op een rooster terechtkomen,

ongeacht de grootte van de anodespanning  $U_A$ . Bij een *elastische* botsing, zal het (lichte) elektron worden afgebogen, maar een grote snelheid houden; daardoor is de kans dat het door een rooster wordt gevangen klein, tenzij de roosterspanning hoog is. Bijgevolg zal de anodestroom kleiner worden als er inelastische botsingen plaats vinden, en groter als er elastische botsingen zijn (zie fig. 1.5).



a Lange roosterruimte en veel gas leidt tot *meerdere* botsingen van hetzelfde elektron met gasatomen. De  $I$ -daling na de eerste (tweede..) top ontstaat door één (twee..) botsingen met dezelfde energieoverdracht aan het gas.

b Korte roosterruimte en minder gas leidt tot één botsing van een elektron met een gasatoom. De  $I$ -daling na de toppen ontstaat doordat een elektron bij een botsing zijn energie, steeds een andere, aan het gasatoom overdraagt.

Figuur 1.5 Anodestroom  $I_A$  als functie van de anodespanning  $U_A$  bij de proef van Franck en Hertz onder verschillende omstandigheden.

**Aanslaan van elektronen** Bij de uitvoering van de proef zien we dat de *anodestroom* inzakt bij bepaalde anodespanningen: het door het elektronenkanon versnelde elektron heeft juist zoveel energie, dat het één elektron uit de elektronwolk van een gasatoom kan aanslaan; **aanslaan** wil zeggen: een elektron uit de elektronwolk in een hogere energie-toestand brengen. Dat het aanslaan gebeurt bij *bepaalde* anodespanningen betekent dat elektronen in een elektronwolk slechts *bepaalde* energieën kunnen opnemen. We zeggen dan, dat de energieverandering van het elektron is **gekwantiseerd**. Het woord ‘kwant’ komt van het engelse ‘quantity’ = ‘hoeveelheid’. Overdracht van energie bij de botsing (van een versneld elektron met een elektron uit de elektronwolk) vindt alleen plaats als de bewegingsenergie van het aanbotsende elektron voldoende is om de *hogere* energietoestand te bereiken.

**Conclusie** *Elektronen in een elektronenwolk van een atoom kunnen bij een botsing met een deeltje (of een foton) een gekwantiseerde hoeveelheid energie opnemen, waardoor ze naar een hogere energietoestand worden aangeslagen.*

### 1.3.2 Kwantisatie van de elektronenergie

Welke energie kan een elektron uit de elektronwolk van een atoom precies hebben? Voor de beantwoording dienen we allereerst *alle mogelijke verschillen tussen de verschillende energietoestanden* in de elektronwolk te kennen. Uit de proef van Franck en Hertz kennen we een aantal van deze energieverschillen. Meer gedetailleerde en preciezere energieverschillen kunnen worden gevonden in de resultaten van al zeer oude proeven.

**Emissiespectrum** Al in 1850 is door Kirchhoff het zichtbare ‘lijnen’-spectrum van gloeiend waterstof gemeten. In 1885 wist Balmer daar een systeem in te ontdekken—later door Lyman en Paschen uitgebreid naar andere delen van het **emissiespectrum**. Het woord ‘emissie’ betekent ‘uitzending’, namelijk het uitzenden van licht door de gasatomen.

**Absorptiespectrum** Er is nog een andere manier om spectraallijnen te zien te krijgen. Laten we wit licht, dus met alle kleuren erin, door een *koud* gas gaan, dan blijkt dat bepaalde lijnen (dus kleuren) zijn verdwenen. Die lijnen vormen samen het **absorptie-spectrum**. Het *absorptie*-spectrum van licht dat door het *koude* gas is heengegaan bevat *dezelfde* lijnen als te zien zijn in het *emissie*-spectrum van het *hete* gas. Bij de absorptie is echter alles omgekeerd: er ontbreken kleuren in het spectrum op de plaats waar een gekleurde emissielijn te zien zou zijn geweest (zie fig. 1.6). Het woord ‘absorptie’ betekent ‘opslurping’, namelijk het opslurpen van het licht door de gasatomen.



Figuur 1.6 Absorptie en emissie spectrumlijnen in waterstofdamp. Een absorptielijn bij energie  $E$  (‘zwarte’ lijn in gekleurde achtergrond) ontstaat als een elektron een foton met energie  $E$  vangt; dat kan alleen als  $E$  ook het energieverschil tussen twee elektronniveaus is. Een emissielijn bij dezelfde energie  $E$  (‘gekleurde’ lijn in zwarte achtergrond) ontstaat doordat het aangeslagen elektron weer terugvalt.

**Proef verklaring** Voer de proef van Franck en Hertz uit met een buis die met een weinig Heliumgas is gevuld. Tegelijk met het afnemen van de anodestroom kunnen we dan zien dat er licht uit de buis komt. Dat komt hierdoor. Bij de botsing van een elektron met een gasatoom

neemt een elektron uit het atoom energie op uit de botsing. Een **atoom** waar een elektron in een hogere doorenergietoestand is noemen we een *aangeslagen atoom*. Een aangeslagen atoom heeft eigenlijk een te hoge energie—het is niet stabiel—en zal daarom even later de opgenomen energie weer afstaan in de vorm van *lichtenergie*. De extra energie wordt doorgegeven aan een lichtdeeltje, een **foton**.

**Foton energie** Bij de proef van Franck en Hertz kunnen we, tegelijk met het meten van de elektrische energie, ook de golflengte van het *geëmitteerde licht-foton* meten. Licht is een golfverschijnsel waarvan de golfsnelheid de lichtsnelheid heet; bij ISO *afspraken* is de **lichtsnelheid in vacuüm**  $c$  vastgesteld:

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Merk op, dat de eenheid van meter niet meer nodig is, maar afhankelijk van de eenheden van snelheid en van tijd (we leven nu dus in de tijd van het cskA stelsel). Voor ieder golfverschijnsel geldt dat het produkt van *golflengte*  $\lambda$  en *frequentie*  $f$  gelijk is aan de **golfsnelheid**  $v$ . In het bijzonder geldt voor licht:

$$\lambda f = c$$

Voor de frequentie  $f$  van een spectrumlijn volgt dan een waarde  $f = c/\lambda$ . Aan de andere kant weten we uit de proef van Franck en Hertz, dat bij bepaalde lijnen bepaalde energieën horen. Het blijkt dat er een evenredig verband is tussen **foton-energie**  $E$  en foton-frequentie  $f$ :

$$E = h f$$

**Constante van Planck** De evenredigheidsconstante  $h$  heet de **constante van Planck**. Deze is voor het eerst door Planck gebruikt bij zijn theorie van de temperatuurstraling. Door Einstein werd in 1905 het verband gelegd met de energie van het *foton*. De waarde van de constante van Planck is experimenteel:

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Voor het omrekenen van golflengte in m naar energie in eV gebruiken we de omrekeningsfactor

$$\frac{hc}{e} = 1,240 \cdot 10^{-6} \text{ Vm}$$

Immers:  $E = hf = hc/\lambda$ , geeft de omrekeningsfactor  $hc$  van 1/m naar J; voor de omzetting van J(oule) naar eV (elektron Volt), moet nog door de elementaire lading  $e$  worden gedeeld.

- Opg 1.3.1** \*\* De golflengte van de gele natriumlijn is 589,6 nm.
- a Bereken het energieverval van de twee betrokken niveaus in J en in eV. [Antw.  $\Delta E = 2,10 \text{ eV}$ ]
- b Welk potentiaalverschil zou een elektron minimaal moeten doorlopen om, bij botsing tegen een natriumatoom, het atoom in staat te stellen licht met een golflengte van 589,6 nm uit te zenden? [Antw.  $\Delta U = 2,1 \text{ V}$ ]
- Opg 1.3.2** \*\* Kwikatomen, die beschoten worden door elektronen met een kinetische energie van maximaal 4,86 eV, zenden straling uit met een golflengte van 253,7 nm. Controleer of hierbij voldaan is aan de wet van behoud van energie. [Antw.  $E_f = 4,88 \text{ eV}$ ]

### 1.3.3 Elektronenergie in waterstofatoom

**Spectraallijnen** Er zijn vele lijnenspectra gemeten van waterstofgas. Omdat iedere lijn uit het spectrum een bepaalde frequentie, dus energie, heeft weten we het energieverval tussen de daarbij behorende energieniveaus van elektronen in de elektronwolk van waterstof. In deze energieën zit systeem:

<i>'Lyman'</i> (onzichtbaar)	<i>'Balmer'</i> (zichtbaar)	<i>'Paschen'</i> (infrarood)
$\Delta E/e \text{ V}$	$\Delta E/e \text{ V}$	$\Delta E/e \text{ V}$
10,2	—	—
12,1	1,9	—
12,8	2,6	0,7
13,1	2,9	1,0
13,2	3,0	1,2
⋮	⋮	⋮
13,6	3,4	1,5

Tabel 1.1 In het lijnenspectrum van waterstof werd door respectievelijk Lyman, Balmer en Paschen een regelmaat ontdekt door naar de *energie* te kijken. Zo ontstonden de respectievelijke Fotonenergie reeksen. Merk op dat 'Balmer' wordt gevormd door van 'Lyman' 10,2 af te doen; evenzo volgt 'Paschen' uit 'Balmer'

Merk op, dat een getal van de Balmer reeks is te vinden als het *verschil* van getallen in de Lyman reeks. Als we van de Lyman reeks het bovenste getal (10,2) aftrekken vinden we de Balmer reeks. Op vergelijkbare wijze is de Paschen reeks te vinden uit de Balmer reeks. (Ga zelf na hoe). Daaruit concluderen we, dat de Lyman reeks *alle* informatie over de energieën van het elektron in een waterstofatoom bevat (zie tab. 1.1). Het geeft de energieën van het elektron in het waterstofatoom weer!

**Conclusie** *Het éne elektron in het waterstofatoom heeft gekwantiseerde energie toestanden, de elektron- energietoestanden. Een elektron kan naar een hogere energietoestand worden aangeslagen, mits wit een botsing energie wordt opgenomen gelijk aan het energieverval tussen de energietoestanden. Omgekeerd zal een aangeslagen elektron uit de hogere energietoestand kunnen terugvallen naar een lager energieniveau, mits het de verschilenergie kwijt kan door het uitzenden van een foton.*

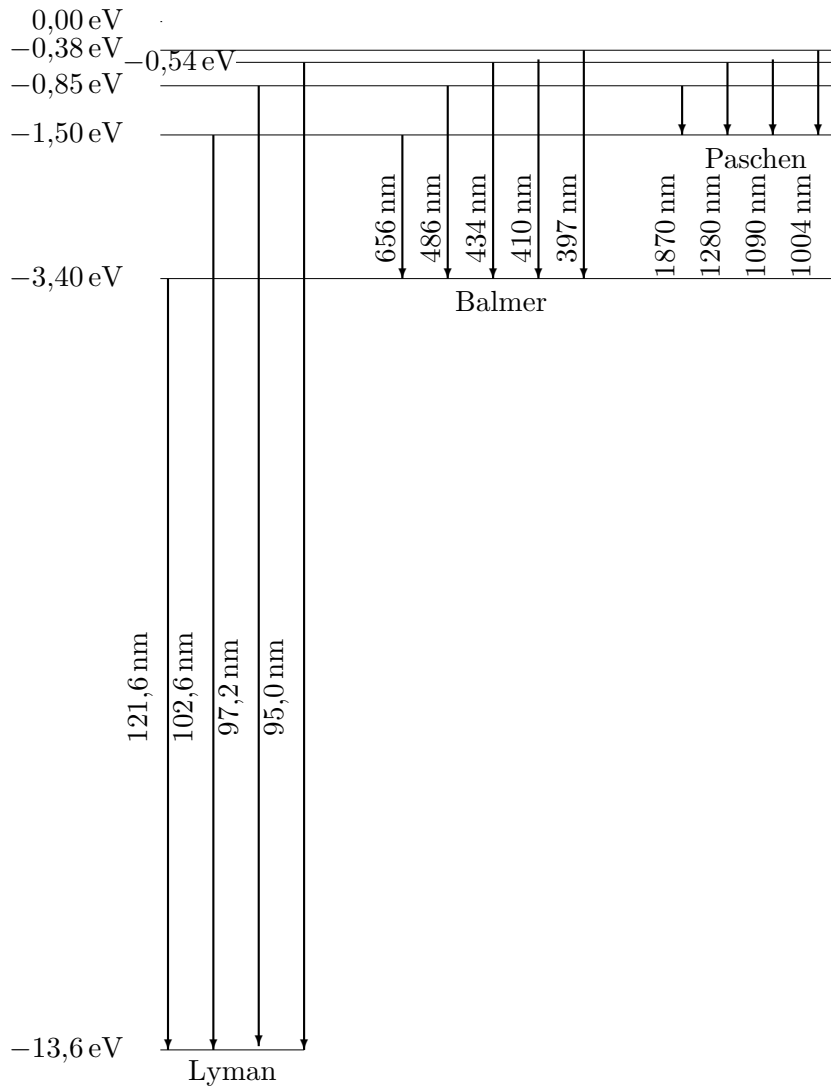
**Foton impuls en elementaire impulsmoment** Het *geëmitteerde* foton zal behalve energie ook impuls en impulsmoment meenemen. Dat wil zeggen, dat een foton naast zijn **foton-energie**  $E = hf$  een **foton-impuls**  $p$  heeft en een **foton-impulsmoment**  $L$ . Voor de foton-impuls geldt  $p = E/c = hf/c = h/\lambda$ . In tabel 1.2 zijn de verschillende golflengten behorend bij de verschillende emissie-fotonen aangegeven. Voor het foton-impulsmoment  $L$  geldt dat het gelijk is aan het **elementaire impulsmoment**  $\hbar$ :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Je ziet daaruit dat het impulsmoment *gekwantiseerd* is, zoals lading. Merk op, dat de eenheid van ‘h-streep’  $\hbar$  inderdaad die van een impulsmoment is: Js = (Nm)s = mNs = m(kgm/s<sup>2</sup>)s = mkg(m/s). Op de grootte het impulsmoment, en de relatie met de constante van Planck, komen we terug in de volgende paragraaf.

**Continue spectrum** De onderste energieën in tabel 1.1 zijn de ‘limieten’ van de lijnen die ‘oepenhopen’ in dat spectrum. Achter deze lijnen komt het *continue spectrum*: *alle hogere energieën zijn mogelijk*. Hoe verklaren we het mogelijk zijn van *willekeurige* energieën in dat deel van het spectrum? In het waterstofgas zullen tengevolge van de botsingen met de versnelde elektronen zeker ook elektronen van atomen worden gerukt: die atomen worden **geïoniseerd**. Als dat +ion een vrij –elektron ‘vangt’, zal dat een ‘willekeurige’ hoeveelheid bewegingsenergie hebben. De som van elektronenergie en bewegingsenergie—die willekeurig is—komt dan als fotonenergie vrij.

**Ionisatieenergie en elektronenergie** De limietwaarde van de lijnenenergie kan nu als volgt worden genterpreteerd. Het is nèt die energie die het elektron moet opnemen om van het atoom te worden losgemaakt. We zien dat de **ionisatie-energie** van waterstofgas in de grondtoestand



Tabel 1.2 Elektron energietoestanden (horizontale lijnen) en emissielijnen (verticale pijlen) van waterstof. Langs de emissielijnen staan de golflengten van het geëmitteerde foton. Links staat een energieschaal in eV



kennelijk is 13,6 eV (of 3,4 eV, of 1,5 eV enz., afhankelijk van het energie niveau van het geëmitteerde aangeslagen elektron). Het hoogste elektronenergie-niveau nadert tot de waarde waarbij het elektron bijna vrij is van het atoom. Een vrij elektron heeft energie nul, dus de hoogste elektronenergie is nul. De *elektronenergie* van waterstof voldoet aan de wet:

$$E_n = -\frac{C}{n^2}$$

met  $C = 13,6 \text{ eV}$  gelijk aan de ionisatie-energie. Het getal  $C/hc$  heet de Rydbergconstante  $R$  met waarde  $R = 1,097 \cdot 10^7 / \text{m}$ . De omgekeerde golflengte van de emissielijnen kan met de Rydbergconstante worden beschreven:  $1/\lambda = R\Delta(1/n^2)$ . Het getal  $n = 1, 2, 3, \dots$  wordt genoemd **hoofd-kwantumgetal**;  $n = 1$  geeft de **grondtoestand** voor het elektron, de andere waarden van  $n$  horen bij de **aangeslagen toestanden** van het elektron.

**Opg 1.3.3** \* De constante van Planck  $h$  is gelijk aan:

- A  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kgm}^2/\text{s}$
- B  $6,6 \cdot 10^{34} \text{ Js}$
- C  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J/s}$
- D  $6,6 \cdot 10^{34} \text{ VA}$

**Opg 1.3.4** \* Een bundel licht, samengesteld uit fotonen van vele energieën, valt door een waterstofgas. Er ontstaan alleen maar aangeslagen toestanden als:

- A de intensiteit van de bundel groot genoeg is
- B er foton energieën voorkomen die overeenkomen met de energie van het grondniveau van waterstof
- C er foton energieën voorkomen die overeenkomen met de energiever verschillen tussen de elektronbanen in waterstof
- D het waterstofgas niet te heet is

**Opg 1.3.5** \*\*\* Een denkbeeldig atoom heeft 4 elektron energie- niveaus met de energiewaarden resp 0, 2, 3 en 4 eV (grondniveau nul). Het aantal mogelijke emissielijnen in het spectrum is nu:

- A 3
- B 4
- C 5
- D 6

**Opg 1.3.6** \* Bij een botsing tussen een vrij elektron en een elektron dat gebonden is aan een atoom geldt:

- 1. wet van behoud van energie;
- 2. wet van behoud van impuls (hoeveelheid van beweging),
- A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar

- Opg 1.3.7** \*\* In de tabel op pagina 24 staat een vereenvoudigd schema van de energieniveaus van het elektron in het waterstofatoom (in eV). De niveaus zijn genummerd.  $n = 1$  stelt het grondniveau voor;  $n = 2$  het niveau van de eerste aangeslagen toestand; enz.
- a In welke toestand is het atoom voor  $n = \infty$ ? [Antw. geoniseerd;]
  - b Bereken de golflengte van de straling bij overgang van de derde *aangeslagen* toestand naar de eerste. [Antw.  $\lambda = 487$  nm]
  - c In welk gebied ligt de straling bij overgang van de eerste aangeslagen toestand naar de grondtoestand? [Antw. ultraviolet;]
  - d En bij overgang van hogere aangeslagen toestanden naar de grondtoestand? [Antw. UV]
  - e Zijn er overgangen waarbij infrarode straling wordt uitgezonden? Zo ja, welke bijvoorbeeld? [Antw.  $4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 4$ ]
  - f Men laat de straling uit vraag b. op een metaal vallen, waarvan de uittree-energie 2,6 eV bedraagt. Komen er elektronen vrij? Licht het antwoord toe. [Antw. nee, warmte;]

## 1.4 Waterstofatoom-model van Bohr

**Inleiding** In 1912 heeft Bohr een model ontwikkeld voor de ‘elektronwolk’ van een *waterstofatoom*(H). Dit wordt het **atoommodel van Bohr** genoemd. Dat is nogal ruim gezegd, daar het ‘slechts’ over één elektron rond één *proton* gaat, en geen informatie over de kern bevat. Het model komt hier op neer: het elektron beweegt rond de *kern* volgens de wetten van de **klassieke mechanica**—dus in een ellipsbaan met de kern in een van beide brandpunten—met één *extra voorwaarde*: het impulsmoment is een ‘veelvoud’ van het *elementaire impulsmoment*  $\hbar = h/2\pi$ . Door die **quantum-mechanica** beperking op de ‘draaiimpuls’ van de elektronen krijgt het elektron juist die energieën, die worden waargenomen in de gemeten emissiespectra; het model is realistisch!

**Planetenbanen** Dat een elektron rond een kern in een ellipsbaan moet lopen volgt uit de analogie met de beweging van *planeten rond de zon*. In dit geval worden de *massa-krachten* vervangen door *lading-krachten*. De zoveel sterkere *elektrische* krachten zijn de oorzaak van het enorme verschil in grootte tussen een planetenstelsel en een *atoom*. Daarnaast is er nog een wezenlijk verschil: planeetbanen kunnen *in principe* iedere grootte hebben, elektronbanen niet. Dat laatste uit zich erin dat elektron alleen door springen van baan kunnen veranderen.

### 1.4.1 Klassieke elektronbaan

**Krachten op elektron** We zullen een speciale baan uitwerken, namelijk de ronde ellips, de cirkel. De *kern* is het vaste punt, de oorsprong van het coördinatenstelsel (een goede benadering, omdat de kernmassa véél groter is dan de elektronmassa). Het elektron draait een cirkelbaan in het xy-vlak om de z-as op afstand  $r$  van de kern (zie fig. 1.4.1). Tussen twee ladingen  $Q_1$  en  $Q_2$  is er elektrische aantrekking, de radiaal gerichte **Coulombkracht**  $F_C$ :

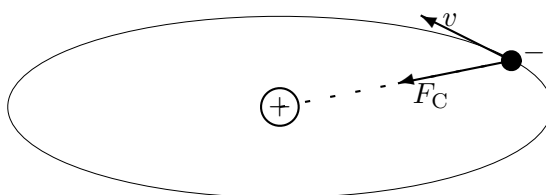
$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Deze kracht moet de **centripetale kracht** zijn die het elektron in zijn cirkelbaan rond de kern houdt; met  $Q_1 = -e$ , voor het elektron, en  $Q_2 = +e$ , voor het proton. De **centripetale versnelling**  $a_{cp}$  is gelijk aan  $a_{cp} = v_\phi^2/r$ . De **tangentiële snelheid**  $v_\phi$  is de snelheid ‘rakend’ aan de baan, bij een cirkelbaan gelijk is aan de snelheid  $v$ . Dus:

$$\begin{aligned} F_C &= F_{cp} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} &= m_e \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

Vat deze krachtvergelijking op als een vergelijking die de snelheid  $v$  uitdrukt in de afstand  $r$  tot de kern, met de constanten lading  $e$  en massa  $m_e$ :

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r}$$



Figuur 1.7 Kracht op het elektron dat rond de kern draait: de aantrekkende Coulombkracht  $F_C$  is de centripetale 'kracht'  $F_{cp}$  die het elektron in een cirkelbaan, met de kern als middelpunt, houdt (mits het voldoende snelheid heeft)

**Impulsmoment als bewegingsconstante** Bij draaien telt niet de hoeveelheid van beweging, de **impuls**  $p$ :  $\underline{p} = m\underline{v}$ , maar de hoeveelheid van draaibeweging, het **impulsmoment**  $\underline{L}$ :  $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$  (de arm van de impuls is de afstand tot de kern). Omdat er op het elektron alleen een Coulombkracht werkt, die naar de kern is gericht, is er géén *krachtmoment* dat de hoeveelheid van draaibeweging, het *impulsmoment*, kan doen veranderen. Daarom geldt de *behoudswet* van impulsmoment, er is **impulsmomentbehoud** tijdens het draaien:  $L_z$  is een **bewegingsconstante**. De impuls in de tangentiële richting is  $p_\phi$ , met  $p_\phi = mv_\phi$ ; bij de cirkelbeweging is  $v_\phi = v$ . In ons geval is de draaias de  $z$ -as—de as door de kern, loodrecht op het draaivlak. Dus het impulsmoment is  $L_z = rp_\phi = rmv_\phi$  (arm maal massa maal snelheid langs de cirkel). Omgekeerd kan de tangentiële snelheid  $v_\phi = v$  worden uitgedrukt in de afstand tot de kern  $r$ , waarbij de constanten zijn impulsmoment  $L_z$  en massa  $m_e$ :

$$v_\phi = \frac{L_z}{m_e r}$$

**Cirkelbeweging** Eerder verkregen we voor de cirkelbeweging, uit de krachtvergelijking, een uitdrukking voor het *kwadraat* van de snelheid  $v$ . Uit die twee vergelijkingen kunnen de twee variabelen  $v$  en  $r$  oplossen (want  $v_\phi = v$ ). Daarbij worden snelheid  $v$  en baanstraal  $r$  uitgedrukt in impulsmoment  $L_z$ , elementaire lading  $e$  en elektronmassa  $m_e$ . Reken

zelf na dat

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L_z}$$

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{L_z^2}{e^2 m_e}$$

Merk op, dat bij een kleiner impulsmoment een snellere draaiing op een kleinere cirkel hoort. Dat is precies zo als bij de planeetbanen: de planeet Mercurius draait het snelst en staat het dichtst bij de zon. De grote planeten draaien langzaam en hebben een grote baan.

**Opg 1.4.1** \* De dimensie van de eenheid van impulsmoment is:

- A  $\text{kg m s}^{-2}$
- B  $\text{N m s}^{-2}$
- C  $\text{kg m}^2/\text{s}$
- D  $\text{N m}^2/\text{s}$

**Opg 1.4.2** \*\*\* Ga na, dat wanneer het protonaantal van de kern  $Z$  zou zijn geweest—de lading van de kern is dan  $Ze$ , in plaats van  $e$ , en er was maar één elektron in de elektronenschil—dat dan de snelheid  $v$  een factor  $Z$  groter en de baanstraal  $r$  een factor  $Z$  kleiner zou zijn

**Elektronenergie** Er is nu een *bewegingsconstante*: de *totale energie* van het elektron. Die bewegingsconstante kan echter evenzeer worden uitgedrukt in de andere bewegingsconstante: het impulsmoment.

De **totale energie** bestaat uit twee gedeelten:

1. de *bewegingsenergie*  $E_k$ , die gelijk is aan de **draaienergie**  $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m_e v^2$
2. de elektrische **potentiële energie**  $E_p$ , die gelijk is aan de arbeid om het elektron in de baan rond de kern te brengen;

In ons geval heeft alleen het elektron bewegingsenergie in de vorm van draaienergie—die is hierboven praktisch al bepaald, daar de snelheid in constanten is uitgedrukt. Door invullen van die snelheid  $v$  vinden we de *draaienergie* (of rotatie-energie). De potentiële energie bezien we apart.

$$E_k = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L_z} \right)^2$$

**Potentiële energie** De potentiële energie is gelijk aan een arbeid. Die arbeid kan worden berekend, omdat de kracht bekend is, namelijk de Coulombkracht. Maar het kan eenvoudiger omdat een elektrische arbeid altijd kan worden uitgedrukt in een elektrische potentiaal (spanning). Immers, de *elektrische potentiaal*  $V$  van een elektrisch veld in een punt  $P$  is gedefinieerd met:

- de arbeid  $W$  die een uitwendige kracht *tegen het veld in* verricht om een *lading*  $Q$  vanaf het nulpotentiaalvlak tot in  $P$  met potentiaal  $V$  te brengen is:  $W = QV$ .

In dit geval is de benodigde potentiaal die van het veld van een bollading met lading  $+e$ ; die potentiaal is bekend: op afstand  $r$  van het midden van een bollading is

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+e}{r}$$

De potentiële energie  $E_p$  van het *elektron* (elektronlading  $-e$ ) in het *proton veld* wordt daarmee:

$$E_p = -eV(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Aan het negatieve teken van de potentiaal zien we dat het elektron naar de kern getrokken wordt—elektronen zoeken de hoogste potentiaal. Door nu de straal  $r$ , uitgedrukt in het impulsmoment, in te vullen vinden we de potentiële energie uitgedrukt in het impulsmoment:

$$E_p = -m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L_z} \right)^2$$

**Opg 1.4.3 \*\*\*** Ga na, dat als het protonaantal van de kern  $Z$  zou zijn geweest, dat dan de potentiële energie een factor  $Z^2$  groter zou zijn geweest

**Totale energie** De totale energie is de som van de negatieve elektrische potentiële energie en de positieve bewegingsenergie. Hoe verhouden die twee zich? Vergelijken we de vergelijkingen voor potentiële energie en bewegingsenergie dan blijkt dat de potentiële energie tegengesteld en dubbel zo groot is als de *draaienergie*—de enige bewegingsenergie:

$$E_p = -2E_{\text{rot}} \quad \text{elektron rond proton}$$

De potentiële energie wint, zodat ook de totale energie *negatief* is:

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{rot}} + E_p = -\frac{1}{2}m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L_z} \right)^2 \\ E &= -E_{\text{rot}} \end{aligned}$$

De *negatieve* waarde van de *totale* energie duidt erop, dat het elektron *gebonden* is aan het proton: de ‘aantrekkende’ potentiële energie is sterker dan de ‘afstotende’ draaienergie. Volgens deze klassieke theorie kan de energie *elke negatieve waarde* hebben, aangezien er geen beperking is

aan de waarden die het impulsmoment  $L$  van het elektron rond de kern kan hebben. Dat betekent tegelijk, dat de snelheid van het elektron onbepaald kan oplopen—naarmate de baan kleiner wordt, moet de snelheid omhoog om tot evenwicht van krachten te komen. We weten dat de snelheid niet boven de lichtsnelheid kan komen. Naarmate de snelheid groeit, zal ook de rustmassa  $m_e$  van het elektron toenemen volgens de relativiteitstheorie tot  $m = m_e/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Het is natuurlijk ondoenlijk om te laten zien tot welke correcties dat zou leiden, maar het is wel in te zien dat we daarmee het echte probleem niet kunnen oplossen.

**Conclusie** Volgens de klassieke theorie kunnen de straal van de cirkelbaan en de energie van het aan de kern gebonden elektron worden uitgedrukt in het impulsmoment:

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{L_z^2}{e^2 m_e} \quad E = -\frac{1}{2} m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{L_z} \right)^2$$

Afhankelijk van het impulsmoment kan de energie iedere negatieve waarde hebben. De energie bestaat uit een negatieve potentiële energie en een half zo grote draaienergie.

**Opg 1.4.4 \*\*\*** Ga na, dat als het protonaantal van de kern  $Z$  zou zijn geweest, dat dan de totale energie een factor  $Z^2$  groter zou zijn geweest

### 1.4.2 Gekwantiseerde klassieke elektronbaan

De conclusie die kan worden getrokken uit de waargenomen spectra is, dat de energie van een *elektron* in een atoom niet willekeurige waarden kan hebben, maar slechts gekwantiseerde, discrete waarden. We zagen hierboven dat—volgens de wetten van de klassieke mechanica—het elektron in cirkelbanen kan lopen waarvan de *straal*, afhankelijk van de energie, in principe *elke waarde* kan hebben. Dat is echter niet zo, dus moet er kennelijk een extra voorwaarde zijn waaraan het atoomsysteem moet voldoen.

**Impulsmoment kwantisatie volgens Bohr** Bohr stelde in 1912 dat het draaiimpulsmoment  $L$ ,  $L = m_e v r$ , van het elektron in het waterstofatoom een veelvoud is van het *elementaire impulsmoment*:

$$L = n\hbar \quad n = 1, 2, \dots$$

Zoals we hebben gezien, is het elementaire impulsmoment  $\hbar$  zéér klein; één impulsmoment kwant heeft de grootte  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  Js. Het verschil met de klassieke waarden, die ‘continu’ mogelijk zijn, is dan ook pas te zien als we zeer nauwkeurig waarnemen. Kennelijk gebeurt dat als we naar de spectra kijken!

**kwantumgetal** De grootheid  $n$  kan slechts de discrete waarden  $n=1, 2, 3, \dots$  hebben. Een **kwantumgetal** is een grootheid die slechts *gehele* getalwaarden kan hebben. Volgens Bohr geeft het hoofd-kwantumgetal  $n$  het aantal impulsmoment-*kwantum*  $\hbar$  weer. We laten nu zien, dat daarmee het probleem *voor het waterstof-atoom* is opgelost. Door de extra eis op het impulsmoment  $L$  kunnen de snelheid  $v$  en de baanstraal  $r$  van het elektron in een cirkelbaan uitgedrukt worden in het kwantumgetal  $n$ . Vullen we in  $L = L_z = n\hbar$ , dan worden snelheid  $v$  en baanstraal  $r$ :

$$v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{n} = \frac{v_0}{n}$$

$$r = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} n^2 = r_0 n^2$$

**Straal-kwantisatie** De evenredigheidsconstanten  $v_0$  en  $r_0$  zijn nu te berekenen, omdat alle elementaire eenheden bekend zijn (ook in 1912). In de grondtoestand  $n=1$  heeft het elektron de grootste snelheid  $v_0$  in de kleinste cirkelbaan van het atoom met straal  $r_0$ . De grootste snelheid  $v_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} = 2,188 \cdot 10^6$  m/s is nog geen honderdste van de lichtsnelheid. De kleinste straal  $r_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} = 0,5292 \cdot 10^{-10}$  m heet de **Bohrstraal**  $r_0$ .

Wordt het elektron aangeslagen vanuit de grondtoestand, dan gaat het naar een baan met een straal die 4 keer, 9 keer, 16 keer, enz zo groot is als de Bohr-straal. De straal van de elektronbaan neemt kwadratisch toe met het kwantumgetal  $n$ . Het is duidelijk, dat een aangeslagen elektron nauwelijks meer is gebonden aan de kern—vanwege de grote afstand.

**Energie-kwantisatie** De energie van het elektron in de cirkelbanen vinden we, net als hierboven, door het invullen van  $L_z = n\hbar$  in de vergelijking voor de energie uitgedrukt in het impulsmoment:

$$E = -\frac{1}{2} m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2} = \frac{E_0}{n^2}$$

Merk op, dat het kwantumgetal  $n$  niet lager dan 1 kan zijn: delen door nul kan nu eenmaal niet! Deze uitdrukking voor de energie van het elektron in het waterstofatoom is geheel gelijk aan de uitdrukking die door Lyman, Rydberg, enz werd verkregen na het bestuderen van het emissiespectrum van waterstof (zie tab. 1.2)! In feite heeft Bohr de gemeten Rydberg constante  $R$  als eerste juist berekend uit de getallen  $h$ ,  $e$  en  $m_e$ .



**Ionisatieenergie** De energie van het elektron in de kleinste cirkelbaan, dus de **grondtoestand-energie**  $E_0$ , heeft de waarde:

$$E_0 = -\frac{1}{2}m_e \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar} \right)^2 = -13,6 \text{ eV}$$

Dit is de laagst mogelijke elektronenergie. Zoals we eerder opmerkten heeft  $C = -E_0$  een bijzondere betekenis: een elektron met de laagst mogelijke energie,  $E_0$ , heeft de energie  $-E_0$  extra nodig om los te komen van de kern. Immers, dan is de totale energie 0 en het elektron is ‘op oneindig grote afstand’ van de kern gekomen: het elektron is los gekomen van de kern en het atoom is *geïoniseerd*. De *ionisatie-energie* van een waterstofatoom is dus 13,6 eV.

**Conclusie** *In het waterstofatoom-model van Bohr wordt de toestand bepaald door het hoofd-kwantumgetal  $n = 1, 2, \dots$ . De straal van de cirkelbaan en de energie van het elektron zijn dan:*

$$r = n^2 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad E = -\frac{13,6}{n^2} \text{ eV}$$

*In de grondtoestand is de atoomdiameter 0,106 nm en de energie  $-13,6$  eV. In de aangeslagene toestand neemt de straal kwadratisch toe met  $n$  en de energie kwadratisch af met  $n$ . De ionisatie-energie 13,6 eV en de spectraallijnen worden nauwkeurig verklaard.*

**Voorbeeld spectraallijnen H** Bepaal de kleinste golflengte van de spectraallijnen van H die overeenkomen met het terugvallen van een aangeslagen toestand naar de grondtoestand.

Allereerst merken we op dat in de grondtoestand  $n = 1$  en  $E = E_0 = -13,6$  eV. In de aangeslagen toestand  $n$  is  $E = -13,6/n^2$  eV. Het energieverval tussen de aangeslagen toestand en de grondtoestand  $\Delta E = E - E_0 = (1 - 1/n^2)13,6$  eV wordt in fotonenergie omgezet. De kleinste golflengte komt overeen met de grootste fotonenergie, dus de kleinste  $n = 2$  (eerste aangeslagen toestand). Dus  $\Delta E = \frac{3}{4}13,6 \text{ eV} = 10,2 \text{ eV}$ . Met de omzettingfactor van eV naar 1/m vinden we de golflengte  $\lambda = 1,24 \cdot 10^{-6} / 10,2 = 122 \text{ nm}$ .

**Opg 1.4.5** \* De eenheid van energie  $J$  kan worden uitgedrukt in een aantal eV. Dat aantal is:

- A  $0,624 \cdot 10^{-19}$
- B  $1,60 \cdot 10^{-19}$
- C  $0,624 \cdot 10^{+19}$
- D  $1,60 \cdot 10^{19}$

**Opg 1.4.6** \* De Bohr-straal is de straal van een waterstofatoom voorgesteld als een kern met een elektron in een baan met hoofd-kwantumgetal:

- A  $n = 0$
- B  $n = 1$
- C  $n = \infty$

**Opg 1.4.7** \*\* Bereken de golflengte van de straling van een waterstofatoom bij de overgang van de tweede naar de eerste aangeslagen toestand, uitgaande van de ionisatie-energie van waterstof 13,6 eV. [Antw.  $\lambda = 656$  nm]

**Opg 1.4.8** \*\*\* Uit de ionisatie-energie 13,6 eV van waterstof volgt, volgens het atoommodel van Bohr, dat die van  $\text{Li}^{++}$  is:

- A 13,6 eV
- B 30,6 eV
- C 40,8 eV
- D 122,4 eV

**Opg 1.4.9** \*\* Het eenmaal geïoniseerde heliumatoom,  $\text{He}^+$ , kan zich in verschillende energietoestanden bevinden. In de laagste energietoestand, de grondtoestand van  $\text{He}^+$ , is de totale energie  $E$  van het ion  $-54,4$  eV; het elektron beweegt zich dan relatief dicht bij de kern. In de toestand met totale energie  $E = 0$  is het elektron oneindig ver van de kern verwijderd en in rust. In de figuur is een aantal energietoestanden van  $\text{He}^+$  aangegeven. De grootte van  $E$  is in eV uitgedrukt.

- a Leid af hoe groot de verhouding is van de absolute waarden van bewegingsenergie en potentiële energie van het elektron van  $\text{He}^+$  als het een cirkelbaan om de heliumkern beschrijft. [Antw.  $E_{\text{rot}}/E_{\text{p}} = -\frac{1}{2}$ ]
- b Hoe groot is de potentiële energie en hoe groot de kinetische energie van het elektron als dit zich in de grondtoestand bevindt, aannemende dat ook in de grondtoestand het elektron een cirkelbaan om de heliumkern doorloopt? (geen golftheorie). [Antw.  $E_{\text{pot}} = -108,8$  eV]
- c Hoeveel energie is ten minste nodig om  $\text{He}^+$ , dat zich in grondtoestand bevindt, te ioniseren? [Antw.  $\Delta E = 54,4$  eV]
- d Bereken hoeveel eV het energieverval tussen twee energieniveaus moet zijn, opdat licht met een golflengte van  $4,0 \cdot 10^2$  nm uitgezonden kan worden. [Antw.  $\Delta E = 3,10$  eV]
- e Bereken de golflengte(n) van de spectraallijn(en) die in het zichtbare gebied, tussen 400 nm en 800 nm, kan (kunnen) optreden, als alleen met de gegeven energieniveaus rekening wordt gehouden. [Antw.  $\lambda = 564$  nm ;  $\lambda = 477$  nm]

## 1.5 Het golfmodel

### 1.5.1 Inleiding

Alhoewel Bohr het waterstofspectrum met zijn model heeft verklaard, zijn er toch twee onopgeloste problemen:

1. hoe moet het model worden aangepast voor ingewikkelder elektronbanen en voor andere atomen—met veel elektronen;
2. hoe is de voorwaarde op het impulsmoment te verklaren.

Bohr zelf heeft geprobeerd het eerste probleem op te lossen, en slaagde daar gedeeltelijk in. In het bijzonder werd het probleem van de echte ellipsbanen opgelost—en de eis op het impulsmoment ‘bijgesteld’. Toch was dat niet bevredigend. Pas met de inzichten van de Broglie, in 1923, over het golfkarakter van materie-deeltjes, konden deze problemen worden opgelost. Dat leidde, via de *matrix-mechanica* van Heisenberg (1925), de *golfmechanica* van Schrödinger (1926) tot de *toestanden-mechanica* van Pauli (1930); alles onder de naam *quantum-mechanica*.

Wij zullen laten zien, dat het bestaan van kwantumgetallen het gevolg is van het golfkarakter van materie—dat bestaat naast het deeltjekarakter van materie. In het bijzonder zullen we de kwantumgetallen, die van belang zijn voor de elektrontoestanden van atomen, bespreken. Voor het begrijpen van ingewikkelder systemen—zoals atomen met meerdere elektronen in de elektronenschil—is nóg een extra voorwaarde nodig, die volgt uit de algemene toestanden-mechanica: het *Pauli-principe*. Met het quantum-principe plus het Pauli-principe kunnen de elektrontoestanden in atomen, en daarmee de opbouw van het *periodiek systeem* van elementen, worden verklaard.

### 1.5.2 Deeltje en Golf

**Licht als golf** In het verleden werd licht meestal opgevat als een licht*golf*. Daarmee kon, zoals Huygens aantoonde, prachtig worden verklaard waarom licht door materie-overgangen werd gebroken, of zelfs dubbel-gebroken zoals in kalkspaat en verwante stoffen. Vooral de beroemde verklaring van interferentiepatronen, die ontstaan als licht door smalle spleten valt, deed iedereen geloven in het *golfkarakter* van licht. Maar later bleken er andere verschijnselen te zijn die niet konden worden verklaard als licht als golf werd opgevat. Bijvoorbeeld, hoe moesten de emissie- en absorptie-spectra van atomen in een gas met een golftheorie worden verklaard? Daarbij bleek licht arbeid te kunnen verrichten en stoten te kunnen geven.

**Licht als deeltje** Het was reeds de opvatting van Newton dat licht kon worden opgevat als een licht*foton*. Het lichtdeeltje, het foton, moest dus eigenschappen hebben als *energie, impuls en impulsmoment* die horen bij een *deeltjekarakter*. Ook het zogenaamde foto-elektrische effect, waarbij licht elektronen uit een geleider weet los te maken, wijst in dezelfde richting, zoals Einstein liet zien. Maar toch konden andere verschijnselen, zoals interferentie, daarmee niet worden verklaard. Welke theorie was juist: was licht nu een golf of waren het fotonen?

### 1.5.3 Van golf naar deeltje

**Dualiteit van golf en deeltje** Dat we een verschijnsel bij dezelfde materie soms als golf moeten beschrijven, en soms als deeltje, noemen we de **dualiteit** van golf en deeltje. De Broglie bedacht: *ieder deeltje heeft een golfkarakter*, en omgekeerd of *duaal*, *ieder golfveld heeft een deeltjekarakter*. Materie kunnen we dus op twee manieren beschrijven:

**deeltje:** materie heeft energie  $E$ , impuls  $p$  en impulsmoment  $L$ ;

**golf:** materie heeft frequentie  $f$ , golflengte  $\lambda$  en *polarisatie*.

Het probleem is om aan te geven welke deeltje-eigenschappen horen bij welke golfeigenschappen—en omgekeerd. De Broglie vond de oplossing door eerst goed te kijken naar wat bekend was over *licht*.

**Energie, massa en frequentie** Door het werk van Planck en Einstein (1905) is bekend, dat licht met *golffrequentie*  $f$  een *deeltje-energie*  $E$  heeft, en dat er tussen die twee een direct verband is:

$$E = hf$$

Aan de *linker*=deeltjekant van deze vergelijking kunnen we de energie  $E$  uitdrukken in een *massa*  $m$  dankzij het '*relativistische*' werk van Einstein (1905). Hij vond de beroemde **massa-energie wet** voor een deeltjes met massa  $m$ :

$$E = mc^2$$

De '*fotonmassa*'  $m$  kan worden uitgedrukt in energie of lichtfrequentie:

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$$

**Impuls en golflengte** Er is niet alleen een verband tussen deeltje-energie en golf-frequentie, maar ook tussen *deeltje*-impuls en *golf*-lengte. De *impuls*  $p$  is massa maal snelheid. Voor licht, dat met de lichtsnelheid  $c$  gaat, geldt dus voor de **foton-impuls**  $p$ :

$$p = mc$$

Invullen van de fotonmassa  $m$  in de impuls levert op:  $p = (hf/c^2)c = hf/c$ . Het verband tussen frequentie en golflengte bij een lichtgolf is  $f\lambda = c$ . Daarmee kan de *impuls*  $p$  in de golflengte worden uitgedrukt:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{of} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Zoals de Broglie veronderstelde(1924), blijkt deze vergelijking te gelden voor *alle* materie—deeltje of golf. Dus niet alleen voor licht, maar ook voor elektronen, zoals Davisson en Germer daadwerkelijk vonden (1927).

**Conclusie** Voor *alle* materie geldt dat de energie  $E$  is gekoppeld aan een deeltjemassa  $m$  en een golf-frequentie  $f$ :

$$E = mc^2 = hf$$

Verder is de impuls  $p$  gekoppeld aan een deeltjesnelheid  $v$  en een golflengte  $\lambda$ :

$$p = mv = \frac{h}{\lambda}$$

Opgemerkt kan worden dat massa en snelheid uit de verschillende vergelijkingen kunnen worden geëlimineerd, ten gunste van de *rustmassa*  $m_0$  en de constanten  $c$  en  $h$ , zodat energie en impuls, resp. frequentie en golflengte, zijn ‘gekoppeld’. De fundamentele materie vergelijking wordt dan, voor deeltje of golf :

$$E^2 - (pc)^2 = (m_0c^2)^2 \quad \text{of} \quad f^2 - (c/\lambda)^2 = (m_0c^2/h)^2$$

Merk op, dat de bekende golfvergelijking  $f = c/\lambda$  nog wel voor rust-massaloze deeltjes, zoals fotonen, geldt, maar niet voor elektronen.

**Opg 1.5.1** \* De golfeigenschappen van een atomair deeltje uiten zich vooral in:

- A Het hebben van een massa
- B het hebben van interferentie
- C het hebben van een impuls
- D het hebben van een impulsmoment

**Opg 1.5.2** \* De deeltje-eigenschappen van een atomair deeltje uiten zich vooral in:

- A het hebben van interferentie
- B het hebben van golfamplitude
- C het hebben van impuls
- D het hebben van een de Broglie-golflengte

**Impulsmoment en draaiperiode** We kunnen de vergelijking  $E = hf$  iets anders lezen. Druk de frequentie  $f$  uit in de periodetijd  $T$  met  $f = 1/T$ ; de *energie van het foton* is dan:

$$E = \frac{h}{T}$$

Daarmee heeft de vergelijking voor *energie* een sterke overeenkomst gekregen met die voor *impuls*:

- Om de **energie** te vinden delen we  $h$  door de **periodetijd**  $T$  (na die tijd is de golf weer hetzelfde);
- Om de **impuls** te vinden delen we  $h$  door de **lengteperiode**  $\lambda$  (die afstand verder is de golf hetzelfde).

Bezie de laatste twee regels eens met in het achterhoofd de volgende algemene eigenschappen van de materie grootheden  $E$ ,  $p$  en  $L$ :

1. de *energie*  $E$  bepaalt veranderingen *in de tijd*  $t$  (zonder energie gebeurt er niks);
2. de *impuls*  $p$  bepaalt veranderingen *door verplaatsen* met  $x$  (zonder impuls *verplaats* er niks);
3. het *impulsmoment*  $L$  bepaalt veranderingen door *draaien* over een hoek  $\phi$  (zonder impulsmoment *draait* er niks).

Als er vergelijkbare regels zijn voor energie, impuls en *impulsmoment* voor wat betreft de ruimtelijke eigenschappen, dan is het denkbaar dat er ook vergelijkbare regels moeten zijn voor wat betreft hun kwantisatie.

**Impulsmoment kwantisatie** Volgens de laatste ‘analogie’ gedachte zal moeten gelden:

- Om het **impulsmoment** te vinden delen we  $h$  door de **draaiperiode**  $\phi$  (na die draaiing is de golf hetzelfde).

$$L_z = \frac{h}{\phi}$$

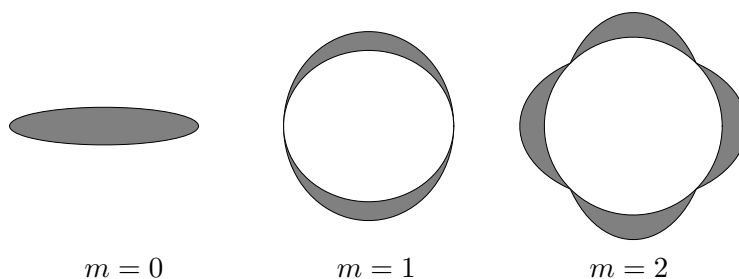
Pas de redenering voor de kwantisatie van het impulsmoment toe op het elektron in een cirkelbaan rond de kern. Dat elektron is een golf die ‘op en neer’ trilt, waarbij de toppen en dalen bij het rondgaan op de cirkel precies passen. Als er bijvoorbeeld twee golflengten op de cirkel

staan, dan is de golf 180 graden verder precies gelijk: er is dan een zogenaamde tweevoudige draaias (omdat tweemaal 180 weer rond is). In het algemeen blijft bij een golf met een *m-voudige draaias* de golf gelijk als we draaien over de draaiperiode, de hoek  $\phi = 2\pi/m$ . Invullen in het *impulsmoment*  $L_z$  geeft precies de voorwaarde van Bohr(!):

$$L_z = \frac{h}{2\pi/m} = m \frac{h}{2\pi} = m\hbar$$

#### 1.5.4 Elektron en golf

We hebben de (kwantisatie) eis aan het impulsmoment aangetoond.



Figuur 1.8 Klassieke golfvoorstelling van een elektron in een baan rond de kern, met het aantal golflengten als parameter. Bij de grondtoestand  $m = 0$  is er geen cirkel, dus geen draaiing mogelijk. Bij  $m = 1$  kan de golf in één trilling rond, en bij  $m = 2$  in twee trillingen.

Maar we gaan nog een stap verder. We zullen aantonen dat, *binnen* het waterstof-atoommodel van Bohr, de eis aan het impulsmoment volgt uit de eerder genoemde eis aan de impuls. Wanneer een elektron in een cirkelbaan rond het proton loopt, dan is het tegelijk een golf die rondloopt over een cirkel (zie fig. 1.8). Die golf moet dan wel precies op de baan ‘passen’; de omtrek van de cirkel  $2\pi r$  moet precies een geheel aantal  $m$  keer de golflengte  $\lambda$  zijn. Dus moet er gelden

$$2\pi r = m\lambda \quad \text{of} \quad r = \frac{m\lambda}{2\pi}$$

Daarmee is de baanstraal  $r$  uitgedrukt in de golflengte  $\lambda$ . In 1923 bedacht de Broglie (zie hiervoor): de impuls  $p$  van het deeltje is omgekeerd evenredig met de golflengte  $\lambda$  volgens  $p = h/\lambda$ . Wat voor gevolgen heeft dat voor het impulsmoment van het elektron in de cirkelbaan?

$$L_z = rp = \frac{m\lambda}{2\pi} \frac{h}{\lambda} = m\hbar$$

Het golfkarakter van het elektron heeft de voorwaarde van Bohr op het impulsmoment afgedwongen! Zou namelijk niet aan de voorwaarde zijn voldaan geweest, dan zou het elektron als golf zichzelf hebben *uitgeïnterfereerd*.

**Conclusie** *Uit het golfmodel voor een elektron in een cirkelbaan volgt de voorwaarde van Bohr voor de kwantisatie van het impulsmoment. Meer algemeen volgt de kwantisatie van het impulsmoment in de richting van de draaias uit de mogelijke draaiperiodes rond die draaias; met  $L_z$  het impulsmoment langs de draaias en  $m$  het aantal draaiperiodes wordt de kwantisatieregel:*

$$L_z = m \hbar$$

**Voorbeeld Elektron als golf** Bepaal voor een elektron de orde van grootte van de golfeigenschappen; in het bijzonder:

1. de frequentie uit de massa  $m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$  kg;
2. de golflengte als de snelheid  $10^3$  km/s is;
3. de draaihoek als de baan een cirkel met straal 1 cm is.

1. Uit de massa van het elektron  $m_e = 10^{-30}$  kg en de lichtsnelheid  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s vinden we een energie  $E = mc^2 = 10^{-13}$  J. Daaruit berekenen we een frequentie  $f = E/h = 10^{20}$  /s;
2. Als de snelheid van een elektron  $10^6$  m/s is, wordt, wegens de geringe massa, de impuls  $p = mv = 10^{-24}$  kgm/s. Daaruit berekenen we een golflengte  $\lambda = h/p = 10^{-9}$  m. *Atoomafstanden worden in nanometers uitgedrukt;*
3. Vanwege de baanstraal  $r = 10^{-2}$  m is het impulsmoment  $L = rp = 10^{-26}$  Js. Daaruit berekenen we een draaihoek  $\phi = h/L = 10^{-7}$  rad. Het daarbij behorende aantal draaiingen om rond te komen is  $m = 2\pi/\phi = 10^8$ .

Merk op, dat bij een proton de golflengte, door zijn  $10^3$  grotere massa, bij dezelfde snelheid nog eens een factor  $10^3$  kleiner is. *Kernafstanden worden in femtometers  $10^{-15}$  m uitgedrukt.*

**Voorbeeld Elektronstraal** Bepaal de golflengte van een elektronenstraal die versneld is met 100 kV.

Probleem is de verzwaring van het elektron door de hoge snelheid. De versnelspanning is omgezet in 100 keV bewegingsenergie door verzwaring van het elektron:

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$$

Dus  $m - m_0 = 100 \cdot 10^3 e/c^2$ , of, relatief  $(m - m_0)/m_0 = 10^5 e/m_0c^2$ . De (rust)energie van een elektron  $E_0 = m_0c^2 = 9,110 \cdot 10^{-30} (2,998 \cdot 10^8)^2 =$



$8,187 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 5,110 \text{ MeV}$ . Daaruit vinden we de relatieve massaverzwa-  
ring als  $(m - m_0)/m_0 = 10^5 e / 5,110 \cdot 10^6 e = 0,01957$ . Daarmee wordt de  
massa berekend als  $m = 1,01957 m_0 = 9,288 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ .

De verzwaring hangt rechtstreeks samen met de snelheid door:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Daaruit volgt voor de snelheid  $1/\sqrt{1 - (v/c)^2} = m/m_0 = 1 + (m - m_0)/m_0 = 1,01957$ , oftewel  $v/c = 0,4087$  en  $v = 1,225 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

Uit massa en snelheid volgt de impuls, en daaruit de golflengte. De imp-  
uls is  $p = mv = 9,288 \cdot 10^{-30} \cdot 1,225 \cdot 10^8 = 1,138 \cdot 10^{-21} \text{ kgm/s}$ . De golf-  
lengte van de elektronenstraal is  $\lambda = h/p = 6,626 \cdot 10^{-34} / 1,138 \cdot 10^{-21} = 5,823 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ .

Vraag: "Waarom merken wij mensen zo weinig van het golfkarakter,  
en zien we meestal het deeltjekarakter?". Dat komt omdat meestal de  
golflengte heel klein is—dus niet op menselijke schaal is.

**Opg 1.5.3 \*\*** Bereken de golflengte van een kogeltje van 1 mg met een snelheid van  
resp. 1 m/s; 1 km/s; 1 Mm/s.

[Antw.  $\lambda = 6,63 \cdot 10^{-28} \text{ m}$ ;  $6,63 \cdot 10^{-31} \text{ m}$ ;  $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ m}$ ]

**Opg 1.5.4** Bereken de golflengte van een elektron met bewegingsenergie van respec-  
tiefelijk:

a \*\* 10 eV; 10 keV [Antw.  $\lambda = 3,88 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ;  $1,23 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ ]

b \*\*\*\* 1 MeV, waarbij éérs de snelheid moet worden berekend.  
[Antw. relativistisch  $\lambda = 6,20 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ ]

**Opg 1.5.5 \*** Voor het impulsmoment geldt  $L = rmv$ ; daarin zijn  $m$  resp.  $v$ :

- A een golfkwantumgetal resp. de elektronsnelheid
- B de elektronmassa resp. de elektronsnelheid
- C een golfkwantumgetal resp. de golfsnelheid
- D de elektronmassa resp. de golfsnelheid

**Opg 1.5.6 \*** De betrekking waarmee de Broglie het golfkarakter van de materie aan-  
geeft luidt:

- A  $p = mv$
- B  $\lambda = h/p$
- C  $L = rp$
- D  $L = \hbar m$

**Opg 1.5.7 \*\*\*** Een deeltje toont zijn golfkarakter duidelijker als:

- A de rustmassa klein is en de snelheid klein is
- B de rustmassa groot is en de snelheid klein is
- C de rustmassa klein is en de snelheid groot is
- D de rustmassa groot is en de snelheid groot is

## 1.6 Golfmodel voor atomen

**Inleiding** Het atoommodel van Bohr heeft het waterstofatoom goed beschreven. Maar hoe moeten we ingewikkelde atomen beschrijven? Het blijkt dat het in paragraaf 1.5 beschreven golfmodel die vraag kan beantwoorden. We zullen echter niet toe kunnen met het ene kwantumgetal van Bohr, het hoofdkwantumgetal  $n$ . Omdat de atomen ingewikkelder zijn—met verschillende elektronen in de elektronwolk—zullen we met nog andere kwantumgetallen te doen krijgen. We moeten ons nu realiseren, dat er naast cirkelbanen ook ellipsbanen—en nog ingewikkelder bewegingen—mogelijk zijn. Daarom bekijken we de bewegingsconstanten en de bijbehorende kwantumgetallen opnieuw: nu voor willekeurige elektronenbanen in willekeurige atomen.

**Hoofdkwantumgetal en energie** In het atoommodel van Bohr is er slechts één kwantumgetal, het *hoofdkwantumgetal*  $n$ . Op de keper beschouwd blijkt dat er eigenlijk twee samenvallende kwantumgetallen zijn: het eigenlijke kwantumgetal  $m$  voor het impulsmoment, dat het draaien om de kern bepaalt, en het hoofdkwantumgetal  $n$  voor de totale energie. Maar in het speciale geval van de cirkelbaan kan de energie worden uitgedrukt in het impulsmoment. Bij ingewikkelder atomen zullen we de (totale) energie van een *elektrontoestand* evengoed beschrijven met het hoofdkwantumgetal  $n$ . De totale energie zal niet meer omgekeerd kwadratisch met  $n$  zijn, maar in principe kan de totale energie in  $n$  worden uitgedrukt:

$$E = E(n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \infty$$

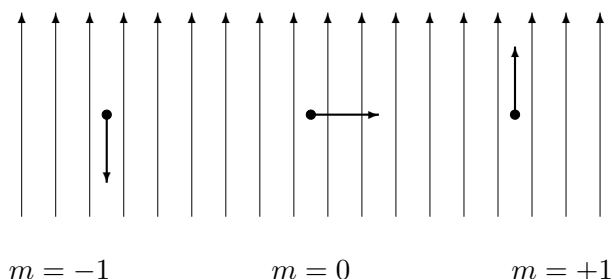
De grondtoestand wordt bepaald door  $n = 1$ . Omdat elektronen gebonden zijn zal  $E(n) < 0$  zijn.

### 1.6.1 Magnetische kwantumgetal

**Magnetischkwantumgetal** De quantum-voorwaarde voor het impulsmoment blijkt slechts te gelden voor de *component*  $L_z$  langs het *magnetische veld*:

$$L_z = m\hbar \quad m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$$

In overeenstemming met een algemeen aanvaarde gewoonte nemen we de  $z$ -as, de **magnetische as**, langs de richting van het magnetische veld (waarin het atoom zich bevindt). Voor het kwantumgetal van de component van het impulsmoment langs het magnetische veld is ‘ $m$ ’ gekozen, en niet ‘ $n$ ’ (die zal blijken een andere betekenis te hebben). Men noemt



Figuur 1.9 Voorstelling van een elektronbaan in een magnetisch veld met behulp van de impulsmomentvector  $L$  (vgl fig.1.8). Verschillend is slechts de component van  $L$  in de magnetische veldrichting, gekarakteriseerd door het magnetische kwantumgetal  $m$ .

zo  $m$  het **magnetischkwantumgetal** (omdat de  $z$ -richting langs het magnetische veld is, zie fig. 1.8). Merk op, dat we hier ook *negatieve waarden* voor het magnetischkwantumgetal  $m$  hebben; dat betekent, dat langs de  $z$ -as niet alleen in de *positieve draairichting (linksom)*, maar ook in de *negatieve draairichting(rechtsom)* kan worden gedraaid.

**Magnetische as** Waarom hebben we bij een atoom een *magnetisch veld*? Het magnetische veld werd ontdekt door Zeeman (1896) bij de bestudering van de spectra van atomen in een magneetveld. Een elektron dat in een baan ronddraait, is een elektrische lading die in een kring ‘stroomt’. Nu is een kring-stroompje op te vatten als een magneetje, waarvan de richting langs de draaias valt. De draaias valt samen met de richting van het impulsmoment. Er is zo een koppeling tussen het impulsmoment van het elektron en een (uitwendig) magnetisch veld. Maar er is meer: later is gebleken dat in de kern van het atoom neutronen zitten die zelf kleine magneetjes zijn: de elektronen bewegen altijd in het magnetische veld van de kern.

**Bolvorm atoom** In het model van Bohr is een waterstofatoom eigenlijk plat: de baan is immers een cirkel, of hooguit een ellips. In het golfmodel kan dat niet meer. Er is immers geen enkele reden voor een golf om alleen in het  $xy$ -vlak te blijven—denk aan het principe van Huygens, waarbij ieder punt van een golf front een nieuwe trillingsbron wordt. Het golfkarakter zorgt er voor, dat het *atoom* ‘bolvormig’ wordt. Doordat het elektron nu ook buiten het  $xy$ -vlak kan komen, zal het ook kunnen draaien rond andere assen dan de  $z$ -as. Maar dan zal er ook impulsmoment zijn dat niet in de  $z$ -richting is. Het totale impulsmoment  $\underline{L}$  is een vector met in het algemeen drie componenten; bijvoorbeeld  $L_x, L_y$ , en  $L_z$ .

### 1.6.2 Impulsmomentkwantumgetal

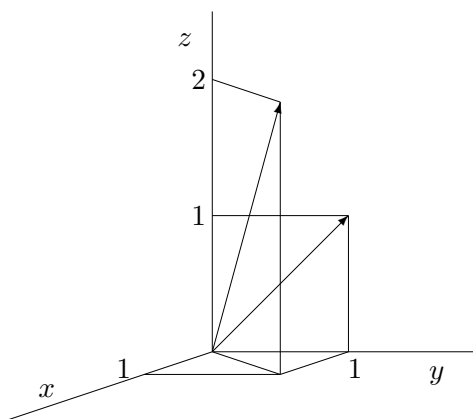
**Impulsmoment en z-component** Van het impulsmoment is de z-component bepaald door het magnetische kwantumgetal  $m$ :  $L_z = m\hbar$ . Het totale impulsmoment  $\underline{L}$  heeft in het algemeen een grootte en een richting die daarvan verschilt (niet langs de z-as). Dat moet ook niet, om ervoor te zorgen dat het atoom niet plat is maar bolvormig. De lengte  $L$  van het impulsmoment  $\underline{L}$  blijkt óók gekwantiseerd, alleen niet geheel-tallig. Wel moet, volgens de bekende regel van Pythagoras in de ruimte, gelden:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \geq L_z^2$$

Dan zal dus het **impulsmomentkwantumgetal**  $l$  minstens het magnetisch kwantumgetal moeten zijn:

$$l \geq |m|$$

Als het elektron precies in de passende richting draait rond het aanwezige magneetveld, dan is  $L = L_z$  en  $l = m$ . Dat is bijvoorbeeld het geval in het Bohr-model. Als het elektron andersom draait, zodat haar 'eigen' veld tegen het magneetveld in is, dan is  $m = -l$ .



Figuur 1.10 Voorstelling impulsmomentvector. Let op de 'heeltallige' componenten (in  $\hbar$  gemeten) langs *beide* assen, in tegenstelling tot de 'wortel'waarde van  $L$  ( $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $\dots$ ).

**Impulsmomentgrootte** De lengte van de impulsmomentvector  $\underline{L}$  is feitelijk iets groter dan de waarde die uit  $l$  volgt. Uit een nauwkeurige doorwerking van de golfmechanica (die we hier zeker niet zullen geven) volgt dat

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad l = 0, 1, \dots$$

Dus  $l\hbar < L < (l+1)\hbar$ . Waarom merken we niet veel verschil tussen de Bohr kwantisatie  $L = m\hbar$  en de 'echte' kwantisatie  $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ ? Omdat bij metingen slechts de verschillen tellen maakt het weinig uit of we de ene of de andere kwantisatie nemen. Bijvoorbeeld  $L(3) - L(2) = 1,014\hbar$  is praktisch een kwant verschil.

**Impulsmoment en energie** Bij het waterstofatoom is, bij de cirkelbanen, de totale energie  $E$  tegengesteld aan de draaienergie  $E_{\text{rot}}$ :

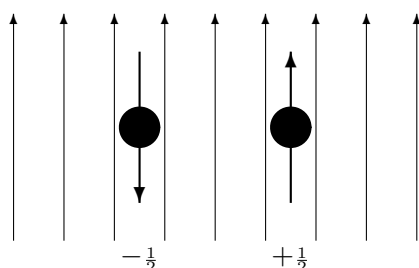
$E_{\text{rot}} = -E$ . Bij atomen met meer elektronen komt daar potentiële energie bij, zodat in het algemeen:

$$E_{\text{rot}} < -E$$

Voor de bijbehorende kwantumgetallen blijkt zo te gelden:

$$l < n$$

Bij maximale energie is alle beweging draaien; dan is  $l = n - 1$  en wordt de baan van het elektron een perfecte cirkel (een ellips heeft bovenop de cirkelbeweging als het ware nog een heen en weer beweging). Die cirkelbanen zijn besproken bij het Bohr-model; daar is  $m = l = n - 1$ . Omgekeerd, als we de energie helemaal nit voor draaien gebruiken, dan is  $l = 0$  en het elektron wordt heen en weer geslingerd ‘door de kern heen’; hier blijkt direct de beperking van het oude golfmodel, daar een elektron niet ‘zomaar’ door de kern heen kan gaan.



Figuur 1.11 Elektronspin in magneetveld. De elektronlading draait zo dat het opgewekte magneetveld òf met het uitwendige veld mee staat ( $s = +\frac{1}{2}$ ) òf er tegen in staat ( $s = -\frac{1}{2}$ ).

### 1.6.3 Elektronspin

Het elektron blijkt als een tolletje rond zijn eigen as te draaien. De elektronlading draait mee, zodat het elektron een bolletje is vol met kringstromen. Het elektron is daardoor ook een magneetje.

We noemen dat magneetje van het elektron het **elektronspin** (denk aan spin-newiel). We zagen hierboven dat het baan-impulsmoment is gekwantiseerd. Om dezelfde reden is het elektronspin gekwantiseerd.

Heel bijzonder is dat het **spinkwantumgetal**  $s$  *halftallig* is. (Goudsmit en Uhlenbeck (1926), Dirac (1928)). Uit experimenten blijkt dat  $s = +\frac{1}{2}$  als het linksom (tegen de klok in) draait, resp.  $s = -\frac{1}{2}$  als het rechtsom (met de klok mee) draait. Voor het impulsmoment van het spin  $S$  geldt:

$$S = s\hbar \quad s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

Volgens de kurketrekker-regel wordt het rechtsom draaiende elektronspin ( $s = +\frac{1}{2}$ ) aangegeven door een pijltje  $\uparrow$  langs de z-as omhoog, het linksom draaiende elektronspin ( $s = -\frac{1}{2}$ ) is dan een pijltje  $\downarrow$  omlaag. Het magnetisch dipoolmoment, dat de sterkte van het magnetische spin geeft, is evenredig met  $s$ .

- Opg 1.6.1** \* Een atoom bevindt zich in het aardmagneetveld dat horizontaal in de  $y$ -richting wordt verondersteld. De  $x$ -richting is eveneens horizontaal en de  $z$ -richting is verticaal. De volgende grootheden zijn dan gekwantiseerd:
- A  $L$  en  $L_x$
  - B  $L$  en  $L_y$
  - C  $L$  en  $L_z$
  - D geen van de vorige
- Opg 1.6.2** \* Het getal  $n$  stelt voor het kwantumgetal van :
- A energie
  - B impuls
  - C impulsmoment
  - D impulsmoment in  $z$ -richting
- Opg 1.6.3** \* Het getal  $m$  stelt voor het kwantumgetal van:
- A energie
  - B impuls
  - C impulsmoment
  - D impulsmoment in  $z$ -richting
- Opg 1.6.4** \* Het kwantumgetal van impulsmoment is:
- A  $l$
  - B  $m$
  - C  $n$
  - D  $s$
- Opg 1.6.5** \* Het hoofdkwantumgetal kan de waarde hebben
- A  $+\frac{1}{2}$  of  $-\frac{1}{2}$
  - B een natuurlijk getal
  - C van min het impulsmomentkwantumgetal tot plus het impuls moment kwantumgetal
  - D vanaf het impulsmomentkwantumgetal plus 1
- Opg 1.6.6** \* Het impulsmomentkwantumgetal kan waarden hebben:
- A  $+\frac{1}{2}$  of  $-\frac{1}{2}$
  - B van nul tot het magnetisch kwantumgetal min 1
  - C van de wortel uit een natuurlijk getal
  - D vanaf nul tot het hoofdkwantumgetal min 1
- Opg 1.6.7** \* Het magnetisch kwantumgetal kan waarden hebben
- A  $+\frac{1}{2}$  of  $-\frac{1}{2}$
  - B van nul tot het impulsmomentkwantumgetal  $-1$
  - C van min het impulsmomentkwantumgetal tot plus het impulsmomentkwantumgetal
  - D van nul tot het hoofdkwantumgetal  $-1$

### 1.6.4 Elektronwolk toestanden

Allesoverziende hebben we voor een elektron uit de elektronwolk van een atoom vier kwantumgetallen leren kennen:

1. het *hoofdkwantumgetal*  $n$  voor de elektronenergie  $E$ ;
2. het *impulsmomentkwantumgetal*  $l$  voor impulsmomentgrootte  $L$ ;
3. het *magnetischkwantumgetal*  $m$  voor de component  $L_z$  van het impulsmoment in de  $z$ -richting;
4. het *spinkwantumgetal*  $s$  voor de component van het magnetische moment langs het magneetveld.

Voor het begrijpen van de spectra van ingewikkelde atomen of moleculen spelen deze vier kwantumgetallen een hoofdrol: zij bepalen energie, impulsmoment enz. van de elektronen.

**Elektrontoestand** In gassen zijn de atomen los van elkaar: hun afstand is ongeveer  $2,5 \cdot 10^{-9}$  m, terwijl hun grootte zo'n  $2,5 \cdot 10^{-10}$  m is (scheelt een factor 10). De atomen in een gewoon gas zijn neutraal, dus de kern bevat juist zoveel protonen  $Z$ —het protonaantal van de kern—als de elektronwolk elektronen bevat. Ieder elektron in de elektronwolk bevindt zich in een bepaalde toestand, de **elektrontoestand**, die volledig wordt gekenmerkt door de vier genoemde kwantumgetallen:  $(n, l, m, s)$ .

**Pauli-principe** Een elektrontoestand kan niet zomaar willekeurig zijn, zelfs niet als we voldoen aan de genoemde beperkingen voor  $n$ ,  $l$ ,  $m$  en  $s$ . Volgens de algemene toestanden-mechanica van Pauli is de spingrootte bepalend voor het golfkarakter. Er zijn twee soorten deeltjes mbt het golfkarakter:

- **bosonen** deeltjes die géén spin hebben, of een **heeltallige spin**—bosonen kunnen met meerdere tegelijk in dezelfde toestand zijn;
- **fermionen** deeltjes met spingrootte half, of een **halftallige spin**—fermionen kunnen nooit tegelijk in een zelfde toestand zijn;

Een elektron heeft een elektronspin ter grootte van een half, zodat een elektron een fermion is. Het **Pauli-principe** is dat verschillende fermionen verschillende toestanden hebben.

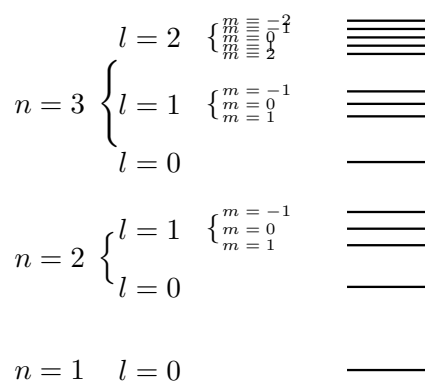
**Elektronenschil** In het algemeen streeft een deeltje, dus ook een elektron, ernaar om in een toestand met een zo laag mogelijke energie te komen. Wanneer we de elektronen één voor één naar de kern brengen zullen die steeds een baan met het laagst mogelijke energieniveau ‘bezetten’. Het elektron komt dan in de *elektronenschil* bepaald door de waarde van het *hoofdkwantumgetal*  $n$  van haar toestand. Traditioneel

worden de elektronenschillen niet genummerd naar  $n$ , maar geletterd; i.p.v. over  $n = 1, 2, 3, \dots$  spreekt men over de schillen  $K, L, M, \dots$ . De eerste elektronen zullen de  $K$ -schil vullen voordat een elektron in de  $L$ -schil komt.

### Elektronbaan

Binnen een schil, bij een bepaalde ‘hoofd’-energie, kan het elektron nog allerlei banen hebben. In iedere baan, gekenmerkt door het impulsmoment—dus de kwantumgetallen  $l, m$ —kunnen twee elektronen (één met spin  $\uparrow$ , één met spin  $\downarrow$ ). Immers, dan verschilt het kwantumgetal  $s$  van die twee elektronen. Wanneer een schil wordt opgevuld, zal een volgend elektron zo weinig mogelijk impulsmoment willen hebben, want dat is zo weinig mogelijk draaienergie. Daarom worden achtereenvolgens de banen met  $l = 0, 1, 2, \dots$  opgevuld. Traditioneel worden elektronbanen niet genummerd maar geletterd; ipv over  $l = 0, 1, 2, \dots$ , spreekt men van de baan s,p,d, $\dots$

Binnen die banen zijn er nog verschillende standen van de draaias ten opzichte van het magneetveld mogelijk (zie ook fig. 1.8 met  $l = 1$ ): het liefst langs het veld, met  $m = l$ , of iets dwars erop,  $m = l - 1$  enzovoort tot helemaal dwars  $m = 0$  en zelfs tegen het veld in  $m = -l$ .



Figuur 1.12 Denkbeeldige energie (verticale schaal) van elektrontoestanden gekenmerkt door het hoofdkwantumgetal  $n$ , impulsmomentkwantumgetal  $l$  en magnetisch kwantumgetal  $m$ ; let op het vermeerderen van het aantal toestanden (en de hogere energie) bij grotere  $n, l$ .

**Elektrontoestand en energie** Op die manier worden achtereenvolgens opgevuld de elektron toestanden  $(n, l, m, s)$  die voldoen aan de bovengenoemde regels. Dat gaat ruwweg in de volgorde:

1. schil van lage naar hoge  $n$ :  $1, 2, \dots$ ;
2. baan van lage naar hoge  $l$ :  $0, \dots, n - 1$ ;
3. stand van hoge naar lage  $m$ :  $l, \dots, 0, \dots, -l$ ;
4. spin van hoge naar lage  $s$ :  $+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ .

Bij de eerste twee zien we direct dat in die volgorde de energie toeneemt. Bij de laatste twee kwantumgetallen, de componenten van het impulsmoment en de spin langs het magneetveld, zien we dat een grote component een lage (magnetische) energie heeft. Dat klopt met de er-



varing dat magneten in de richting van het veld gaan staan (en dan dus de laagste energie hebben). Helaas (of juist gelukkig?) zullen we zien dat vooral bij de magnetische energie de volgorde wel eens verschilt van de hier geschetste. Zie de tabel 1.3

**Voorbeeld Elektrontoestanden Borium** Bepaal de achtereenvolgende elektron-toestanden voor de elektronen in de elektronwolk van Borium.

Het protonaantal van Borium is 5. Er zijn dus 5 elektronen. Bovenstaande regels in acht nemend krijgen we achtereenvolgens de volgende 5 toestanden  $(n, l, m, s)$ :

1. eerst is  $n = 1$ ; dan moet  $l < n = 1$ , dus  $l = 0$ ; verder is  $|m| \leq l = 0$ , dus ook  $m = 0$ ; de spin is  $s = \frac{1}{2}$ . Resultaat:  $(1, 0, 0, \frac{1}{2})$ ;
2. als hiervoor, behalve voor de spin:  $(1, 0, 0, -\frac{1}{2})$  maakt K schil vol;
3. We starten de L schil met  $n = 2$  en  $l = 0$  (laagste), dus ook  $m = 0$ . Resultaat  $(2, 0, 0, \frac{1}{2})$ ;
4.  $(2, 0, 0, -\frac{1}{2})$  maakt s baan L schil vol;
5. Nu nemen we naast  $n = 2$   $l = 1$ . Dan kan  $|m| \leq l = 1$ , dus  $|m| \leq 1$ . Zo laag mogelijke energie betekent  $m = 1$ :  $(2, 1, 1, \frac{1}{2})$ , de p baan in L schil;

**Elektronenschil en elektrontoestand** Voor de overzichtelijkheid laten we in het volgende overzicht de spinkwantumgetallen, die toch steeds plus en min een half zijn, oningevuld. We krijgen dan de volgende *denkbare toestanden* in 'een' elektronwolk:

**K schil**  $(1, 0, 0, s)$ ; ..... 2 elektronen  
**L schil s baan**  $(2, 0, 0, s)$ ;  
     **p banen**  $(2, 1, 1, s)$   $(2, 1, 0, s)$   $(2, 1, -1, s)$ ;  
     ..... 2+6=8 elektronen  
**M schil s baan**  $(3, 0, 0, s)$ ;  
     **p banen**  $(3, 1, 1, s)$   $(3, 1, 0, s)$   $(3, 1, -1, s)$ ;  
     **d banen**  $(3, 2, 2, s)$   $(3, 2, 1, s)$   $(3, 2, 0, s)$   $(3, 2, -1, s)$   $(3, 2, -2, s)$ ;  
     ..... 2+6+10=18 elektronen  
 ... **schil** ... **banen**  $(n, l, m, s)$ ; .....  $2n^2$  elektronen

**Elektronenconfiguratie van elementen** Bij de *elektronenschillen* met vele elektronen wordt soms eerst een aantal 'lagere' niveaus *niet* bezet (zie bijvoorbeeld de atomen C, N, O en Si, P en S). Bestudeer de tabel 1.3 op pag 50 met *werkelijke toestanden* van de elektronwolk hier eens op na. Zou het toeval zijn, dat de genoemde afwijkende elementen juist de, voor de elektrotechnische toepassingen, zo interessante elementen zijn?

1	H	↑																	
2	He	↑↓																	
3	Li	↑↓	↑																
4	Be	↑↓	↑↓																
5	B	↑↓	↑↓	↑															
6	C	↑↓	↑↓	↑	↑														
7	N	↑↓	↑↓	↑	↑	↑													
8	O	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑													
9	F	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑													
10	Ne	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓													
11	Na	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑												
12	Mg	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓												
13	Al	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑											
14	Si	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑										
15	P	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑									
16	S	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑									
17	Cl	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑									
18	Ar	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓									
19	K	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑									
20	Ca	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓									
21	Sc	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑↓									
22	Ti	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑↓								
23	V	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑↓							
24	Cr	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑	↑						
25	Mn	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑	↑	↑↓					
26	Fe	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑	↑↓					
27	Co	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	↑↓					
28	Ni	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑↓					
29	Cu	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑					
30	Zn	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓					
31	Zn	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑					
32	Ge	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑				
33	As	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	↑			
34	Se	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑			
35	Br	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑			
36	Kr	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓			
		0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2	0	1	0	-1
		s	s	p-banen			s	p-banen			d-banen			s	p-banen				
Z	Sy	K	L-schil				M-schil						N-schil						

Tabel 1.3 Elektronenconfiguratie van de eerste 4 periodes uit het *periodiek systeem* (pag. 51). De toestand van een elektron wordt bepaald door zijn positie: de schil (bepaalt  $n$ ), de baan (bepaalt  $l$ ), het magnetisch kwantumgetal (is  $m$ ) en de 'getekende' spin (bepaalt  $s$ ). Let op de onregelmatige schilvulling bij de elementen C, N, O en Si, P en S (zeer interessante elementen!). Magnetische elementen zijn herkenbaar aan de ongepaarde spins, ihb in periode 4: Cr, Mn, Fe, Co, Ni.

1.6. GOLFMODEL VOOR ATOMEN

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
1	1 H 1															2 He 2 2=K		
2	3 Li K,1	4 Be K,2														10 Ne K,8 K,8=L		
3	11 Na L,1	12 Mg L,2														18 Ar L,8 L,7		
4	19 K L,8,1	20 Ca L,8,2	21 Sc L,9,2	22 Ti L,10,2	23 V L,11,2	24 Cr L,13,1	25 Mn L,13,2	26 Fe L,14,2	27 Co L,15,2	28 Ni L,16,2	29 Cu L,18,1	30 Zn L,18,2	31 Ga L,18,3	32 Ge L,18,4	33 As L,18,5	34 Se L,18,6	35 Br L,18,7	36 Kr L,18,8 L,18=M
5	37 Rb M,8,1	38 Sr M,8,2	39 Y M,9,2	40 Zr M,10,2	41 Nb M,12,1	42 Mo M,13,1	43 Tc M,13,2	44 Ru M,15,1	45 Rh M,16,2	46 Pd M,18	47 Ag M,18,1	48 Cd M,18,2	49 In M,18,3	50 Sn M,18,4	51 Sb M,18,5	52 Te M,18,6	53 I M,18,7	54 Xe M,18,8 M,32=N
6	55 Cs M,18,8,1	56 Ba M,18,8,2	La-u	72 Hf N,10,2	73 Ta N,11,2	74 W N,12,2	75 Re N,13,2	76 Os N,14,2	77 Ir N,15,2	78 Pt N,17,1	79 Au N,18,1	80 Hg N,18,2	81 Ti N,18,3	82 Pb N,18,4	83 Bi N,18,5	84 Po N,18,6	85 At N,18,7	86 Rn N,18,8 N,18=N'
7	87 Fr N',8,1	88 Ra N',8,2	Ac-r	104 Kd N'',10,2	105 Ha N'',11,2	106 Un N'',12,2												N,32=N''

	57 La ,18,9,2	58 Ce ,19,9,2	59 Pr ,21,8,2	60 Nd ,22,8,2	61 Pm ,23,8,2	62 Sm ,24,8,2	63 Eu ,25,8,2	64 Gd ,26,8,2	65 Tb ,27,8,2	66 Dy ,28,8,2	67 Ho ,29,8,2	68 Er ,30,8,2	69 Tm ,31,8,2	70 Yb ,32,8,2	71 Lu ,32,9,2
	89 Ac ,18,9,2	90 Th ,18,10,2	91 Pa ,20,9,2	92 U ,21,9,2	93 Np ,22,9,2	94 Pu ,24,8,2	95 Am ,25,8,2	96 Cm ,25,9,2	97 Bk ,27,8,2	98 Cf ,28,8,2	99 Es ,29,8,2	100 Fm ,30,8,2	101 Md ,31,8,2	102 No ,32,8,2	103 Lr ,32,9,2

Tabel 1.4 Periodiek systeem van de elementen. In de breedte staan de groepen, in de hoogte de perioden van het systeem. Chemisch verwante elementen staan in verticale groepen. Vergelijk deze elementenrangschikking met de elektronconfiguraties tabel op pag 50.

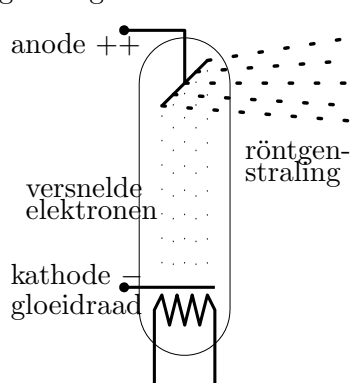
**Periodiek systeem van elementen** De systematiek die we hebben gebruikt om de elektrontoestand te kenmerken culmineert in het **periodiek systeem** van de elementen. Die is weergegeven in tabel 1.4 op pag. 51. Oorspronkelijk zijn de elementen—maar dan op grond van de chemische eigenschappen—reeds in 1868 door Meyer, en in 1869 door Mendelejev, gerangschikt in het periodiek systeem van elementen. Het is verbazingwekkend dat de toepassing van het Pauli-principe op de toestanden van elektronen, met slechts vier kwantumgetallen, tot *hetzelfde* systeem leidt. Kennelijk spelen de onderlinge krachten, tussen kern en elektronen en tussen de elektronen onderling, voor de globale indeling van de elementen geen enkele rol!

- Opg 1.6.8** \* Vanwege het geldig zijn van het Pauli-principe kunnen elektronen in de grondtoestand:
- A alléén plaatsnemen in het laagste energieniveau van een atoom
  - B per stuk een energieniveau bezetten
  - C twee aan twee met gelijk spinkwantumgetal in één niveau gaan zitten
  - D twee aan twee met tegengesteld spinkwantumgetal in één niveau gaan zitten
- Opg 1.6.9** \* In de L-schil van Borium ( $Z=5$ ) kan in de grondtoestand de volgende combinatie van kwantumgetallen voorkomen ( voor een elektron)
- A  $n = 1, l = 0, m = -1$
  - B  $n = 2, l = 1, m = 0$
  - C  $n = 2, l = 0, m = 1$
  - D  $n = 2, l = 0, m = 0$
- Opg 1.6.10** \*\*\* In de elektronwolk van He wordt de toestand van de twee elektronen in de grondtoestand gekenmerkt door:
- A  $n=1$  en  $n=2$
  - B  $n=1, l=1$  en  $n=1, l=2$
  - C  $n=1, l=0$  en  $n=1, l=1$
  - D anders
- Opg 1.6.11** \*\*\* Het element Fluor  $Z = 9$  in de grondtoestand, kan de volgende combinatie van kwantumgetallen bevatten:
- A  $n = 1, l = 0, m = 1$
  - B  $n = 2, l = 0, m = +1$
  - C  $n = 2, l = 1, m = 0$
  - D  $n = 2, l = 1, m = 2$

## 1.7 Straling

### 1.7.1 Inleiding

**Ontladingsbuis-straling** In 1895 ontdekte W.C.Röntgen bij toeval dat er uit een gasontladings-buis, bij voldoende hoge anode-spanningen, een tot dan ‘onbekende straling’ kwam. Die straling was zelf onzichtbaar, maar liet sporen achter door de zwarting van fotografische platen. Deze straling uit een gasontladingsbuis werd **röntgenstraling** genoemd; ze gaat dwars door weefsel maar nauwelijks door botten (zie fig. 1.14). Röntgenstraling heeft een golflengte die globaal ligt tussen 0,02 nm en 5 nm, dus een fotonenergie tussen 0,2 keV en 50 keV. De verklaring van het verschijnsel werd gegeven door Bohr aan de hand van zijn atoommodel. Röntgenstraling is een bijzonder soort elektronemissiestraling van hoge energie.



Figuur 1.13 röntgenbuis: de röntgenstraling ontstaat bij de ‘in-slag’ van de elektronen op de anode.

Figuur 1.14 röntgenfoto: het botweefsel absorbeert de doorvallende röntgenstraling, het spierweefsel niet.

**Ioniserende-straling** In 1896 ontdekte Becquerel, dat er uit brokken Radium ‘**radio-actieve straling**’ (‘radium is actief!’) kwam. Door nader onderzoek van Rutherford en Soddy (1899), bleek dat er in die ‘**ioniserende straling**’ twee soorten deeltjes-straling was. Eén soort ioniserende straling bestond uit Heliumkernen; die straling werd  $\alpha$  genummerd (op zijn grieks) en dus  $\alpha$ -straling of **alfastraling** genoemd. De andere soort ioniserende straling bestond uit elektronen; die werd  $\beta$ -straling genummerd en **betastraling** genoemd.

Het was Villard die (1900) aantoonde dat er in de ioniserende-straling ook ‘gewone straling’ zat, die  $\gamma$ -straling of **gammastraling** werd genoemd. Later ontdekte men dat deze gammastraling te vergelijken is met ‘harde’ röntgenstraling; dwz met nog grotere fotonenergie. De energie van het gammafoton blijkt te liggen vanaf 10 keV tot wel 100 MeV.

De verklaring van de verschillende straling soorten werd slechts moeizaam verkregen. Pas in 1949 werd door mevrouw Mayer een bevredigend *kernmodel* opgesteld waarmee die *kernstraling* kon worden begrepen.

**Conclusie** *Er zijn historisch gezien vier soorten ‘harde’ straling. Drie ervan zijn natuurlijke ioniserende straling, en de vierde kan kunstmatig worden opgewekt in gasontladingsbuizen:*

1.  $\alpha$ -straling zijnde Heliumkernen uit zware kernen gestoten;
2.  $\beta$ -straling zijnde elektronen uit kerndeeltjes gestoten;
3.  $\gamma$ -straling zijnde energierijke fotonen vanuit de kern;
4. röntgenstraling zijnde energierijke fotonen vanuit de elektronwolk.

We merken op, dat er natuurlijk nog veel meer straling is: licht is ook straling, zoals ook radiogolven. Samen met die straling behoren de gamma- en röntgenstraling tot de elektro-magnetische golven. Slechts de golflengte (beter nog: de energie) onderscheidt hen.

### 1.7.2 Röntgenstraling

**Spectrum** Het spectrum van de **röntgenstraling** blijkt bij nadere analyse te bestaan uit twee gedeeltes (zie fig. 1.15).

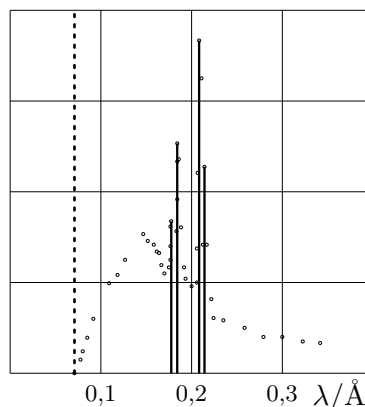
1. het **discrete spectrum** met emissielijnen;
2. het **continue spectrum** met maximale energie.

Let erop, dat een *maximale* energie, een *minimale* golflengte is.

**Wegstoten elektron uit elektronenschil** De lijnen in het spectrum blijken goedbeschouwd afhankelijk te zijn van het *anodemateriaal*, dat vaak van een zwaar metaal als wolfram is gemaakt.

Daar is een wel zeer

eenvoudige verklaring voor. Door de hoge *anodespanning*, denk aan 25 kV, worden elektronen met hoge energie—die energie kan oplopen tot maximaal 25 keV—in de anode geschoten. Daar botsen ze op de elektronwolk van de elektrode-atomen. Door hun geweldige snelheid kunnen de ingeschoten elektronen *diep doordringen* in de elektronwolk en daar een elektron uit een naar binnen gelegen schil (bv de *K-schil*)



Figuur 1.15 Een spectrum met een discreet deel, de ‘lijnen’, en een continue deel, de ‘band’ vanaf de minimum golflengte.

wegstoten. Een elektron uit een meer naar buiten gelegen schil (bv de *L-schil*), waar de elektronen een hogere energie hebben, zal nu ‘naar binnen vallen’, onder uitzending van een röntgenfoton (vanwege behoud van impuls, impulsmoment en energie). Zie fig. 1.16 op pag. 56.

**Discrete röntgenlijnen** De hoge energie van het röntgenfoton, dat wordt uitgezonden bij het weer opvullen van de baan van het uitgestoten elektron, is een afspiegeling van het feit dat dit alles zich *dicht bij de kern* afspeelt. ‘Dicht bij een kern’ betekent grote potentiële energie. Vooral bij kernen van zware metalen, dus groot protonaantal  $Z$ , hebben de elektronen in de K- en L-schil energieën in de orde van kilo-volts, dus ook de energieverschillen zijn van die orde van grootte. De totale elektronenergie gaat ruwweg *kwadratisch* met het protonaantal omhoog.

**Opg 1.7.1 \*\*\*** Een wolframanode in een röntgenbuis zendt fotonen uit, die horen bij een sprong van de L- naar de K-schil. Waarom zal het niet bij deze soort fotonen blijven? Welke soort of soorten zijn nog meer te verwachten?

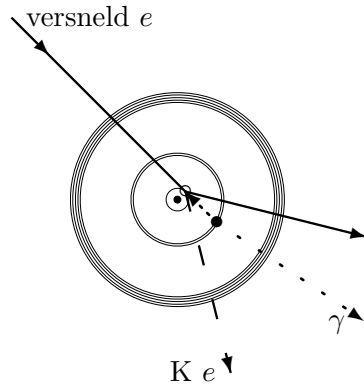
[Antw. In de L-schil blijft een lege plaats achter, zodat overgangen naar L-schil volgen; zichtbare fotonen]

**Opg 1.7.2 \*\*** In een wolframatoom is het energieniveau van K-elektronen  $-69,5$  keV, en zijn de energieniveaus van de L-elektronen resp.  $-12,1$  keV,  $-11,5$  keV en  $-10,2$  keV. Kan wolfram, onder een bombardement van elektronen met een kinetische energie van  $59,0$  keV, röntgenspectraallijn(en) uitzenden? Zo ja, hoeveel, als we alleen letten op de K- en L- elektronen?

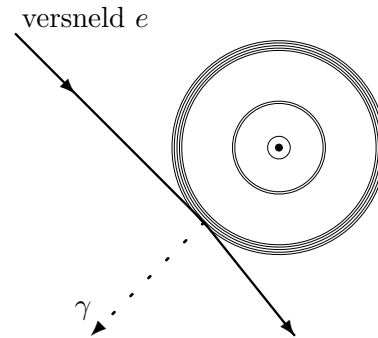
[Antw. ja, 3]

**Continu röntgenspectrum** Er is nog iets bijzonders aan het continue spectrum: het heeft een *minimale golflengte*, die afhangt van de *anode-spanning*. Ook daar is een eenvoudige verklaring voor. Bij de uitleg van het discrete deel van het röntgenspectrum zagen we, dat een deel van de ingeschoten elektronen zodanig een elektronwolk indringt, dat het betreffende atoom wordt geïoniseerd en de röntgenlijnen ontstaan. Maar andere elektronen die in de elektrode zijn geschoten, zullen meer langs de elektronwolk schampen (zie fig. 1.17 op pag. 56). Daarbij verliest het elektron snelheid, waarbij de verloren bewegingsenergie om wordt gezet in straling: **remstraling**. Remstraling kan dus energieën hebben tot *maximaal de hoogste bewegingsenergie*. Bij  $25$  kV anodespanning is de maximum energie van het continue röntgenstraling dus  $25$  keV fotonenergie.

**Conclusie** *Het spectrum van röntgenstraling bevat twee delen. Het discrete spectrum bestaat uit emissielijnen die karakteristiek zijn voor het anode-materiaal. Het continue spectrum bestaat uit fotonen*



Figuur 1.16 Ontstaan van discrete röntgenstraling. Een van linksboven ingeschoten elektron dringt zover door in de elektronenschil, dat een elektron uit de K-schil wordt los geslagen (die verdwijnt naar beneden); de open K-plaats leidt tot een L-K overgang, die gepaard gaat met het uitzenden van een röntgenfoton met het elektronenergie-verschil als energie.



Figuur 1.17 Ontstaan van continue röntgenstraling. Een van linksboven ingeschoten elektron schampt de elektronwolk, waarbij het wordt afgeremd. De bij het afremmen vrij gekomen energie wordt uitgezonden als een röntgenfoton met de afremenergie als energie.

van elke energie tot aan een maximale energie, bepaald door de anode-spanning.

- Opg 1.7.3 \*\*** In een koperatoom is het energieniveau van de K-elektronen  $-9,00$  keV, zijn de energieniveau van de L- elektronen resp.  $-1,10$  keV,  $-0,95$  keV en  $-0,94$  keV, en zijn de energieniveaus van de M-elektronen ongeveer  $-0,10$  keV.
- a Hoeveel röntgenspectraallijnen kan koper uitzenden? [Antw. 8 lijnen]
- b Wat zou op grond van deze gegevens de maximale en wat de minimale röntgengolf lengte zijn? [Antw.  $\lambda_{\max} = 8,26$  nm,  $\lambda_{\min} = 0,14$  nm]
- Opg 1.7.4 \*\*\*\*** In een röntgenbuis is de (elektronen)stroomsterkte  $7,0$  mA; de elektronen doorlopen een potentiaalverschil van  $60$  kV;  $1\%$  wekt röntgenstraling op. Hoeveel graad zou een wolfram-anode, van  $0,80$  kg, per minuut in temperatuur stijgen als hij niet werd gekoeld? [Antw.  $dT/dt = 231$  K/min]

**Absorptie röntgenstraling** We kunnen nu begrijpen waarom röntgenstraling wel door weefsel, maar niet door botten gaat. De straling wordt afgeremd, geabsorbeerd, door botsingen met elektronen. Hoe meer elektronen er in de elektronwolk zijn (hoe groter de kernlading, hoe zwaarder de atomen), des te minder straling er wordt doorgelaten door de materie. Nu bestaat weefsel voornamelijk uit water ( $H_2O$ ), waarvan



de elementen H en O lichte atomen hebben. Botten bestaan daarentegen voor een groot deel uit kalk en metalen, waarvan de elementen Ca en Fe veel zwaarder zijn. De laatste hebben grote elektronwolken met vele verstrooiende elektronen, waardoor de straling er moeilijk door kan dringen.

**Opg 1.7.5** \* De golflengte van röntgenstraling ligt ruwweg tussen

- A 0,02 en 5 nm
- B 200 en 400 nm
- C 400 en 800 nm
- D 800 en 1000 nm

**Opg 1.7.6** \* Het continue spectrum van een röntgenbuis

- A wordt ook wel remspectrum genoemd
- B heeft een maximale golflengte die bepaald wordt door de anode-kathode potentiaal
- C heeft een minimale frequentie die bepaald wordt door de energieniveaus van het anodemateriaal
- D is onafhankelijk van de anode-kathode potentiaal

**Opg 1.7.7** \* Het lijnen-röntgenspectrum dat in een bepaalde röntgenbuis ontstaat:

- A wordt mede bepaald door de anode-kathode potentiaal
- B is karakteristiek voor de kathode van de röntgenbuis
- C is onafhankelijk van de energieniveaus van de elektronen in de atomen van het anodemateriaal
- D levert altijd hardere straling dan het continue spectrum van dezelfde buis onder dezelfde omstandigheden

**Opg 1.7.8** \*\*\* Om in de röntgendiagnostiek *weefselverschillen* te kunnen constateren gebruikt men:

- A harde röntgenstraling in combinatie met een gevoelige film
- B zachte röntgenstraling in combinatie met een minder gevoelige film
- C harde röntgenstraling in combinatie met een minder gevoelige film
- D zachte röntgenstraling in combinatie met een zeer gevoelige film

### 1.7.3 Gammastraling

**Inleiding** Duidelijk is dat *gammastraling* niet uit de elektronwolk van de atomen kan komen: daar zijn de foton-energieën véél te hoog voor. Gammastraling moet dus wel uit de kern komen; is dus *kernstraling*. Het inzicht in de bouw van de kern groeide in de eerste helft van de eeuw slechts langzaam. Achtereenvolgens werden de volgende kerndeeltjes ontdekt:

1. het proton  $p^+$  in 1911;

2. het neutron  $n^0$  in 1932;
3. het positron  $\beta^+$  in 1932;
4. de neutrino's  $\nu$  vanaf 1931;
5. de mesonen  $K$ ,  $\pi$  enzovoort vanaf 1935;
6. de quark's vanaf 1969.

**Kerndeeltjes** Rutherford had de kern ontdekt, en in de kern vermoedde hij het **proton**  $p^+$  (1911) zoals reeds is beschreven. Op grond van het verschil tussen het protonaantal  $Z$  en het *massagetal*  $A$  van de kern werd het bestaan van het **neutron**  $n^0$  (=neutraal proton) vermoedt (1920), en in 1932 wist Chadwick het neutron ook werkelijk aan te tonen. Het neutron is elektrisch ongeladen, maar blijkt t och een magnetisch moment te hebben. Het neutron is zo een *klein magneetje* en dientengevolge zullen *atoomkernen* in het algemeen ook magnetisch zijn.<sup>1</sup>

Tezelfdertijd, dus ook in 1932, wist Anderson het **positron**  $e^+$  (=positief geladen elektron) te vinden, in 1928 voorspeld door Dirac vanwege zijn gedachten over de combinatie van het relativiteits-principe met de golftheorie van materie- deeltjes. In 1931 voorspelde Pauli het massaloze deeltje **neutrino**, hetwelk in 1956 (!) door Davis werd aangetoond. Nog meer (kern)deeltjes werden voorspeld door Yukawa (1935) toen hij een theorie van de kernkracht bedacht: met name de (pseudo) kernkrachtdeeltjes **mesonen**, zoals K-mesonen, volgden uit zijn theorie. De eerste mesonen werden in 1947 gevonden (totaal zijn dat er zo'n 200 geworden!).

**Kernmodel van Bohr** Ondertussen was er al een model voor de *atoomkern*. Bohr paste zijn elektronwolkmodel van waterstof wat aan, zodat het *nucleonschillenmodel* voor de kern ontstond (in 1949 verbeterd door mevr. Mayer). Een **nucleon** is een zwaar deeltje zoals een bouwdeel van de kern; dat is dus een *proton* of een *neutron*. De gedachte van Bohr is als volgt. Ga uit van het model van de elektronwolk met elektronen, maar vervang 'elektron' door 'nucleon', dus door 'proton' of door 'neutron'; vervang 'elektromagnetische Coulombkracht' door 'sterke kernkracht'. Nu zijn slechts banen mogelijk in 'schillen' met bepaalde energie, impulsmoment, enz. dwz in schillen met bepaalde kwantumgetallen. Een nieuw kwantumgetal, het **isospin**, geeft dan aan of

<sup>1</sup>Het neutron bleek van zichzelf een magnetisch moment (spin) te hebben, ondanks dat het ongeladen is! Nadere beschouwing heeft geleerd, dat het neutron bestaat uit drie **quarks** die ieder apart w el lading hebben: een up-quark heeft een lading  $\frac{2}{3}e$  en de twee down-quarks hebben ieder een lading  $-\frac{1}{3}e$ . Daarom heeft het neutron *inwendig* lading, en daardoor spin

het nucleon een proton of een neutron is. De ‘nucleonenergieën’ zijn een factor  $10^4$  sterker dan de ‘elektronenergieën’. Dat uit zich bijvoorbeeld in de kernafmeting die slechts  $10^{-15}$  m is—een factor  $10^5$  kleiner dan de atoomdiameter  $10^{-10}$  m.

**Conclusie** *De kern bestaat uit nucleonen: protonen en neutronen. Als een nucleon in de kern ‘vervalt’ van een hoger naar een lager energieniveau, dan zendt het nucleon een  $\gamma$  foton uit met de verschilenergie*

**Isotopen** Door het uitzenden van straling kan een kern (met protonaantal  $Z$  en massagetal  $A$ ), veranderen, namelijk als er lading en/of kernmassa wordt uitgestraald. Bij het afstoten van bijvoorbeeld een *neutron* zal de kern het zelfde protonaantal  $Z$  houden, dus hetzelfde element blijven, maar het massagetal zal verminderen met 1 tot  $A - 1$ . Een atoom met protonaantal  $Z$ , maar met een ander massagetal dan normaal voorkomend, noemen we een **isotoop** (het griekse ‘iso-topos’ is het nederlandse ‘gelijke-plaats’) van het element met protonaantal  $Z$ . Een bekend voorbeeld is  $C^{14}$ , het zwaardere isotoop van het gewonere koolstof  $C^{12}$ . De verhouding van het voorkomen van die twee isotopen wordt gebruikt als indicator voor de leeftijd van organisch materiaal—de  *$C^{14}$ -methode*.

#### 1.7.4 Beta-straling

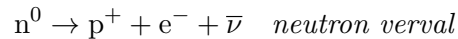
Vele vragen blijven er met dit kernmodel nog onbeantwoord:

- zijn massa en energie gelijk voor beide nucleonen?
- waarom is de kernmassa ongelijk aan de sommassa van de nucleonen?
- waarom zijn er maar twee soorten nucleonen?

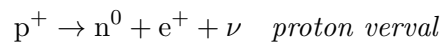
Het antwoord op de *eerste vraag* is: bijna (elektr. energie is verwaarloosbaar vergeleken met kernenergie). Het antwoord op de *tweede vraag* over de kernmassa is: omdat er ook kernkrachtdeeltjes zijn, **gluonen**, die energie, dus massa, hebben. Het gluon is voor de *sterke kracht* wat het foton is voor de elektrische kracht. Het gluon brengt de kernkracht over van nucleon naar nucleon. Een meson is dan ook eigenlijk geen elementair kerndeeltje, maar het is een verzameling gluonen; dat neemt niet weg dat het in bepaalde gevallen zinvol blijft om over mesonen als kerndeeltjes te praten.

**Betaverval** Het antwoord op de *tweede vraag* blijkt te worden gegeven door de verklaring van betastraling. Er is een *zwakke kracht* die een elektron uit een neutron kan duwen. De zwakke kracht veroorzaakt in

de kern van radioactieve elementen bij het omzetten van een neutron in een proton het *uitzenden* van  $\beta$ -straling onder het gelijktijdig uitzenden van een *anti-neutrino*:

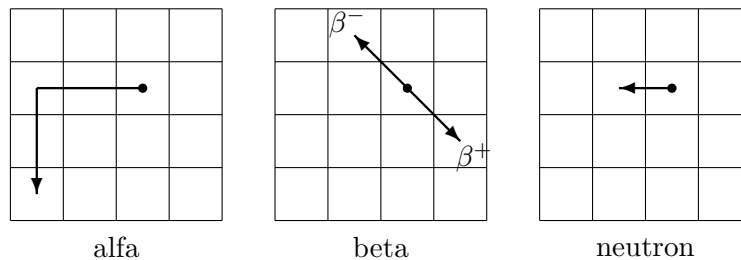


Ook het omgekeerde is mogelijk, dat een proton wordt omgezet in een neutron onder uitzending van het *antideeltje* van het elektron, het *positron*; men spreekt dan van  $\beta^+$ -straling.



Het neutrino heeft ‘géén’ massa. Het ‘zwakke’ van de kracht wil zeggen: zwakke kracht is ruwweg een factor 1000 zwakker dan elektrische kracht.

**Kernverval** Bij het afstoten van een *proton* uit een kern zal het protonaantal verminderen tot  $Z-1$ , terwijl tegelijkertijd ook het massagetal zal verminderen tot  $A-1$ . Het atoom is dan een *ander* (chemisch) element geworden: in het periodiek systeem schuift het a.h.w. naar links. Bij het *omzetten* van een *neutron* in een proton, het neutronverval, blijft het massagetal  $A$  dezelfde, maar verandert het protonaantal; er wordt een elektron uitgezonden—de wet van behoud van lading maakt dat noodzakelijk—en het protonaantal neemt toe tot  $Z+1$ . Ook nu is er een isotoop ontstaan; het atoom is ahw naar rechts opgeschoven in het periodiek systeem. Bij het protonverval gebeurt het omgekeerde: het protonaantal neemt af tot  $Z-1$ , en het atoom schuift naar links.



Figuur 1.18 Kernverandering bij alfaverval, betaverval ( $\beta$ straling, positronstraling), en neutronstraling. Horizontaal staat het neutronaantal ( $N = A - Z$ ) en verticaal het protonaantal ( $Z$ ). Een hokje is een kern, met isotopen horizontaal

**Opg 1.7.9 \*\*\*** Bij de uitzending van een  $\beta$ -deeltje door een radioactieve kern:

- A wordt een neutron in een proton omgezet
- B wordt een s-elektron uit de elektronenschil gestoten
- C schuift het element een plaats naar links op in het periodiek systeem
- D vermindert het massagetal van het element met een atomaire massa-eenheid

## 1.8 Laserstraling

**Inleiding** Het gelukte aan C.H. Townes, tezamen met zijn medewerkers, in 1953 om uit ammoniakgas flitsen van heel sterke kortegolfstraling te krijgen. Dat was de eerste (gas)laser, een '**MASER**': *Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation* oftewel 'microgolf versterking door gestimuleerde stralings-emissie'. Later (1958) gaf Townes aan hoe je een veel sterkere lichtflits zou kunnen maken. Dat gelukte aan T. Maimann in 1960 door de *robijn-kristal laser* te maken; een '**LASER**': *Lightwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, oftewel 'lichtgolf versterking door gestimuleerde stralings-emissie'. In 1961 werd de technisch belangrijke stap gezet van de gepulste laser naar de continue laser: de *Helium-Neon gaslaser* van Javan, Bennett en Herriot. De ontwikkeling leidde verder naar de hoog vermogen **CO<sub>2</sub>-laser**, die misschien wel beter CO<sub>2</sub>-lasser zou kunnen heten vanwege het hoge geconcentreerde lichtvermogen.

Een andere ontwikkeling van de laser is praktisch van belang. De eerste lasers bestonden uit experimentele opstellingen die wel een kamer groot waren. Het bleek mogelijk het laserprincipe op kleine schaal toe te passen, wat leidde tot de uitvinding van de **GaAlAs vastestof-laser**.

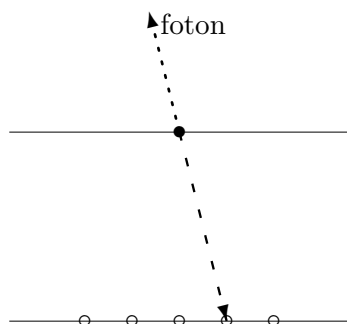
**Kenmerken** Het nieuwe van de laser was de *stralingsintensiteit*. Fotonemissie was natuurlijk al heel lang bekend, bijvoorbeeld de emissie-straling die 'hete' gasatomen uitzenden. Maar omdat die uitzending van atoom tot atoom op verschillende momenten en in verschillende richtingen gebeurt, is de intensiteit niet groot. *Grote* stralingsintensiteit ontstaat pas als 'alle' straling-uitzendende atomen dat *tegelijk* en *in dezelfde richting* doen. Dat het zou moeten kunnen—het met elkaar in de pas laten lopen van de licht uitstralende atomen—komt door een verschijnsel dat door A.Einstein (1918) is beschreven: *de gestimuleerde emissie*. Dat het ook werkelijk kon werd door Maimann bewezen.

De *laservermogens* zijn heel verschillend.

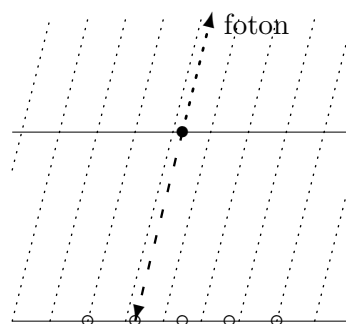
<i>soort laser</i>	<i>kleur</i>	<i>vermogen</i>	<i>toepassing</i>
CO <sub>2</sub> laser	infrarood	10 kW	lassen metalen
He-Ne laser	rood	5 mW	'lassen' weefsel
GaAlAs laser	infrarood	0,1 mW	telecommunicatie

**Gestimuleerde emissie** Wat is nu *gestimuleerde emissie*? Kortweg gezegd is *emissie* het omgekeerde van absorptie. Stel dat licht met de juiste golflengte, dus energie, door een atoom heen gaat waar een elektronenergieniveau verschil is van dezelfde grootte:  $\Delta E = E_f$  of  $E_2 - E_1 = hf$ . Dan kan een foton met energie  $E_f$  uit het doorvallende licht door

een elektron met energie  $E_1$  worden geabsorbeerd, zodat de elektron-energie wordt  $E_1 + E_f = E_2$ . Alles natuurlijk onder het voorbehoud dat er werkelijk een nog onbezette toestand met de energie  $E_2$  is. Dit aangeslagenelektron elektron is niet in een toestand van minimale energie, en het elektron heeft dus de neiging weer terug te vallen naar zijn oorspronkelijke toestand, daarbij een foton emitterend. Alles natuurlijk onder het voorbehoud dat er werkelijk nog een onbezette toestand is met de energie  $E_1$ . Het emitteren van een foton kan dan op twee manieren:



Figuur 1.19 Spontane emissie (schematisch): Een elektron valt terug van hoge naar lage energie en zendt daarbij een foton uit in een willekeurige richting en met willekeurige fase tov de aanwezige fotonen.



Figuur 1.20 Gestimuleerde emissie (schematisch): Een elektron valt terug van hoge naar lage energie, gestimuleerd door de aanwezige fotonen, en zendt daarbij eenzelfde foton uit, in fase met en in dezelfde richting als de aanwezige fotonen.

1. het gemitteerde foton wordt op een willekeurig moment en/of in een willekeurige richting uitgezonden: spontane emissie (fig. 1.19);
2. het gemitteerde foton is ‘in de pas’ met de invallende fotonen: gestimuleerde emissie van coherent licht (fig. 1.20);

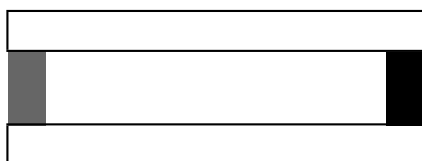
**Laser-voorwaarden** Hoe kunnen we er nu voor zorgen dat we zoveel mogelijk gestimuleerde emissie krijgen, zodat het laserlicht sterk wordt (blijft)? Daarvoor moeten we aan drie voorwaarden voldoen.

1. het gemitteerde foton moet de juiste energie, fase en richting hebben;
2. het grond-niveau, met energie  $E_1$ , en het emissie-niveau, met energie  $E_2$ , moeten grotendeels onbezet zijn;
3. de lichtstraal die naar buiten treedt is voldoende sterk en gericht;

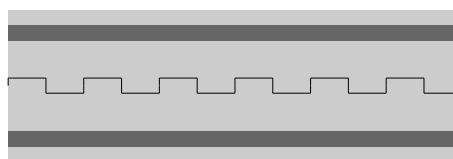
Het eerste bereiken met behulp van een *optische trilhaolte*. Daarbij moet gedacht worden aan bijvoorbeeld de ruimte tussen twee evenwijdige spiegels, of een ruimte waarin een patroon op ‘optische afstanden’ (nm) is herhaald.

Het tweede bereiken we met behulp van *pompen*. Daarbij kan je denken aan uitwendige botsprocessen waarin bij voorkeur elektronen van het *grond-niveau*  $E_1$  worden aangeslagen naar het *pomp-niveau*  $E_3$ , dat iets ‘boven’ het *emissie-niveau*  $E_2$  moet liggen. Daardoor wordt het laagste (grond-)niveau ‘leeg’ gemaakt zonder direct het emissie-niveau vol te maken.

Tenslotte kunnen we een eenvoudige truc gebruiken bij de keuze van de spiegels in de optische trilholtte: we maken één van beide spiegels **halfdoorlatend**: voor een heel klein gedeelte doorzichtig (zeg voor n promille). Dan zal een klein beetje van het licht in de optische trilholtte naar buiten komen als het gezochte signaal. De hoge intensiteit is dan het gevolg van de *coherentie* van het licht.



Figuur 1.21 Spiegel trilholtte: aan de einden zitten zeer goed spiegelende, zeer precies planparallelle, oppervlakken; aan slechts één zijde is de spiegel iets doorlatend.



Figuur 1.22 Diffractie trilholtte: in de halfgeleider contactlaag is een golvend ‘profiel’ gemaakt (in het vlak van de laag), waardoor fotonen worden gestimuleerd in de laag te blijven

**Optische trilholtte** Bij gaslasers wordt een **optische trilholtte** gemaakt door het licht te laten lopen in de ruimte tussen twee naar elkaar toegekeerde spiegels (zie fig. 1.21). De as loodrecht op de evenwijdige spiegelvlakken is de **optische as** van de trilholtte. Met de spiegels kunnen we de fotonen met de juiste richting selecteren. Immers, als een foton *niet* in de richting van de as van de spiegels wordt geëmitteerd, dan zal het foton òf direct al *niet meer weerkaatst* worden door een spiegel, òf het licht zal zó scheef op de spiegel vallen dat het niet meer op een volgende spiegel valt maar de buis uit. Het licht dat niet meer op de spiegels valt gaat verloren voor het laseren. Maar het licht dat wèl in de richting van de as van de spiegels wordt gemitteerd zal vele malen door de spiegels weerkaatst kunnen worden—en dus heel lang in de trilholtte zijn. In de optische trilholtte komt een heel sterke lichtgolf te staan van fotonen met allemaal dezelfde **fotonrichting**, die van de optische as.

**Coherentie** De fotonen met verschillende energie zullen ook een verschillende golflengte hebben. Maar golven met verschillende golflengten zullen elkaar onvermijdelijk uitdoven. Fotonen met één bepaalde energie (o.a. bepaald door de spiegelafstand) zullen overblijven. Maar ook golven die dezelfde golflengte hebben maar van fase verschillen zullen elkaar uitdoven. Uiteindelijk blijven, in de optische trillholte, alleen fotonen over met *dezelfde* energie en *dezelfde* fase: **coherente fotonen**. Bij de vastestof-trillholte worden geen spiegels gebruikt, maar worden langs de optische as—in de laag van de stof waar de gestimuleerde emissie zal gaan optreden—op regelmatige afstand (gelijk aan de golflengte!) verdichtingen en verdunningen in de stof aangebracht. (Bij de halfgeleider galliumarsenide zijn dat Al atomen die wel of niet zijn aangebracht). Zulk een zich regelmatig herhalende structuur wordt een **diffractiepatroon** genoemd. Door het diffractiepatroon zullen fotonen alleen dan langere tijd in de trillholte kunnen verblijven, als hun golflengte en richting past bij de vorm van de verdichtingen en verdunningen van het patroon. De ‘buiken’ van de golf moeten samenvallen met de plaats waar extra veel geleiding is, de ‘knopen’ van de golf met de plaats waar juist weinig geleiding is. En de plaatsen met veel of weinig geleiding vallen op de plaatsen met verdichtingen of verdunningen.

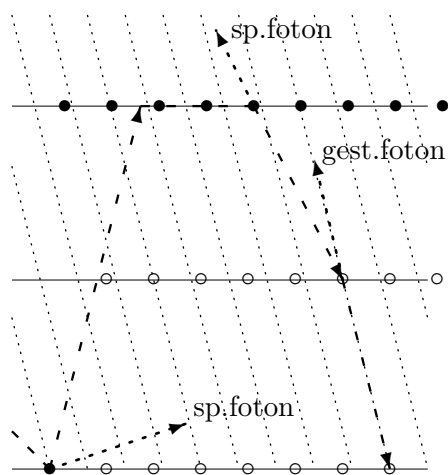
**Pompen** Het middel om tot verhoging van gestimuleerde emissie te komen is **pompen**. Daarbij worden elektronen met een iets hogere energie dan die van de *laserstraling* ‘ingestraald’. Die elektronen behoeven niet van ver te komen, maar kunnen bijvoorbeeld ontstaan tijdens elektrische ontladingen in het gas (waarbij uit de ionisatie processen snelle elektronen (of ionen) vrijkomen). De ‘ingestraalde’ energie—de pompenergie van de elektronen of ionen—moet voldoende hoog zijn: voldoende om een elektron van het grond-niveau naar het pomp-niveau aan te slaan. Samenvattend: er zijn drie interessante energieniveaus bij een laser:

$E_1$  het **grond-niveau**, van waar gepompt wordt naar het pomp-niveau;  
 $E_3$  het **pomp-niveau**, van waar de elektronen spontaan terugvallen naar het emissie-niveau.

$E_2$  het **emissie-niveau**, van waar gestimuleerde emissie plaats vindt naar het grond-niveau;

Op het emissie-niveau, met energie  $E_2$ , waarheen een gepompt elektron na enige tijd valt, zal het elektron maar heel kort blijven, omdat het—onder invloed van de fotonen in de optische trillholte—*gestimuleerd* wordt om verder terug te vallen naar het grond-niveau. Het gevolg van pompen is *emissie versterking*. Wat gebeurt er nu precies bij het pompen?





Figuur 1.23 Energieniveaus bij pompen: horizontaal wordt de tijd gedacht, verticaal de energie. Een van links komend elektron slaat eerst een elektron aan naar het pomp-niveau, daarvandaan valt het spontaan terug naar het emissieenergie-niveau, vanwaar het direct gestimuleerd wordt naar het grond-niveau terug te vallen

Tengevolge van een botsing tussen een elektron (uit de ontlading) en een elektron (van het atoom in grond-niveau  $E_1$ ) wordt het atoom aangeslagen en het elektron ‘gepompt’ naar het pomp-niveau  $E_3$ . Vandaar zal het (na enige tijd) spontaan kunnen terugvallen naar o.a. het emissie-niveau  $E_2$ . Maar daar vandaan zullen de elektronen direct, door *gestimuleerde emissie*, ‘door’vallen naar het grond-niveau  $E_1$ . Als het pompen voldoende snel gaat, worden elektronen op het grond-niveau binnen de kortste keren weggepompt naar het pomp-niveau, en het proces herhaalt zich. Op het pomp-niveau zullen *veel meer* elektronen zijn dan normaal, in tegenstelling tot op het grond-niveau; dat noemt men **populatie-inversie**.

**Pompmechanismen** We bespraken het ‘elektronisch pompen’ door *elektronen* uit de gasontlading. Het pompen kan ook gebeuren door *licht* van kortere golflengte (dus hogere energie) dan het licht dat we willen versterken. Dat ‘optisch pompen’ gebeurt bijvoorbeeld in kleurstoflasers. Maar bij de gaslasers gebeurt het pompen door de elektronen uit de gasontlading, die ontstaat door een kV spanning over het gas te zetten. Eerder kwamen we nog de vaste stoflaser tegen. Daar wordt het ‘injectie pompen’ verzorgt door de ‘genjecteerde’ (erin geschoten) elektronen. Door de (hoge) sperspanning over de dunne contactlaag worden elektronen in de contactlaag geschoten.

**Conclusie** *De laserwerking is gebaseerd op gestimuleerde emissie van elektronen op het emissie-niveau van een atoom. Daartoe moeten de atomen in een optische trillholte zijn. De gestimuleerde emissie moet worden versterkt door ‘pompen’, waardoor van het grond-niveau aangeslagen elektronen het emissie-niveau bereiken via het pomp-niveau. Zo ontstaat een coherente, monochromatische, gelijkgerichte bundel fotonen.*

- Opg 1.8.1 \*\*\*** Bij een laser treden de volgende 'activiteiten' op:  
I gestimuleerde emissie,  
II bereiken populatie inversie,  
III een pompmechanisme,  
IV absorptie van een foton met laserfrequentie.  
De activiteiten treden op in de volgorde:  
A IV, II, III, I  
B II, III, IV, I  
C IV, III, II, I  
D III, II, IV, I
- Opg 1.8.2 \*** Bij een robijn-chroom-laser spelen de getekende energieniveaus van chroom een wezenlijke rol. Het pompen gaat met een Xenon flitslamp. De golflengte van dit flitslicht resp. die van het laserlicht zijn:  
A 680 nm resp. 550 nm  
B 550 nm resp. 550 nm  
C 680 nm resp. 680 nm  
D 550 nm resp. 680 nm
- Opg 1.8.3 \*\*\*** Toepassingen van laserlicht zijn gebaseerd op de specifieke eigenschappen ervan. Zo kan men er hologrammen mee maken vanwege:  
A de grote bundelintensiteit  
B de coherentie van het licht  
C de monochromatie van het licht
- Opg 1.8.4 \*\*\*** Toepassingen van laserlicht zijn gebaseerd op de specifieke eigenschappen ervan. Men kan er signaaltransport door glasvezels mee realiseren vanwege:  
A het zeer hoge bundelvermogen  
B de gelijkgerichtheid van de fotonen  
C de monochromatische straling  
D de coherentie van de straling
- Opg 1.8.5 \*** Het door een radioactief element uitgezonden  $\gamma$ -spectrum:  
A is een continu spectrum  
B is een lijnenspectrum  
C bestaat uit straling met zeer kleine energiekwanta  
D bestaat uit straling met een golflengte groter dan die van röntgenstraling

## MEERKEUZEANTWOORDEN

**Hoofdstuk 1 Atoom en elektron****1.2 Atoomkern**

- 1.2.3 C
- 1.2.4 A
- 1.2.5 B
- 1.2.6 C

**1.3 Elektronwolk**

- 1.3.3 A impulsmoment=  
massa.snelheid.afstand
- 1.3.4 C
- 1.3.5 B de verschillen 1 en 2 eV  
komen dubbel voor
- 1.3.6 A bovendien geldt ook  
impulsmomentbehoud

**1.4 Waterstofatoom-model van bohr**

- 1.4.1 C
- 1.4.5 C
- 1.4.6 B
- 1.4.8 D energie gaat met  $Z^2$

**1.5 Het golfmodel**

- 1.5.1 B
- 1.5.2 C
- 1.5.5 B
- 1.5.6 B
- 1.5.7 C 'midden' frequentie en korte  
golflengte

**1.6 Golfmodel voor atomen**

- 1.6.1 B kwantisatie in  
magneetveldrichting
- 1.6.2 A althans: van de energieschil
- 1.6.3 D m van magnetisch
- 1.6.4 A l van lengte
- 1.6.5 D
- 1.6.6 D
- 1.6.7 C
- 1.6.8 D
- 1.6.9 D (2,1,0) is aangeslagen  
toestand
- 1.6.10 D  $n=1, s=+1/2$  en  $n=1, s=-1/2$
- 1.6.11 C

**1.7 Straling**

- 1.7.5 A
- 1.7.6 A met minimale golflengte en  
maximale frequentie bepaald  
door spanning

- 1.7.7 A de spanning bepaalt  
hardheid van de straling

- 1.7.8 D

- 1.7.9 A kernlading met  $e$   
vermeerderd

**1.8 Laserstraling**

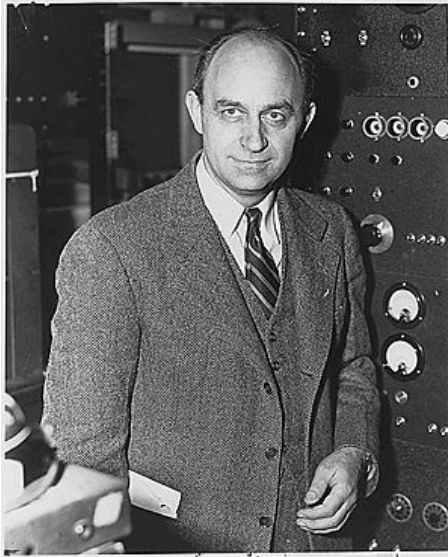
- 1.8.1 D populatieinversie tgv  
pompen

- 1.8.2 D

- 1.8.3 B faseverschillen bepalen  
afstand

- 1.8.4 B

- 1.8.5 B



Enrico Fermi  
(1901-1954)

*De in Rome geboren italiaanse fysicus Enrico Fermi hield zich, als hoogleraar te Rome, aanvankelijk bezig met elektronenspectra, en in het bijzonder de elektronen‘statistiek’. Onafhankelijk van Dirac vond hij de zo-genoemde ‘Fermi-Dirac’-verdeling van de elektronen over de energietoestanden, waarmee de grondslag werd gelegd voor het begrijpen van vele vaste-stof eigenschappen. Het is dat deel van zijn werk dat voor ons hier interessant is. Sinds 1932 hield hij zich echter bezig met een totaal ander gebied van de natuurkunde: de kernfysica. Ook daar deed hij baanbrekend werk. Zo verklaarde hij het  $\beta$ -verval met*

*behulp van het massalozе deeltje neutrino (dat overigens door Pauli was bedacht). Verder toonde hij aan dat het neutron zich kan omzetten in een proton onder uitzending van een elektron:  $\beta$ -straling. Daarvoor ontving hij in 1938 de Nobelprijs in Stockholm, waarna hij linea recta naar de Verenigde Staten van Amerika reisde om zijn werk daar voort te zetten. Hij bouwde in Chicago de eerste (grafiet)kernreactor, die in 1942 de eerste beheerste kernreactie opwekte. Tijdens de tweede wereldoorlog werkte hij mee aan het militair gebruik van kernenergie voor de ontwikkeling van het eerste atoomwapen.*

## Hoofdstuk 2

# KRISTAL EN ELEKTRON

### DOELSTELLINGEN

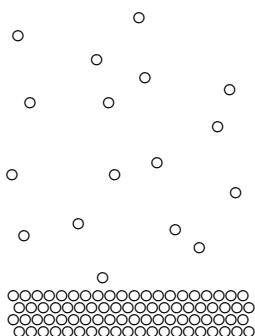
Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de hierna volgende begrippen zodanig te hebben opgenomen, dat u ermee kan werken en dat u ze kan toepassen op eigenschappen van elektrische vaste stof componenten:

- kristal en kristalrooster;
- gebonden elektron, bindingselektron en geleidingselektron;
- n-type geleiding en p-type geleiding;
- beweeglijke lading, gat, effectieve massa;
- zuivere en onzuivere stof, intrinsiek en extrinsiek, eigen en oneigen geleiding;
- donor en acceptor, n-halfgeleider en p-halfgeleider;
- meerderheids- en minderheids-ladingen;
- $n^+$ -halfgeleider en  $p^+$ -halfgeleider;
- ideale halfgeleider, geleidingselektronen en gaten;
- driftsnelheid en beweeglijkheid;
- veldstroom, de wet van Ohm;
- geleidbaarheid, soortelijke geleiding, soortelijke weerstand;
- invloed onzuiverheid op metaalgeleiding, de wet van Mathiesen;
- Hallspanning, Hallveld, Hallweerstand, elementaire weerstand;
- relaxatietijd, recombinatietijd en levensduur;
- diffusiestroom, de wet van Fick, diffusiecoëfficiënt;
- verdelingswet van Boltzmann;
- diffusiecoëfficiënt en beweeglijkheid, Einstein relatie;
- verdelingswet van Fermi-Dirac, Fermi-energie en voltapotentiaal;
- bandenmodel van elektron-energieën;
- bindingsband en geleidingsband, bandafstand;

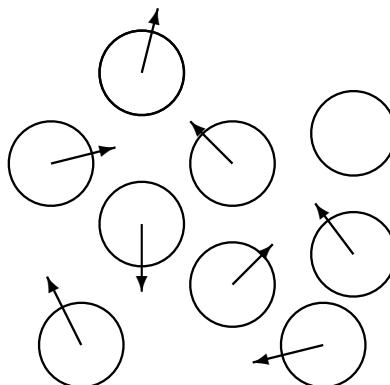
## 2.1 Elektronen in vastestof

**Atoom, kristal en ion** We hebben gezien hoe de elektronen hun rol spelen bij de samenstelling van de atomen. We zullen nu onderzoeken hoe de elektronen zich gedragen als de atomen in de *vastestof*, en wel in een *kristal*, zitten. Reeds in 1895(!) werd door Lorentz het belang van elektronen voor elektrische geleiding onderkend. Is er een verschil in het gedrag tussen een *elektron* in een *atoom* en een elektron in een kristal? Inderdaad is er een verschil, want het blijkt dat de meeste kristallen niet atomen, maar *ionen* bevatten, zodat er ‘vrije’, ‘beweeglijke’, elektronen in de vastestof kunnen zijn. Hoe komt dat? Daartoe bezien we eerst ‘atomen’ en elektronen in de fasen gas, vloeistof en vastestof.

**Atomen in de gasfase** In het gas zijn de atomen zover uit elkaar dat we ieder atoom als elektrisch neutraal—dus als een geheel—kunnen opvatten. De onderlinge afstand is wel 10 maal de atoomdiameter. De atoomdiameter varieert van zo’n  $3 \cdot 10^{-11}$  m (waterstof) tot  $3 \cdot 10^{-10}$  m (francium); zie fig. 2.1. Bij verlaging van de temperatuur neemt de snelheid van de atomen af, en dus ook de druk die daaruit voortkomt. Bij een bepaalde temperatuur, de condensatietemperatuur, is de druk onvoldoende om de atomen uit elkaar te houden: het gas condenseert en de atomen vormen een vloeistof.



Figuur 2.1 Atomen in gas- en vloeistoffase: de onderlinge afstand van de atomen in de gasfase is ongeveer 10 keer groter dan in de vloeistoffase. De snelheden van de atomen verschillen niet veel, omdat de snelheid met de wortel uit de temperatuur gaat.



Figuur 2.2 Atomen in vloeistoffase: de pijltjes geven de bewegingsrichting van het atoom aan. Pas op: dit is een vergroting van de vloeistoffase in de figuur hiernaast. Als tegen elkaar aan liggende atomen uit elkaar bewegen kan een naburig atoom zich verplaatsen door zich ertussen door te wringen (bijv. linksboven).

**Atomen in de vloeistof-fase** In de vloeistof liggen de atomen nagevoeg tegen elkaar aan, maar daarbij hebben ze nog wel de mogelijkheid om langs elkaar heen te bewegen. De onderlinge afstand tussen de kernen van de atomen is zo'n  $3 \cdot 10^{-10}$  m, 30 nm dus; zie fig. 2.2. Bij verder verlaging van de temperatuur stolt, bij de stoltemperatuur, de vloeistof. De enige verandering die nu optreedt is, dat de bewegingsenergie onvoldoende is om de atomen langs elkaar te laten bewegen: ieder atoom krijgt zijn vaste plekje, waar het nog wat mag trillen en de atomen vormen een vastestof.

**Atomen in de vastestof-fase** In de *vastestof* zitten atomen echter niet willekeurig ten opzichte van elkaar. Wat de franse Haüy veronderstelde (1781)—verder uitgewerkt door de rus Fjodorov (1890)—werd door de duitse von Laue met behulp van röntgenstraling 'gevonden' (1912): er ontstaat een *geordende schikking*. Die geordende structuur noemt men *kristal*; de atomen zitten 'vast' in een rooster, het **kristalrooster**. Macro-scopisch (met het blote oog) gezien kan een vastestof echter ongeordend (*amorf*) lijken, omdat het uit allemaal (onooglijk) kleine kristalletjes bestaat.

Er blijken vele verschillende kristalroosters te zijn. Voor ons zijn van belang de zogenaamde **dichtgepakte stapelingen**: de atomen worden als knikkers op elkaar gestapeld. De kleinste 'bouwsteen' van zo'n kristal heet **elementaire cel**. Er blijken nu, bij deze dichtgepakte stapelingen, toch nog twee verschillende mogelijkheden te zijn van stapelen. Deze worden genoemd naar de vorm van de elementaire cel: **kubische stapeling** als de elementaire cel een kubus is, en **hexagonale stapeling** of **dichtste stapeling** als de elementaire cel als grondvlak een gedeelte van een zeshoek (hexagon) heeft. In tabel 2.1 op pag. 72 wordt van de elementen aangegeven van welk type het kristalrooster is.

**Elektronen in de vastestof-fase** In de vastestof toestand zullen we verschil maken tussen twee soorten elektronen. Elektronen in de naar binnen gelegen schillen van de oorspronkelijke atomen blijven daar: *gebonden elektronen*. De gebonden elektronen vormen samen met de kern een *ion*. Het *kristal* bestaat uit ionen (een ion heeft in totaliteit dus een positieve lading, omdat er elektronen weg zijn uit het neutrale atoom), tezamen met elektronen afkomstig uit de buitenste schil. De elektronen die in het atoom in de buitenste schil zitten, de **valentie-elektronen**, zullen in het kristal een andere positie krijgen. In het kristal liggen de atomen namelijk zó dicht op elkaar, dat die buitenste elektronen sterk onder de invloed komen van de elektronen en kernen uit andere atomen.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII										
1																2 He gas										
2	3 Li A2	4 Be A3														5 B A6	6 C A4,9	7 N gas	8 O gas	9 F gas	10 Ne gas					
3	11 Na A2	12 Mg A3																			13 Al A1	14 Si A4	15 P A16	16 S A16	17 Cl gas	18 Ar gas
4	19 K A2	20 Ca A1	21 Sc A3	22 Ti A3	23 V A2	24 Cr A2	25 Mn A12	26 Fe A2	27 Co A3	28 Ni A1	29 Cu A1	30 Zn A3	31 Ga A11	32 Ge A4	33 As A7	34 Se A8	35 Br liq.	36 Kr gas								
5	37 Rb A2	38 Sr A1	39 Y A3	40 Zr A3	41 Nb A2	42 Mo A2	43 Tc A3	44 Ru A3	45 Rh A1	46 Pd A1	47 Ag A1	48 Cd A3	49 In A6	50 Sn A5	51 Sb A7	52 Te A8	53 I A11	54 Xe gas								
6	55 Cs A2	56 Ba A2	La-u	72 Hf A3	73 Ta A2	74 W A2	75 Re A3	76 Os A3	77 Ir A1	78 Pt A1	79 Au A1	80 Hg liq.	81 Tl A3	82 Pb A1	83 Bi A7	84 Po	85 At	86 Rn gas								
7	87 Fr	88 Ra	Ac-r	104 Ku	105 Ha	106 Un																				

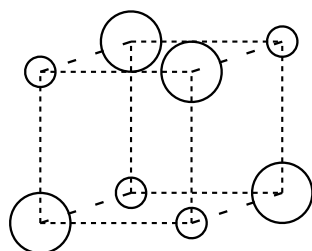
  

57 La A3	58 Ce A1	59 Pr A3	60 Nd A3	61 Pm	62 Sm A10	63 Eu A2	64 Gd A3	65 Tb A3	66 Dy A3	67 Ho A3	68 Er A3	69 Tm A4	70 Yb A1	71 Lu A3
89 Ac A1	90 Th A1	91 Pa A6	92 U A20	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk A3	98 Cf A3	99 Es A3	100 Fm A3	101 Md A4	102 No A1	103 Lr A3

Tabel 2.1 Periodiek systeem met aanduiding van het type *kristal/rooster* bij kamertemperatuur en druk. De aanduiding  $A_n$  onderin het elementhokje is het structuursymbool; A1 (midzidskubisch) vinden we veel bij metalen, bij de halfgeleiders (laatste groep IV) veel A4 (kubisch, verwant aan hexagonale stapelingen A3, A8 en A9); A2 is midblokskubisch, A12 en A13 kubisch, A5 en A6 tetragonaal, A7 en A10 rombisch en A11, A16 en A20 orthorombisch.



**Ionenkristal** Er zijn *kristallen* die uit ionen bestaan, hetzij met twee elementen (bijv. NaCl), hetzij met meer elementen (bijv. BaTiO<sub>3</sub>). Daarbij dienen elektronen uit de buitenste schil van het ene atoom als opvulling van een, nog niet geheel bezette, buitenste schil van een ander soort atoom (of molecule).



Figuur 2.3 Elementaire cel van NaCl (keukenzout); de grote atomen zijn Cl (negatief ion), de kleine Na (positief ion).

Bij keukenzout heeft Na juist één elektron in de M-schil, terwijl Cl er één tekort komt om de p-baan in de M-schil op te vullen. Uit de atomen Na en Cl ontstaan dan de ionen Na<sup>+</sup> en Cl<sup>-</sup>. De positieve en negatieve ionen vormen tezamen een ionenkristal, waarbij *alle elektronen* aan ionen gebonden zijn; in het **ionenkristal** zijn géén elektronen beschikbaar voor elektrische geleiding; 't zijn *isolatoren*.

**Elektron-toestanden** In het vervolg beperken we ons tot *kristallen* waarbij er wèl elektronen overblijven die niet in ionen zitten. Die elektronen onderscheiden we naar hun **elektrontoestand**; namelijk:

**gebonden elektronen** de elektronen die gebonden zijn aan één ion, aan de ionkern. Tezamen vormen ze elektronwolken;

**bindingselektronen** de elektronen die onder invloed staan van twee (soms meer) ionen. Ze zijn 'dezelfde' als de elektronen die in moleculen de bindingen tussen de atomen geven, en dan valentie-elektronen heten;

**geleidingselektronen** de elektronen die onder de invloed staan van 'alle' ionen en door het gehele kristal bewegen.

Geleidingselektronen zijn typerend voor geleiders. De naam suggereert dat ze alle elektrische geleiding verzorgen. We zullen echter zien, dat ook bindingselektronen, in de vorm van gaten, daaraan een bijdrage leveren.

**Opg 2.1.1** \* Welke bewering is juist? Keukenzout (NaCl) is in vaste toestand een slechte geleider, omdat er in het kristal:

- A geen valentieelektronen voorkomen
- B alleen gebonden elektronen voorkomen
- C geen geleidingselektronen voorkomen

**Opg 2.1.2** \* I De zuivere vastestof bestaat veelal uit negatieve ionen met daar omheen de elektronen uit de buitenste schil.

II De onderlinge afstanden van de atomen in bijvoorbeeld koper zijn nog wel enkele atoomdiameters groot.

- A beide waar
- B alleen I waar
- C alleen II waar
- D beide onwaar



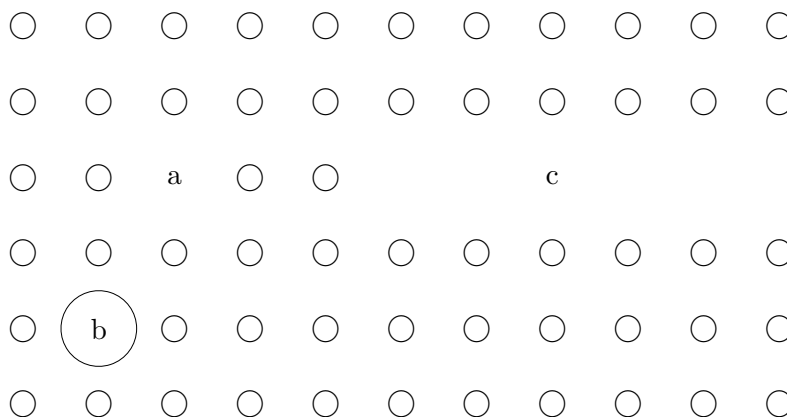
## 2.2 Elektronen in ideale geleiders

**Geleidbaarheid van ideale geleiders** Bij *ideale geleiders* denken we aan metalen in de vastestof fase, die een groot vermogen hebben tot geleiding van elektrische stroom. De soortelijke geleiding is van de orde  $10^7$  S/m (de eenheid van geleidbaarheid is Siemens per meter). De geleidbaarheid van metalen blijkt afhankelijk te zijn van:

**temperatuur** de soortelijke geleiding blijkt min of meer *omgekeerd evenredig* met de temperatuur;

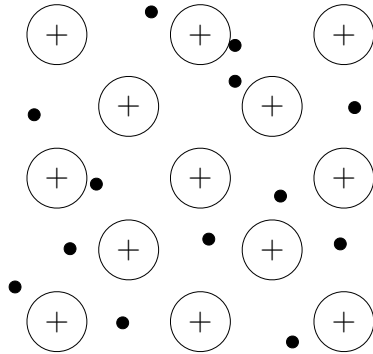
**kristalrooster zuiverheid** deze zuiverheid heeft betrekking op de mate van perfectie van de structuur van het kristalrooster; die bevat namelijk altijd wel roosterfouten. Voorbeelden daarvan zijn een **vacature** (er ontbreekt gewoon een *atoom*), een **dislokatie** (twee roostervlakken sluiten niet goed aaneen), en een *amorfe* vastestof (bestaande uit vele microscopische kleine kristallen);

**chemische zuiverheid** de geleidbaarheid is heel gevoelig voor de aanwezigheid van andere elementen in de vastestof, een **interstitieel atoom** (een ‘vreemd’ atoom dat er tussen gepropt is), ook al zijn die andere elementen metalen (zie fig. 2.4). De soortelijke geleiding blijkt min of meer *omgekeerd evenredig* met de verontreinigingsgraad;

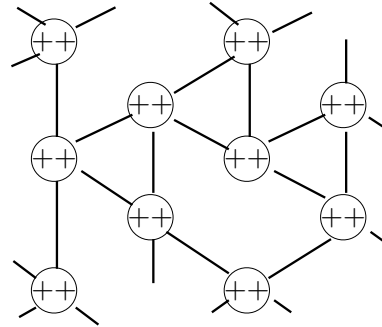


Figuur 2.4 Kristalrooster met roosterfouten: a. vacature; b. interstitieel atoom; c. dislokatie (horizontaal halfvlak ontbreekt).

**Typen ideale geleiders** Op atomair niveau blijkt een geleider een kristal te hebben, dat bestaat uit ‘dichtgepakte’ *metaal*ion ‘bolletjes’. Je kan daarbij denken aan de manier waarop glazen knikkers gaan liggen wanneer je heel veel knikkers in een pot doet (en schudt). Tussen die ionen zijn *bindingselektronen* en/of geleidingselektronen, zodat een



Figuur 2.5 Een n-type geleider met een kubisch rooster; de geleidingselektronen zijn als • aangegeven.



Figuur 2.6 Een p-type geleider met een hexagonaal rooster; de bindingselektronen zijn als verbindinglijn aangegeven.

stukje kristal netto elektrisch neutraal is (zie ook de figuren 2.5 en 2.6). We onderscheiden twee typen geleider in het bijzonder:

**n-type geleider** veelal met  $1^+$  ionen (bijv.  $\text{Ag}^+$ ,  $\text{Cu}^+$ ,  $\text{Au}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ );

gekenmerkt door:

- alléén geleidingselektronen;
- geen bindingselektronen;

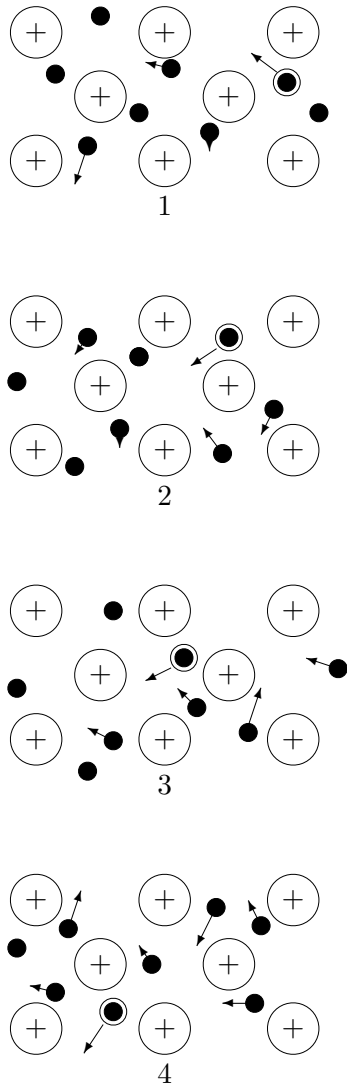
**p-type geleider** veelal met  $2^+$  ionen (bijv.  $\text{Be}^{++}$ ,  $\text{Zn}^{++}$ ,  $\text{Cd}^{++}$ ,  $\text{Pb}^{++}$  maar ook  $\text{Al}^+$ );

gekenmerkt door:

- alléén bindingselektronen met wisselende positie;
- geen geleidingselektronen;

Praktisch zijn sommige metalen ‘twijfelgevallen’, zoals de semi-metalen bismuth en tin, die èn van het n-type èn van het p-type iets hebben, en daardoor geschikt als soldeerelement. Veel n-type geleiders blijken een kubische kristalstructuur, en veel p-type geleiders een hexagonale structuur te hebben. Deze structuren kunnen echter gemakkelijk in elkaar overgaan (zoals bij de halfgeleiders).

Bij n-type geleiders zijn de geleidingselektronen de **beweeglijke ladingen**. De lading van een geleidingselektron is  $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Bij p-type geleiders zijn het de bindingselektronen die bewegen. Het blijkt echter veel praktischer om als **beweeglijke lading** van het p-type te nemen het ‘ontbrekende’ bindingselektron. Het ontbrekende bindingselektron wordt **gat** genoemd. De lading van een gat is tegengesteld aan de lading van het ontbrekende elektron, dus  $+e = +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .



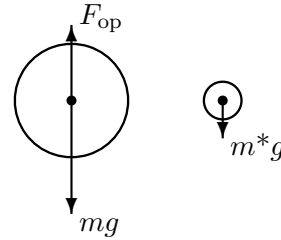
Figuur 2.7 Geleiding bij n-type geleider in een elektrisch veld naar *rechts* als functie van de tijd (achtereenvolgens de tijdstippen 1, 2, 3 en 4). Let op de positie van het met een extra rondje aangegeven geleidingselektron. Het geleidingselektron verplaatst gemiddeld *tegen* het veld in, naar *links*.

### Bewegen van lading in n-type geleider

Bij de n-type geleider zal een geleidingselektron (de naam zegt het al) eenvoudigweg door het elektrische veld naar de positieve spanning worden getrokken. Het zal daarbij de vóór haar gelegen geleidingselektronen voor zich uit duwen, en de achter haar gelegen elektronen in haar kielzog meetrekken—de hele rij geleidingselektronen beweegt dus tegelijkertijd. Het bindingselektron gedraagt zich als een negatief vrij elektron met lading  $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . Het is echter in andere opzichten *niet* gelijk te stellen met een vrij elektron: het gedraagt zich dan heel anders.

**Effectieve massa** Het geleidingselektron heeft niet alleen een lading, waardoor het aangelegde elektrische veld er greep op heeft, maar ook een massa, die bepaalt hoe log het reageert op veranderingen. De beweging van het geleidingselektron wordt verder beïnvloed door de velden van zowel de andere elektronen als van de geleiderionen. Dientengevolge gedraagt het geleidingselektron zich alsof het een massa heeft die verschilt van de elektronmassa  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ . Men kent om die reden aan het geleidingselektron een **effectieve massa**  $m^* = m_n$  toe; meestal is de effectieve massa  $m_n$  kleiner dan de elektronmassa  $m_e$ .

Ter illustratie: Vergelijk de (effectieve) massa  $m^*$  van een voorwerp in een vloeistof met de massa  $m$  in vacuüm in het zwaartekrachtveld. De botsingen van alle vloeistofmoleculen met het voorwerp resulteren in een opwaartse druk, waardoor de effectieve massa *kleiner* is dan de ‘normale’; het voorwerp lijkt ‘lichter’. Voor drijvende voorwerpen is de effectieve massa zelfs nul! Ook de effectieve massa van geleidingselektronen kan heel klein worden. Denk aan supergeleiding.



Figuur 2.8 De opwaartse druk van de vloeistof compenseert een gedeelte van de zwaartekracht. Daardoor lijkt het voorwerp lichter: de effectieve massa is kleiner dan de werkelijke massa.

**Ladingsdichtheid geleidingselektronen** De **ladingsdichtheid**  $\rho_n$  is de *lading* van de geleidingselektronen in een  $\text{m}^3$ . De lading volgt uit het *aantal* geleidingselektronen per  $\text{m}^3$ , de geleidingselektronendichtheid  $n_n$ , dat traditioneel wordt afgekort tot  $n$ , en de lading van één geleidingselektron  $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ :

$$\rho_n = -ne$$

Hoe is het aantal geleidingselektronen te bepalen? In een n-type geleider, hebben we naast de positieve metaalionen alleen maar geleidingselektronen. Totaal is het kristal neutraal, dus bepaalt de ionlading het aantal geleidingselektronen:

$$n = \text{iondichtheid} \times \text{aantal geleidingselektronen per ion}$$

Het aantal geleidingselektronen per ion moet bekend zijn (dat is helaas niet altijd gelijk aan de lading van het ion uit BINAS tabel 39a). Blijft te berekenen de *iondichtheid* (of *atoomdichtheid*), het aantal atomen per  $\text{m}^3$ . Als we de massa van een  $\text{m}^3$ , de massadichtheid, delen door de massa van één atoom krijgen we de atoomdichtheid:

$$\text{atoomdichtheid} = \frac{\text{massadichtheid}}{\text{atoommassa}}$$

De **atoommassa** wordt als volgt bepaald: zoek op de relatieve atoommassa  $A$  (BINAS tabel 38 en 104), en de atomaire massa-eenheid  $m_u$  (BINAS tabel 7):  $m_u = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ :

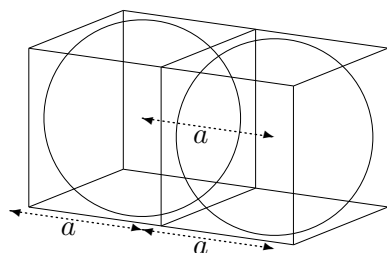
$$\text{atoommassa} = \text{relatieve atoommassa} \times m_u$$

**Voorbeeld Ag kristal; ladingsdichtheid geleidingselektronen** Bereken voor vast Ag de (geleidings)ladingsdichtheid  $\rho_n$ .

In Ag hebben we  $\text{Ag}^+$ -ionen (BINAS tabel 39a) doordat het Ag atoom één geleidingselektron afstaat. Uit de relatieve atoommassa 107,870 volgt de atoommassa, namelijk  $107,870 \cdot 1,661 \cdot 10^{-27} = 1,7917 \cdot 10^{-25}$  kg. De Ag massadichtheid, kortweg 'dichtheid' genoemd, is (BINAS tabel 8)  $10,50 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>, waarmee de Ag-iondichtheid wordt  $\frac{1,050 \cdot 10^4}{1,7917 \cdot 10^{-25}} = 5,860 \cdot 10^{28}$  /m<sup>3</sup>. Met dit gegeven volgt allereerst de dichtheid van de geleidingselektronen in vast Ag:  $n = 5,86 \cdot 10^{28} \cdot 1 = 5,86 \cdot 10^{28}$  /m<sup>3</sup>, en daarna de ladingsdichtheid van de geleidingselektronen  $\rho_n$ :

$$\rho_n = 5,86 \cdot 10^{28} \cdot -1,602 \cdot 10^{-19} = -9,39 \cdot 10^{+9} \text{ C/m}^3$$

### Kristalrooster en ionafstand



Figuur 2.9 Verband tussen de ionafstand en het volume van de elementaire cel bij kubusstapeling van atomen. De kubusribbe is gelijk aan de ion(kern)afstand.

De ionafstand  $a$  is af te schatten uit de *iondichtheid*. Ter vereenvoudiging denken we de ionen in kleine kubusjes die gestapeld zijn. De gemiddelde afstand tussen de ionen is dan gelijk aan de ribbe van zo'n kubusje: ionafstand = kubusribbe =  $a$ . De ribbe van de kubus bepaalt haar volume  $V = a^3$ , dus omgekeerd ribbe =  $a = V^{\frac{1}{3}}$ . Het omgekeerde van 'volume per ion' is 'ionen per volume': de iondichtheid. Voor kubische stapeling:

$$\text{ionafstand} = \text{iondichtheid}^{-\frac{1}{3}}$$

Bij de hexagonale dichtste stapeling zijn de atomen niet in kubusjes maar in tetraëders gestapeld en wordt de ionkernafstand iets kleiner.

**Voorbeeld Ag kristal; ionafstand** Berekenen voor vast Ag de afstand tussen de kernen van de ionen  $a$ .

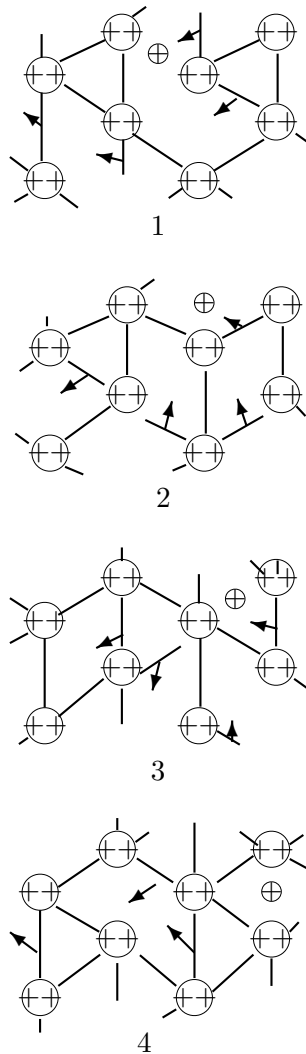
Volgens vorig voorbeeld is de dichtheid van de geleidingselektronen:  $n = 5,86 \cdot 10^{28}$  /m<sup>3</sup>. De afstand tussen de Ag-kernen wordt daarmee:

$$a = (5,860 \cdot 10^{28})^{-\frac{1}{3}} = 2,57 \cdot 10^{-10} = 0,257 \text{ nm}$$

Ter vergelijking gegevens over Ag-ionen en atomen (BINAS tabel 39a):

**Ag<sup>+</sup>** iondiameter = 0,252 nm;

**Ag** atoomdiameter = 0,288 nm;



Figuur 2.10 Geleiding bij p-type geleider in een elektrisch veld naar *rechts*. Met pijltjes wordt de positieverandering aangegeven van *bindingselektronen* die in een gat duiken; de achtereenvolgende tijden zijn met een cijfer aangeduid. Let op positie van het met + aangegeven gat; gemiddeld gaan elektronen naar links en gaten naar *rechts*.

Opg 2.2.1\*\* Bereken de *ladingsdichtheid*

$\rho_n$  resp.  $\rho_p$  van geleidingselektronen resp. gaten in de volgende metalen:

a Cu: 1 gel.elekt./ion

[Antw.  $\rho_n = -1,4 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ ]

b Al: 1 gat/ion

[Antw.  $\rho_n = +0,97 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ ]

Opg 2.2.2\*\* Bereken de ion-kernafstand  $a$  in de volgende metalen:

a Cu [Antw.  $a = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ]

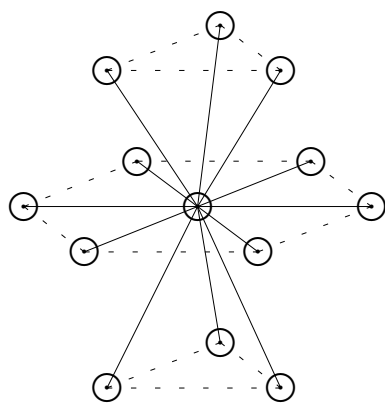
b Al [Antw.  $a = 2,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ]

### Bewegen van lading in p-type geleider

Bij de p-type geleider kunnen alleen *bindingselektronen* voor geleiding zorgen. Omdat *bindingselektronen* gebonden zijn aan twee ionen (soms meer) kunnen ze alléén van hun plaats komen als bindingen vlakbij ontbreken. Een *ontbrekend bindingselektron* wordt *gat* genoemd. Onder invloed van het elektrische veld kan een nabij gelegen *bindings-elektron* dit gat opvullen. Daarbij laat ze echter een nieuw gat achter zich en trekt a.h.w. een *bindings-elektron* achter haar mee. (vergelijk met de schuifpuzzels waarin de letters kunnen worden verschoven dankzij dat ene lege hokje). Het elektron beweegt, gemiddeld genomen, tegen het veld in. Zodoende *beweegt het gat* zich, gemiddeld genomen, met het veld mee. Het gat gedraagt zich als een *positieve vrije lading* met een lading  $+e$  en een effectieve massa  $m^* = m_p$ , die meestal veel kleiner is dan de elektronmassa  $m_e$ .



**Aantal gaten bij p-type geleider** Voor het bepalen van de *ladingsdichtheid van gaten* moeten we weten hoeveel gaten er zijn. De *gaten-dichtheid*  $n_p$  wordt traditioneel afgekort tot  $p$ . Een gat is een ontbrekende binding, dus moeten we eerst oplossen: ‘Hoeveel bindingen heeft een ion?’ We nemen als voorbeeld een kristal met een hexagonale *dichtste stapeling* van  $2^+$ -ionen—voor veel p-type geleiders is dat inderdaad zo—waarin ieder ion 12 *buuratomen* heeft.



Figuur 2.11 Ion met zijn buren bij een hexagonale dichtste stapeling. Let op de zeshoek in het vlak en de driehoeken (eenzesse zeshoek) boven en onder. Mogelijke bindingen zijn als lijn getrokken.

Ieder ion heeft 3 bovenburen, 3 onderburen en 6 ‘in-het-vlak’buren. Voor elke binding is een elektron nodig; ieder van de twee atomen, waartussen de binding is, hoeft slechts een ‘half’ elektron voor die binding te leveren. Immers, het bindingselektron hoort voor de ene helft bij het ene ion, en voor de andere helft bij het andere ion. Dus is het aantal te leveren bindings-elektronen per atoom  $12/2=6$ . Het atoom staat in werkelijkheid slechts zoveel elektronen af als de waardigheid van het ion is—meestal is de waardigheid 2. Van de 6 bindings-elektronen zijn er slechts 2 bezet, dat resulteert in 4 gaten per atoom.

**Voorbeeld Be-kristal** Bereken voor Be de *ladingsdichtheid* van gaten.

Uit de massadichtheid  $= 1850 \text{ kg/m}^3$ , en de ionmassa  $= 9,01 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 14,96 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  volgt de iondichtheid  $= 1,24 \cdot 10^{29} / \text{m}^3$ , en ionafstand  $= 0,201 \text{ nm}$  (vgl BINAS 39a: atoomstraal  $= 0,224 \text{ nm}$ ). De Be-ionen zijn gerangschikt in een hexagonaal (zeshoekig) rooster waarin ze als bollen gestapeld zijn. De ladingsdichtheid van de gaten is dus :

$$\rho_p = 4 \cdot e \cdot \text{iondichtheid} = +7,9 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$$

**Opg 2.2.3 \*\*\*\*** Bereken de ladingsdichtheid van gaten, aannemende dat de kristalroosters dichtste stapelingen zijn van tweewaardige ionen, voor:

- a Pb [Antw.  $\rho_p = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ ]  
 b Zn [Antw.  $\rho_p = 4,2 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ ]

**Opg 2.2.4 \*** Voor de gaten geleiding onder invloed van een uitwendig veld geldt, dat het gat wordt verplaatst doordat:

- I een vrij elektron in een gat wordt getrokken.  
 II een gebonden elektron in een gat wordt getrokken.  
 A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar



## 2.3 Elektronen in halfgeleiders

**Zuivere halfgeleider** Halfgeleiders zijn elementen die in de zuivere vastestof fase een verwaarloosbaar elektrisch geleidingsvermogen hebben. Men noemt eigenschappen in de **zuivere stof** de zuivere of **intrinsieke** eigenschappen, dus ‘van binnen uit’. Bij halfgeleidende materialen denken we aan de **halfgeleider** elementen die praktisch veel worden toegepast, zoals silicium (Si) en, in mindere mate, germanium (Ge). Ook de halfgeleider galliumarsenide (GaAs), met een *ionenkristal*, wordt steeds meer gebruikt voor optische toepassingen. Mogelijk zal indium-stibinaat (InSb) in de toekomst belangrijk worden. Zoek die halfgeleider elementen met donoren en acceptoren eens op in het periodiek systeem van fig. 1.4.

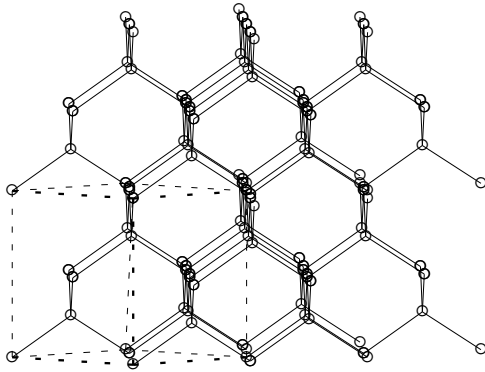
**Intrinsieke geleiding** Indien de halfgeleider-ionen, ten gevolge van een temperatuur botsing, of een ander effect zoals lichtinval, een bindingslektron los laten, dan ontstaan er tegelijk een geleidingslektron en een gat. Zowèl het geleidings-elektron als het gat dragen dan bij aan de *zuivere geleidbaarheid* van het materiaal. De soortelijke geleiding van de *zuivere halfgeleider* heeft de volgende eigenschappen:

- orde van grootte** 1 S/m; een factor  $10^7$  kleiner dan die van metalen;
- temperatuurafhankelijkheid** min of meer exponentieel stijgend;
- zuiverheidsgevoeligheid** extreem gevoelig voor de zuiverheid van het kristal m.b.t. aanwezigheid van andere elementen, of verstoring van de kristalroosterstructuur;

**Extrinsieke halfgeleider** Halfgeleiders worden heel vaak toegepast in een onzuivere vastestof vorm. Daartoe worden ze ‘verontreinigd’, *gedoteerd*, met andere elementen. De eigenschappen van de **onzuivere stof** heten onzuiver of **extrinsiek**, ‘van buitenaf’. Door een geschikt element te kiezen voor de **doting** is het mogelijk de geleidbaarheid van de *onzuivere halfgeleider* aanzienlijk te verhogen. Zo ontstaan er bij halfgeleiders twee bijzondere dotering-typen, afhankelijk van het soort toegevoegde element:

- n-type halfgeleider** door het toevoegen van atomen van een **donor** element ontstaan extra geleidings-elektronen in het kristal;
- p-type halfgeleider** door het toevoegen van atomen van een **acceptor** element ontstaat een tekort aan bindings-elektronen in het kristal, dus extra gaten;

Hoe kunnen we begrijpen, dat een gedoteerd atoom *extra geleiding* doet ‘ontstaan’? Daartoe bekijken we beide typen afzonderlijk.



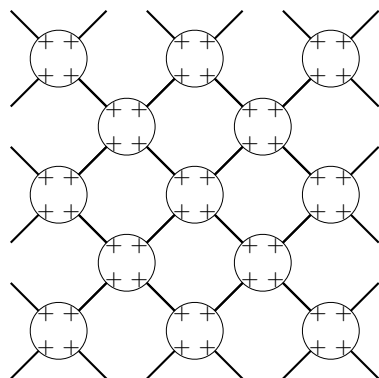
Figuur 2.12 Kubische celstructuur van een silicium of germanium kristal; let op de vier bindingen (vierwaardige elementen) en herken de quasi-hexagonale zeshoekstructuur.

	III	IV	V
2	5 B tetra- gonaal	6 C kubisch	7 N gas
3	13 Al midzijds- kubisch	14 Si kubisch	15 P ortho- rombisch
4	31 Ga ortho- rombisch	32 Ge kubisch	33 As hexa- rombisch
5	49 In tetra- gonaal	50 Sn kubisch*	51 Sb hexa- rombisch

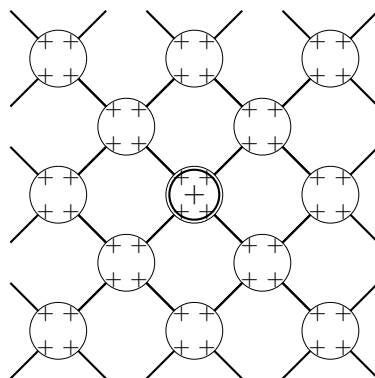
Figuur 2.13 Deel *periodiek systeem* rond de halfgeleiders. In de middelste kolom IV staan de bekende halfgeleiders Si en Ge (ook de combinaties GaAs en InSb behoren daartoe); links daarvan staan de *acceptoren*, rechts de *donoren*.

**Donor dotering** We gaan uit van het feit dat de halfgeleider elementen Si en Ge vierwaardige ionen zijn in een kubische structuur, waarbij de vier valentie-elektronen bindings-elektronen zijn geworden. Bekijk eens het deel van het periodiek systeem rond Si en Ge in figuur 2.13. Typische *donor* elementen zijn fosfor (P) in het Si-kristal, en arsenicum (As) in een Ge-kristal. Het donoratoom heeft een buitenste schil die vergelijkbaar is met de buitenste schil van het vierwaardige halfgeleider atoom, maar dat één elektron méér bevat: het donor atoom is *vijfwaardig*. Vervanging van een halfgeleider atoom door een donor atoom leidt daardoor tot een ‘overbodig’ elektron bij het donoratoom. Dat elektron is, door de warmte, niet meer aan het donor atoom gebonden, en wordt geleidings-elektron. Het donoratoom is een  $5^+$  ion in het kristal temidden van  $4^+$  halfgeleider atomen (dat moet wel, vanwege de elektrische neutraliteit).

**Oneigen geleidings-elektronen** Een *doting* met *donors* leidt tot een overheersende *n-type geleiding*. Er is, bij kamertemperatuur, één extra geleidings-elektron per donor atoom (zie ook fig. 2.15). Het aantal *oneigen geleidings-elektronen* is zo gelijk aan het aantal donoren. Door het aantal donoren te regelen kan men de geleidbaarheid van het materiaal dus regelen. Voor de orde-grootte van de dotering moet men denken aan 1 donor atoom op 1 miljard halfgeleider atomen; de **donor-dotatie**, het aantal donoren per , is  $10^{-9}$ . In één richting gezien is dat 1 donor atoom per 1000 halfgeleider atomen. Het aantal **oneigen geleidings-elektronen** is veel groter dan het aantal **eigen geleidings-elektronen**,



Figuur 2.14 Denkbeeldige structuur van een zuiver halfgeleider kristal van 4-waardige ionen zonder dotering; *bindingselektronen* zijn als getrokken lijnen aangegeven. Let op de afwezigheid van gaten of geleidingselektronen



Figuur 2.15 Denkbeeldige structuur van een onzuiver halfgeleider kristal van 4-waardige ionen met donor dotering van 5-waardige donor-ionen. Een *geleidings-elektron* is als • aangegeven.

denk bijvoorbeeld aan  $10^{-12}$ . Het totale, door de dotering ontstane, aantal geleidings-elektronen is dus óók veel groter dan het aantal (eigen) gaten. Men noemt daarom de *oneigen* geleidings-elektronen de **meerderheidsladingen**, en verwaarloost de andere minderheidsladingen.

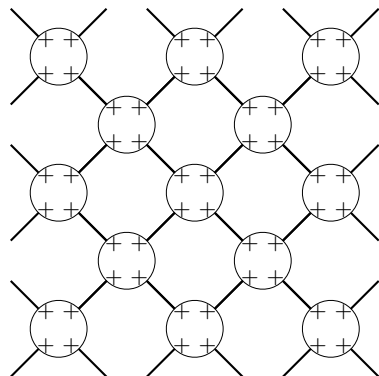
**Acceptor dotering** Op analoge wijze leidt de vervanging van een klein deel van de halfgeleider atomen door *driewaardige* atomen, het acceptor atoom, tot een tekort aan bindings-elektronen. Er ontstaat één gat per acceptor atoom (zie ook fig 2.17). Het acceptor atoom blijft als een  $3^+$  ion in het kristal zitten in het  $4^+$  halfgeleider rooster. Typische *acceptor* elementen zijn aluminium (Al) in een Si-kristal en gallium (Ga) in een Ge-kristal. De *acceptor dotering* leidt tot *p-type geleiding* met gaten als *meerderheidsladingen*. Het aantal *oneigen gaten* wordt door de *dotatie* bepaald, en is daardoor nagenoeg temperatuur onafhankelijk. Daardoor is de *onzuivere geleiding* nagenoeg temperatuur onafhankelijk.

**Opg 2.3.1** \* De geleiding via bindings-elektronen kan plaatsvinden

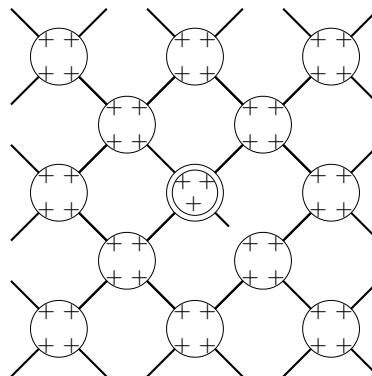
- A als alle bindingen tussen de atomen zorgvuldig gevuld zijn
- B als een geleidings-elektron rekombineert met een gat
- C alleen in de aanwezigheid van een elektrisch veld
- D als er een open plaats in de bindingen aanwezig is

**Opg 2.3.2** \* Een p-type halfgeleider ontstaat

- A doordat er gaten aan de stof worden toegevoegd
- B doordat er acceptoren aan de stof worden toegevoegd
- C doordat er vijfwaardige atomen in een Si-kristal worden aangebracht



Figuur 2.16 Denkbeeldige structuur van een zuiver halfgeleider kristal van 4-waardige ionen zonder dotering; *bindingselektronen* zijn als getrokken lijnen aangegeven. Let op de afwezigheid van gaten of geleidingselektronen



Figuur 2.17 Denkbeeldige structuur van een onzuiver halfgeleider kristal van 4-waardige ionen met 3-waardige acceptorionen. Gaten zijn als ontbrekende (halve) verbinding aangegeven.

**Conclusie** *We hebben de volgende soorten beweeglijke lading:*

**eigen ladingen** die ontstaan t.g.v. temperatuur-botsingen (of andere vormen van energietoevoer zoals door lichtabsorptie) bij een zuivere halfgeleider. Het zijn geleidings-elektronen en gaten, die in aantal gelijk zijn.

**meerderheidsladingen** die ontstaan t.g.v. de dotering in een onzuivere halfgeleider. Bij normale temperatuur vormen ze al bij geringe concentratie de meerderheid vergeleken met de zonder dotering aanwezige eigen ladingen.

**minderheidsladingen** die in zeer kleine aantallen ontstaan t.g.v. temperatuur-botsingen in een onzuivere halfgeleider. Bij normale temperatuur is hun aantal verwaarloosbaar klein vergeleken met de aantallen meerderheidsladingen.

**$n^+$ - en  $p^+$ -type halfgeleiders** Het aantal ladingen in een onzuivere halfgeleider blijft altijd toch wel een factor 100 kleiner dan de geleiding bij metalen. Desondanks is het mogelijk de dotatie zo groot te maken, dat we van *metallische geleiding* kunnen spreken. Zulke doteringen heten  **$n^+$ -type halfgeleider** en  **$p^+$ -type halfgeleider**.

**Let op!** De  $+$  bij  $n^+$  en  $p^+$  geeft niet de polariteit aan, maar het feit dat er *extra* doteringen zijn van het gegeven type. Voor de chip-technologie is dit van wezenlijk belang! Waarom?

**Voorbeeld Ladingsdichtheid n-Si of p-Si** Bereken de ladingsdichtheid in de gedoteerde halfgeleider Si. De dotatie is 1 atoom verontreiniging op  $10^6$  atomen Si. (Men spreekt ook van  $10^{-6}$  gedoteerd Si, met dotatie  $10^{-6}$ .)

Vooraf berekenen we uit massadichtheid en atoommassa de *atoomdichtheid* van Si:

$$n_{\text{Si}} = 5,00 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

De **doteringsdichtheid**  $n_d$ , het aantal doteringsatomen per kubieke meter, volgt uit het produkt van de *dotatie* ( $= 10^{-6}$ ) en *atoomdichtheid*:  $10^{-6} \cdot 5,0 \cdot 10^{28} = 5,0 \cdot 10^{22} / \text{m}^3$ . Daaruit volgt de ladingsdichtheid. Bij donor-dotering wordt de ladingsdichtheid van de geleidingselektronen:

$$\rho_n = 5,0 \cdot 10^{22} \cdot -1,6 \cdot 10^{-19} = -8,0 \text{ kC/m}^3$$

Bij acceptor-dotering wordt de ladingsdichtheid van de gaten:

$$\rho_p = 5,0 \cdot 10^{22} \cdot +1,6 \cdot 10^{-19} = +8,0 \text{ kC/m}^3$$

- Opg 2.3.3**
- a \* In een normaal gedoteerde halfgeleider bij een normale temperatuur vormen de geleidings-elektronen van de zuivere stof de meerderheidsladingsdragers.  
A waar B onwaar
- b \* De elektrische geleidbaarheid van een vastestof neemt af bij stijgende temperatuur als de stof een metaal is.  
A waar B onwaar
- c \* In een metaal kunnen de bindings-elektronen voor geleiding zorgen als alle bindingen in het rooster bezet zijn.  
A waar B onwaar
- d \* De temperatuurafhankelijkheid van de elektrische geleidbaarheid van een zuivere halfgeleider blijkt exponentieel te zijn, d.w.z. de soortelijke geleiding neemt exponentieel toe met de temperatuur.  
A waar B onwaar
- e \* Bij een zuivere halfgeleider is het aantal gaten alleen bij kamertemperatuur gelijk aan het aantal geleidings-elektronen.  
A waar B onwaar
- f \* Bij een onzuivere halfgeleider is de concentratie van gaten, resp. van geleidings-elektronen, in de omgeving van de kamertemperatuur vrijwel constant.  
A waar B onwaar
- g \* De elektrische geleidbaarheid van een onzuivere halfgeleider is in de omgeving van de kamertemperatuur praktisch onafhankelijk van de dotatie.  
A waar B onwaar
- h \*\*\* De elektrische geleidbaarheid in *een vastestof* neemt altijd af bij toename van de onzuiverheid in de omgeving van kamertemperatuur.  
A waar B onwaar

- Opg 2.3.4** \*\* Bereken de ladingsdichtheid van de meerderheidsladingen in de halfgeleider Ge (afwijkend van BINAS is de massadichtheid van Ge  $5,34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ )
- a met dotatie  $10^{-7}$  in n-Ge. [Antw.  $\rho_n = -0,71 \text{ kC/m}^3$ ]  
b dotatie  $10^{-5}$  p-Ge. [Antw.  $\rho_p = +0,71 \cdot 10^2 \text{ kC/m}^3$ ]
- Opg 2.3.5** \* De elektrische geleidbaarheid, beschouwd in normale temperatuurgebieden,
- A van n-metalen neemt af met de temperatuur
  - B van p-metalen neemt toe met de temperatuur
  - C van zuivere halfgeleiders neemt af met de temperatuur
  - D van onzuivere halfgeleiders neemt af met de temperatuur
- Opg 2.3.6** \* De geleidings-elektronen in een n-type halfgeleider noemt men meerderheidsladingen, omdat
- A het aantal donor-atomen in het halfgeleidermateriaal zo groot is
  - B het aantal donor-atomen in het halfgeleidermateriaal relatief zo klein is
  - C ze al bij geringe donor-doping het aantal eigen gaten overtreffen
- Opg 2.3.7** \* Een  $n^+$ -halfgeleider type is
- A een halfgeleider waarbij de positieve spanning op de n-kant moet worden aangesloten
  - B een halfgeleider waarbij positieve beweeglijke ladingen de meerderheid vormen
  - C een halfgeleider met een hoge concentratie aan donor-atomen



## 2.4 Geleiding in vastestof

### 2.4.1 Zuivere geleiding

**Beweeglijke ladingen** Als er over een geleider (of een halfgeleider) een elektrische spanning  $U$  staat, dan vormt zich in de geleider een elektrisch veld  $\underline{E}$  dat ladingen kan verplaatsen. De ionen in het kristal zitten vast in het rooster, en verplaatsen dus niet; de ionen zijn **onbeweeglijke ladingen** (zolang we de spanning niet te hoog opdraaien). Wel kunnen geleidings-elektronen en gaten verplaatst worden—dat zijn *beweeglijke ladingen*. Bezie een beweeglijke lading met lading  $q$  en (effectieve) massa  $m$ ; we onderscheiden twee soorten beweeglijke lading:

**geleidingselektron**  $q = -e$ ,  $m = m_n$ , *elektron geleiding*;  
**gat**  $q = +e$ ,  $m = m_p$ , *gaten geleiding*;

We zijn hiervoor ingegaan op de vraag welke ladingen aan de geleiding kunnen meedoen, en hoeveel dat er zijn. Er zijn twee grootheden die de elektrische geleiding in de vastestof bepalen:

1. het aantal ladingen dat bewegen kan;
2. de snelheid van die ladingen

Nu zullen we ingaan op de vraag hoe snel die ladingen zich bewegen.

**Weerstandskracht en driftsnelheid** Bezie een beweeglijke lading met lading  $q$  en massa  $m$ . Door het elektrische veld ondervindt *iedere* lading een elektrische Coulombkracht  $\underline{F}_C$  evenredig met de elektrische veldsterkte  $\underline{E}$ .

$$\underline{F}_C = q\underline{E}$$

Als gevolg van de beweging van de lading door het kristal ontstaat op die lading een tegenwerkende **weerstandskracht**  $F_f$  (tgv ‘wrijving’, engels ‘friction’). In veel gevallen, in het bijzonder bij lage veldsterkten en stationaire stroom, blijkt dat weerstandskracht negatief evenredig is met de gemiddelde snelheid van de beweeglijke lading, die **driftsnelheid**  $v_{dr}$  wordt genoemd:

$$\underline{F}_f = -f\underline{v}_{dr}$$

De evenredigheidsconstante tussen weerstandskracht en driftsnelheid heet de **fritieconstante**  $f$ , met eenheid Ns/m.

**Driftsnelheid en veldsterkte** Bij gelijkspanning (en bij normale temperatuur) blijkt de stroom ‘stationair’ te zijn, d.w.z. ‘in-dezelfde-staat-blijvend’. Daaruit concluderen we dat er gemiddeld overal evenveel

beweeglijke ladingen zijn, en dat de gemiddelde snelheid van die ladingen constant is. Dus, *gemiddeld* is de *versnelling* van een beweeglijke lading *nul* is, zodat er geen *netto* kracht op werkt:

$$\underline{F}_C + \underline{F}_f = 0$$

Na invullen van de krachten blijkt dat  $q\underline{E} = f\underline{v}_{\text{dr}}$ . Kennelijk is de driftsnelheid  $v_{\text{dr}}$  evenredig met de elektrische veldsterkte  $\underline{E}$ :

$$\underline{v}_{\text{dr}} = \mu \underline{E}$$

met evenredigheidsconstante  $\mu$ , die de **beweeglijkheid**, of **mobiliteit**, wordt genoemd. De frictieconstante kan worden uitgedrukt in de beweeglijkheid:

$$\frac{1}{f} = \frac{\mu}{q}$$

**Beweeglijkheid** Uit de definitie van de beweeglijkheid  $\mu$  volgt dat de *beweeglijkheid* de driftsnelheid *is van de beweeglijke lading bij eenheidsveldsterkte* ( $= 1 \text{ V/m}$ ). Dus **geleidingselektron-beweeglijkheid**  $\mu_n$  is negatief en **gat-beweeglijkheid**  $\mu_p$  positief, door het tekenverschil in de ladingen. De eenheid van beweeglijkheid is  $(\text{m/s})/(\text{V/m}) = \text{m}^2/\text{Vs}$ . Dat is precies het omgekeerde van de eenheid van magnetische fluxdichtheid  $B$ , de eenheid Tesla. Immers  $(\text{m/s})/(\text{V/m}) = (\text{m/s})/(\text{N/C}) = (\text{mC/s})/\text{N} = \text{mA}/\text{N} = \text{mA}/\text{AmT} = 1/\text{T}$ ; op het verband tussen beweeglijkheid en magnetisch veld komen we nog terug.

**Stroom als bewegende lading** De **stroom**  $I$  is gelijk aan de hoeveelheid lading die in 1 s een draaddoorsnede passeert. De **stroomdichtheid**  $J$  is de stroomsterkte per  $\text{m}^2$ . In één seconde legt een lading een afstand  $v_{\text{dr}} \cdot 1$  af, dus kunnen alle ladingen binnen die afstand van de doorsnede nog juist in die seconde passeren. Dat aantal is  $nv_{\text{dr}}$ , waarbij  $n$  de **deeltjesdichtheid** van beweeglijke lading is. De stroomdichtheid wordt daarmee:

$$J = nv_{\text{dr}}q$$

De combinatie: aantal  $\times$  lading is gelijk aan de **ladingsdichtheid**  $\rho$ :

$$\boxed{\rho = nq}$$

Daarmee vereenvoudigt de vergelijking voor de stroomdichtheid tot de vergelijking die uitdrukt dat stroom lading is die beweegt:

$$\boxed{J = \rho v_{\text{dr}}}$$

Merk op, dat de eenheid van stroomdichtheid is  $\text{C}/\text{m}^3 \text{ m/s} = \text{A}/\text{m}^2$ .

<i>metaal</i>	<i>syb.</i>	<i>geleider type</i>	$\gamma/(S/m)$	$\rho/(\Omega m)$
<i>n-geleider</i>				
zilver	Ag		$6,2 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^{-8}$
koper	Cu		$5,9 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^{-8}$
aluminium	Al		$3,7 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^{-8}$
<i>np-geleider</i>				
constantaan	Cu-Ni		$2,0 \cdot 10^7$	$5,0 \cdot 10^{-8}$
<i>p-geleider</i>				
kobalt	Co		$1,6 \cdot 10^7$	$6,3 \cdot 10^{-8}$
nikkel	Ni		$1,4 \cdot 10^7$	$7,1 \cdot 10^{-8}$
cadmium	Cd		$1,3 \cdot 10^7$	$7,7 \cdot 10^{-8}$
ijzer	Fe		$1,1 \cdot 10^7$	$9,1 \cdot 10^{-8}$
<i>halfgeleider</i>				
germanium	Ge		$2 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-1}$
silicium	Si		$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$
<i>isolator</i>				
pvc			$\sim 10^{-8}$	$\sim 10^8$
lucht			$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{13}$
teflon			$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{14}$
polystyreen			$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{15}$

Tabel 2.2 Geleidbaarheid  $\gamma$  en soortelijke weerstand  $\rho (=1/\gamma)$  bij kamertemperatuur voor verschillende elementen. Merk op, dat voor n-geleiders  $\gamma \sim 10^8$ , voor p-geleiders  $\sim 10^7$ , voor halfgeleiders  $\sim 10^{-2}$  en voor isolatoren  $\sim 10^{-10}$

**Geleidbaarheid** De stroomdichtheid is evenredig met de driftsnelheid, en de driftsnelheid is evenredig met de veldsterkte. Dus is de stroomdichtheid  $J$  evenredig met de veldsterkte  $E$ :

$$J = \rho \mu E$$

Volgens de wet van Ohm is de evenredigheidsconstante tussen stroomdichtheid en veldsterkte de **soortelijke geleiding, geleidbaarheid**,  $\gamma$ :

$$J = \gamma E \quad \text{wet van Ohm}$$

Voor de geleiding geldt met één type ladingsdrager:

$$\gamma = \rho \mu$$

Is de soortelijke geleiding *onafhankelijk van de veldsterkte*, dan spreken we over **Ohm's gedrag** (wet van Ohm). Ohm's gedrag blijkt te volgen uit de aanname dat de weerstandskracht evenredig is met de driftsnelheid, en uit zich in een beweeglijkheid die niet veldafhankelijk is. Er



**Beweeglijkheid in halfgeleiders** Omdat er in *halfgeleiders* twee soorten beweeglijke lading zijn, kunnen we niet, zoals bij metalen, de soortelijke geleiding omrekenen naar de beweeglijkheid. We moeten verschil maken tussen gaten en geleidingselektronen. Verder speelt de temperatuur een belangrijke rol bij de waarde van de beweeglijkheid. Experimenteel is de beweeglijkheid min of meer bepaald (zie tabel 2.3).

<i>halfgeleider</i>	<i>geleidingselektron</i>		<i>gat</i>	
	$\mu_n/(\text{m}^2/\text{Vs})$	$m_n/m_e$	$\mu_p/(\text{m}^2/\text{Vs})$	$m_p/m_e$
Si	-0,19 (-0,13)	1,1	0,05 (0,05)	0,6
Ge	-0,38 (-0,45)	0,6	0,18 (0,35)	0,3
GaAs	-0,90 (-0,90)	0,07	0,04 (0,04)	0,5
InSb	-7,8 (-8,0)	0,014	0,08 (0,14)	0,4

Tabel 2.3 Beweeglijkheid  $\mu$  en effectieve massa  $m^*$  van geleidingselektron en gat bij werkteperatuur  $T = 300 \text{ K}$  voor enkele halfgeleiders. De gegevens voor  $\mu$  zijn uit 'Handbook of chemistry and physics', E105 (resp. uit BINAS, tabel 30a). De gegevens uit deze handboeken blijken aanzienlijk te verschillen. Mogelijk worden de gegevens geput uit verschillende bronnen.

**Niet Ohm's gedrag** Niet onder alle omstandigheden blijkt de beweeglijkheid  $\mu$  constant te zijn; men noemt dat *niet Ohm's gedrag*. In het bijzonder in *halfgeleiders*, blijkt de beweeglijkheid afhankelijk te zijn van de grootheden:

**elektrische veldsterkte;**

**ladingsdichtheid;**

**temperatuur;**

De afhankelijkheid van de temperatuur, een voor de werking van componenten belangrijk gegeven, is al eerder ter sprake gebracht. De beweeglijkheid is afhankelijkheid van de veldsterkte doordat bij hogere veldsterkten de driftsnelheid maximaal wordt, dus ook de stroom maximaal wordt. Men noemt dat *stroomverzadiging*. Voor Si is de bijpassende *verzadigingsveldsterkte* in de orde van  $5 \cdot 10^5 \text{ V/m}$ .

**Geleidbaarheid in zuivere halfgeleiders** In werkelijkheid hebben we niet altijd te maken met één type beweeglijke lading. Zijn er twee typen lading (aangeduid met n en p), dan tellen de stromen daarvan op, en dientengevolge de soortelijke geleidingen:

$$\gamma = \gamma_p + \gamma_n$$

De verschillende ladingen stromen dus 'parallel' en onafhankelijk van elkaar (mits er niet te veel ladingen zijn, want dan beïnvloeden ze elkaar).

Het verschijnsel dat òn de geleidingslektronen òn de gaten bijdragen tot de geleiding doet zich vooral voor bij de meest gebruikte *halfgeleiders* Si en Ge. Bij *zuivere halfgeleiders* kunnen we gebruik maken van de gelijke dichtheden van gaten en geleidingslektronen om die dichtheid uit de gemeten soortelijke geleiding te bepalen. Omgekeerd kunnen we bij onzuivere halfgeleiders uit de bekende dotatie berekenen wat de soortelijke geleiding zal worden.

**Conclusie** *De soortelijke geleiding  $\gamma$  van zuivere stoffen kan worden uitgedrukt in de ladingsdichtheid en beweeglijkheid van de ladingstraggers: Afhankelijk van het type zuivere geleider is:*

**geleider n-type**  $\gamma = \rho_n \mu_n$

**geleider p-type**  $\gamma = \rho_p \mu_p$

**halfgeleider**  $\gamma = \rho_n \mu_n + \rho_p \mu_p$

*Bij geleiders zijn de ladingsdichtheden bepaald door het geleidingstype en kristalstructuur. Bij halfgeleiders zijn de ladingsdichtheden experimentele grootheden die zeer van de omstandigheden afhangen.*

**Voorbeeld Ladingsdichtheid Ge** Bepaal de ladingsdichtheid van elektronen en gaten in zuiver Germanium uit de soortelijke geleiding van 2 S/m.

We gebruiken de beweeglijkheden van gaten en geleidingslektronen uit de tabel 2.3:  $\mu_p = 0,18/T$  en  $\mu_n = -0,38/T$ . Daarmee kunnen we de verschillende bijdragen van de gaten en geleidingslektronen tot de soortelijke geleiding preciseren:

$$\begin{aligned}\gamma_p &= \rho_p \mu_p = 0,18 \rho_p \\ \gamma_n &= \rho_n \mu_n = -0,38 \rho_n\end{aligned}$$

Omdat het zuiver halfgeleidermateriaal betreft zijn de ladingsdichtheden van gaten en geleidingslektronen tegengesteld:

$$\rho_n = -\rho_p$$

De totale soortelijke geleiding wordt dus

$$\gamma = 0,18 \rho_p - 0,38(-\rho_p) = 0,56 \rho_p$$

Met  $\gamma = 2 \text{ S/m}$  krijgt de gaten ladingsdichtheid, resp. gatendichtheid, een voor halfgeleiders behoorlijke waarde:

$$\rho_p = 2/0,56 = 4 \text{ C/m}^3 \quad n_i = 2,2 \cdot 10^{19} / \text{m}^3$$

**Opg 2.4.5 \*\*** Bereken de soortelijke geleiding voor  $10^{-6}$  gedoteerd n-Si. [Antw.  $\gamma_n = 1,5 \cdot 10^3 \text{ S/m}$ ]

- Opg 2.4.6** \*\* Bereken de soortelijke geleiding van zuiver Ge als gegeven is dat het aantal geleidingselektronen gedeeld door het aantal Ge-ionen (beide per volume-eenheid) gelijk is aan  $1,6 \cdot 10^{-8}$ . [Antw.  $\gamma = 91 \text{ S/m}$ ]
- Opg 2.4.7** \*\*\*\* Bereken voor zuiver Si de verhouding tussen het aantal gaten en het aantal siliciumionen. Ga daarbij uit van een soortelijke weerstand  $2 \text{ k}\Omega\text{m}$ . [Antw.  $p/n_{\text{Si}} = 3 \cdot 10^{-13}$ ]
- Opg 2.4.8** \*  
 I voor de *soortelijke weerstand* geldt  $\rho = \gamma/\mu$ ;  
 II voor de *beweeglijkheid* geldt  $\mu = v_{\text{dr}}/E$ ;  
 A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 2.4.9** \* Voor de driftsnelheid van bewegende lading geldt:  
 I is evenredig met de elektrische veldsterkte;  
 II is omgekeerd evenredig met de magnetische inductie;  
 A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 2.4.10** \* De soortelijke geleiding in een zuivere halfgeleider  
 I is de som van de elektronen- en gaten-geleiding;  
 II hangt af van de temperatuur;  
 A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 2.4.11** \* Er wordt aangenomen dat er, bij normale temperatuur, een weerstandskracht op beweeglijke ladingen in een geleider bestaat, omdat:  
 A de geleider anders geen elektrische weerstand zou hebben;  
 B de ladingen anders eenparig zouden bewegen;  
 C er anders geen stationaire stroom zou ontstaan;
- Opg 2.4.12** \* Voor het geleidingsvermogen  $G$ , van een stuk materiaal met soortelijke geleiding  $\gamma$ , lengte  $l$  en doorsnede  $A$ , geldt de formule:  
 A  $\gamma A/l$   
 B  $\gamma l/A$   
 C  $\frac{1}{\gamma} l/A$   
 D  $\frac{1}{\gamma} A/l$
- Opg 2.4.13** \* Welke bewering is waar of onwaar:  
 a In Cu onder normale condities is de beweeglijkheid afhankelijk van de elektrische veldsterkte.  
 A waar    B onwaar  
 b In Cu neemt de beweeglijkheid toe met de temperatuur, omdat de elektronen dan sneller kris-kras bewegen.  
 A waar    B onwaar  
 c De temperatuurafhankelijkheid van de beweeglijkheid verschilt voor metalen en halfgeleiders, maar *bovendien* voor gaten en elektronen.  
 A waar    B onwaar

### 2.4.2 Invloeden op geleiding

**Verschillende weerstandskrachten** Het blijkt dat er meerdere oorzaken voor de **weerstandskrachten** zijn aan te wijzen. Zoals we zagen in 2.2 onderscheiden we tenminste de volgende drie:

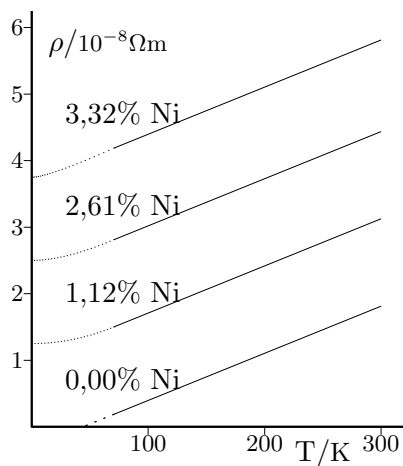
**temperatuur** thermische verstrooiing;

**kristalrooster zuiverheid** structuurfouten;

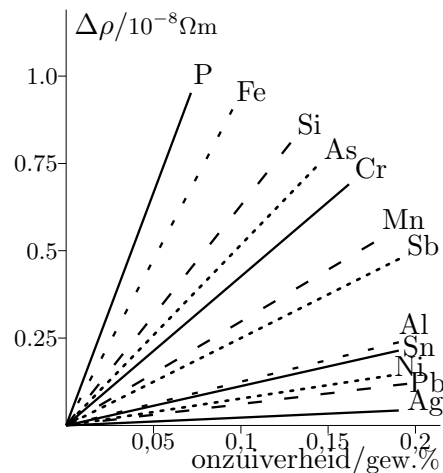
**chemische zuiverheid** verontreinigingen;

De krachten t.g.v. de verschillende weerstandsmechanismen, tellen op. Dientengevolge tellen ook de frictieconstanten  $f$  op, en als consequentie daarvan de omgekeerde beweeglijkheden. Tenslotte kunnen we nu de verschillende bijdragen aan de soortelijke weerstand bij elkaar optellen. Anders gezegd: de verschillende weerstandsmechanismen staan ‘in serie’. Ga dat zelf na. Dit heet de **regel van Matthiessen** voor de soortelijke weerstand:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \quad \text{regel van Matthiessen}$$



Figuur 2.18 Soortelijke weerstand  $\rho$  van Cu, met Ni verontreinigd, als functie van de temperatuur  $T$



Figuur 2.19 Soortelijke weerstandsverhoging  $\Delta\rho$  van Cu bij 293 K als functie van de gewichtsprocenten verontreiniging met aangegeven element

**Invloeden op  $\rho$  uit grafiek** De soortelijke weerstand van een metaal (meestal Cu of Al), bij een gegeven temperatuur en bij een gegeven ‘geringe’ verontreiniging met andere elementen kan in grafieken worden weergegeven. Bijvoorbeeld uit de grafieken van figuur 2.18 en figuur 2.19 zien we dat:



- De soortelijke weerstand lineair toeneemt met de temperatuur (in het temperatuurbereik van 100 K tot het smeltpunt);
- De soortelijke weerstand lineair toeneemt met de verontreinigingsgraad van een element; de mate van toename is afhankelijk van het verontreinigende element;

Daaruit concluderen we, dat de soortelijke weerstand van een metaal, verontreinigd met een vreemd element, berekend kan worden (bij elke temperatuur, bij elke verontreinigingsgraad) als maar twee 'punten' van de grafieken gegeven zijn. Een punt is dan de soortelijke weerstand van dat metaal bij één temperatuur  $T$  en één verontreinigingsgraad  $c$  van dat element;

**Voorbeeld Geleidbaarheid Cu met Ni** Bepaal de soortelijke geleiding van koper met 0,1% gewichtsprocent nikkel bij een temperatuur van 200 K.

Omdat er twee mechanismen in het spel zijn (temperatuur en onzuiverheid) bepalen we de soortelijke weerstand uitgaande van het Cu bij 220 K:

$$\rho = \rho_{\text{Cu, 200 K}} + \Delta\rho_{\text{Cu, 0,1\% Ni}}$$

Uit de grafiek met temperatuurinvloed lezen we af:

$$\rho_{\text{Cu, 200K}} = 1,06 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}.$$

Uit de grafiek met de invloed van onzuiverheid lezen we af:

$$\Delta\rho_{\text{Cu, 0,1\% Ni}} = 0,08 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}.$$

Opgeteld levert dat de gevraagde soortelijke weerstand:

$$\rho_{\text{Cu, 200 K en 0,1\% Ni}} = 1,14 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$$

**Opg 2.4.14 \*\*\*\*** Bereken aan de hand van de grafieken van de soortelijke weerstand als functie van temperatuur en verontreinigingsgraad (te vinden op pagina 96):

a de soortelijke geleiding van koper bij een temperatuur van 373 K.

$$[\text{Antw. } \gamma = 0,45 \cdot 10^8 \text{ S/m}]$$

b de soortelijke geleiding van koper met 0,07gew% chroom verontreinigd, bij 373K; gebruik daarbij de in a. gevonden waarde.

$$[\text{Antw. } \gamma = 0,38 \cdot 10^8 \text{ S/m}]$$

**Opg 2.4.15 \*\*\*\*** Bereken de soortelijke geleiding van Cu dat is verontreinigd met 2% Ni en een temperatuur heeft van 400 K.  $[\text{Antw. } \gamma = 0,22 \cdot 10^8 \text{ S/m}]$

**Opg 2.4.16 \*** Beantwoord de volgende vragen met waar/onwaar.

a De beweeglijke-ladings-dichtheid is bepalend voor de driftsnelheid bij een bepaalde stroomsterkte in een bepaalde geleider.

A waar B onwaar

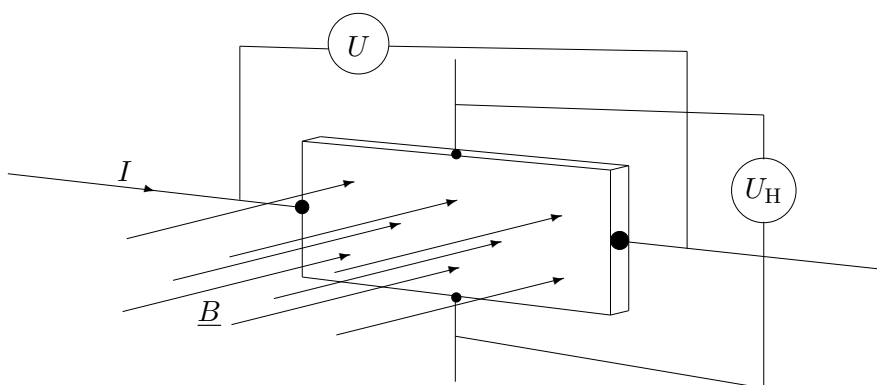
b De soortelijke geleiding  $\gamma$  is meestal afhankelijk van het aangelegde potentiaalverschil op de geleider (en dus van het veroorzaakte veld in de geleider).

A waar B onwaar



## 2.5 Beweeglijkheid en ladingsdichtheid

**Hall-effekt** Het is gelukkig mogelijk om de *beweeglijkheid*  $\mu$ , de *drift-snelheid* per eenheidsveldsterkte, en de *ladingsdichtheid*  $\rho$  van de beweeglijke ladingen, die tot de stroom bijdragen, in één meting te bepalen. Daarbij wordt, via een magneetveld, gebruik gemaakt van het in 1879 door de amerikaan E.H.Hall ontdekte ‘**Hall-effekt**’ (zie fig 2.20).



Figuur 2.20 Meting Hall-spanning  $U_H$  en stroom  $I$  door een reep geleider t.g.v. de spanning  $U$  en een dwars magneetveld: het teken van  $U_H$  bepaalt het type meerderheidslading, de verhouding  $U_H/U$  bepaalt in eerste instantie de beweeglijkheid; het quotient  $I/U_H$  bepaalt de ladingsdichtheid

Een stroom  $I$  gaat van links naar rechts (dus in de  $+x$  richting) door een reep geleider, gedreven door een elektrisch veld  $E$ . Dwars op de reep, van voren naar achteren (dus in de  $+y$  richting), staat een homogeen magneetveld  $B$ . Dan ontstaat over de dwarsdoorsnede van de draad, van boven naar beneden (dus in de  $z$  richting), een elektrisch veld  $E_H$ , het **Hall-veld** met de bijbehorende **Hall-spanning**  $U_H$ .

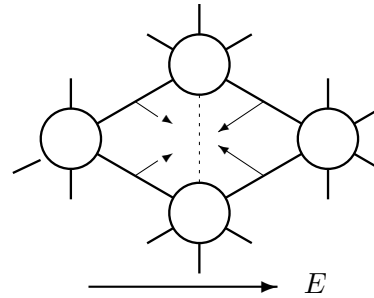
Hoe ontstaat de Hall-spanning? Het magneetveld veroorzaakt een Lorentzkracht op de ladingen. Wanneer het veld wordt aangezet wordt de stroom eerst omhoog afgebogen, zodat op het bovenoppervlak ladingen verzamelen (en er op het onderoppervlak een tekort aan ladingen ontstaat). De verzamelde lading zal nieuw aangevoerde lading afstoten; na enige tijd wordt een ladingsevenwicht bereikt waarbij een bepaalde spanning hoort: de Hall-spanning. Het teken van de lading is het teken van de Hall-spanning:

**p-type geleider** positieve Hall-spanning;

**n-type geleider** negatieve Hall-spanning;

**Bindingslektronen in elektrisch veld** Bij p-type geleiding worden de naar rechts bewegende ‘gaten’ omhoog afgebogen. Hoe gaat dat precies, want het zijn in werkelijkheid de bindingslektronen, vlakbij het gat, die het gat *worden ingetrokken*.

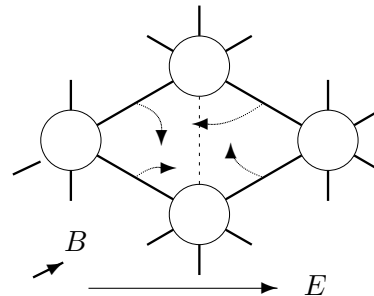
Diffusie speelt daarbij een overheersende rol. Als er géén elektrisch of magnetisch veld is, dan kan een elektron even goed (even waarschijnlijk) van alle kanten naderen. Is er alleen een elektrisch veld (naar rechts), dan gaat het vanaf rechts beter dan vanaf links; van rechts naar links gaande wint het elektron energie uit het veld, waardoor het statistisch vaker in het gat ‘valt’. Gemiddeld gaat het gat naar rechts *met het veld mee*.



Figuur 2.21 Diffusie van bindingslektronen naar een gat dat ligt in een elektrisch veld (naar rechts): de elektronen bewegen in een rechte baan, maar sneller van rechts dan van links

### Bindingslektronen in elektrisch en magnetisch veld

Er is, behalve het elektrische veld naar rechts, een magnetisch veld naar achteren. De náár het gat *diffunderende* bindingslektronen krijgen een afwijking rechtsonder (van de Lorentzkracht). Daardoor krijgt het elektron dat *van rechtsboven* komt extra elektrische energie. Het is immers de netto horizontale verplaatsing die het potentiaalverschil bepaalt. Analooq blijft het deeltje, van rechtsonder komend, horizontaal ‘achter’, en verliest elektrische energie. Gemiddeld gaat het gat naar rechts boven.

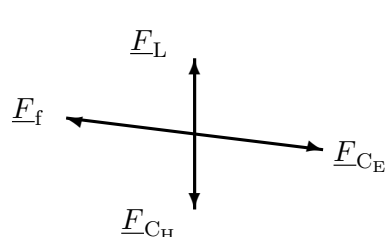


Figuur 2.22 Diffusie van bindingslektronen naar een gat dat ligt in een elektrisch veld (naar rechts) èn een magnetisch veld (naar achteren): de elektronen bewegen in naar rechts gekromde banen, maar sneller van boven dan van onderen

**Opg 2.5.1 \*\*\*** Een plak halfgeleider ligt in het vlak van het papier. Een elektrisch veld wordt er over gezet van rechts naar links, een magnetisch veld wordt in het vlak van het papier aangebracht van voren naar achteren (dus van de lezer af). De bewegingsrichting van gaten en elektronen wordt dan:

- A de elektronen naar rechts beneden
- B de elektronen naar rechts boven
- C de gaten naar rechts beneden
- D de gaten naar rechts boven

**Hall-veld** De ladingen op onder- en bovenoppervlak hebben het **Hall-veld**  $E_H$  tot gevolg, dat op iedere lading een, de Lorentzkracht tegenwerkende, Coulombkracht geeft. De *Lorentzkracht*  $F_L$  en de *Coulombkracht*  $F_{C_H}$  van het Hall-veld op de lading  $q$  zijn in dit geval:



$$\begin{aligned}\underline{F_L} &= q\underline{v_{dr}} \times \underline{B} \\ \underline{F_{C_H}} &= q\underline{E_H}\end{aligned}$$

De opbouw van de ladingen stopt in de evenwichtssituatie, als de Lorentzkracht gelijk en tegengesteld is aan de Coulombkracht:

Figuur 2.23 Krachten op positieve lading in Hall-veld situatie

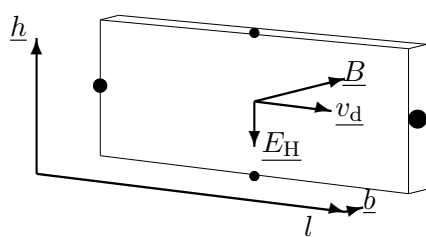
$$\underline{F_L} + \underline{F_{C_H}} = 0$$

Door invullen en uitdelen van de lading  $q$  vinden we ongeacht de grootte (en het teken) van de lading, het Hall-veld:

$$\underline{E_H} = -\underline{v_{dr}} \times \underline{B}$$

Door meting van het Hall-veld kunnen we de driftsnelheid van de ladingen bepalen (zonder dat we het ladingtype behoeven te kennen!).

**Hall-spanning, driftsnelheid en beweeglijkheid** Het Hall-veld leidt namelijk tot een *Hall-spanning* over de hoogte van de reep geleider.



Figuur 2.24 Vectoren die een rol spelen bij de Hall-spanning. Lengte  $l$  (richting  $E$ ), breedte  $b$  (richting  $B$ ) en hoogte  $h$  (richting Hall-veld  $E_H$ ).

Veronderstel een homogene stroom, dus ook een homogene *driftsnelheid*  $v_{dr}$ . De Hall-spanning over de hoogte  $h$  (de 'H'all-richting), volgt uit  $E = -dU/dx$ , dus

$$U_H = -\underline{h} \cdot \underline{E_H} = \underline{h} \cdot \underline{v_{dr}} \times \underline{B}$$

In dit voorbeeld staan alle richtingen loodrecht op elkaar (zie figuur 2.24). Maar ook als de stroom niet meer homogeen zou zijn, zou nog steeds gelden:

$$U_H = \underline{v_{dr}} \cdot \underline{B} \times \underline{h} = v_{dr} B h$$

Omgekeerd, geldt voor de bepaling van de driftsnelheid:

$$v_{dr} = \frac{U_H}{Bh}$$

De *beweeglijkheid*  $\mu$  volgt hier uit na deling door de veldsterkte  $E$ . Als een spanning  $U$  over de lengte van de draad  $l$  een veld  $E = U/l$  veroorzaakt, dan wordt de beweeglijkheid  $\mu = v_{\text{dr}}/E$  gelijk:

$$\mu = \frac{1}{B} \frac{U_{\text{H}}/h}{U/l}$$

Merk op, dat de eenheid van beweeglijkheid niet alleen is  $\text{m}^2/\text{Vs}$ , maar ook  $1/\text{T}$  (per Tesla), zoals duidelijk uit deze vergelijking blijkt.

**Voorbeeld Elektronsnelheid in Cu** Over een koperdraad met een lengte van 1 meter en een doorsnede van  $1 \text{ mm}^2$  staat een spanning van 17 mV, waardoor er een stroom van 1 A loopt. De temperatuur is ongeveer 300 K; verder mag worden aangenomen, dat  $\rho_{\text{n}} = -1,4 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ . Bereken de driftsnelheid en vergelijk die met de thermische snelheid. Bereken ook de beweeglijkheid.

bepalen de stroomdichtheid, dus omgekeerd volgt de driftsnelheid uit de stroomdichtheid:

$$J = I/A = 1\text{A}/10^{-6}\text{m}^2 = 10^6 \text{ A/m}^2$$

$$v_{\text{dr}} = J/\rho_{\text{n}} = 10^6 / -1,4 \cdot 10^{10} = -7,1 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$$

De driftsnelheid  $v_{\text{dr}}$  is in de orde van 0,1 mm/s.

De thermische snelheid  $v_{\text{th}}$  is de snelheid die hoort bij de thermische energie. Als we de thermische energie schatten op  $kT$ , dan is dus  $\frac{1}{2}mv_{\text{th}}^2 \sim kT$  waaruit

$$v_{\text{th}} \sim \sqrt{2kT/m} = 1 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

De driftsnelheid is dus 9 orden (!) kleiner dan de thermische snelheid.

De werkelijke geleidingselektron-snelheid kunnen we ook afschatten, en wel aan de hand van de Fermi-energie. Voor Cu geeft dat een Fermisnelheid van  $1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ , dat is nog eens een orde groter dan de thermische snelheid. De beweeglijkheid volgt uit de driftsnelheid via de veldsterkte  $E = U/l = 17 \text{ mV/m}$ :

$$\mu = \frac{v_{\text{dr}}}{E} = \frac{-7,1 \cdot 10^{-5}}{17 \cdot 10^{-3}} = -4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$$

**Opg 2.5.2 \*\*** Dwars door een plaatje n-Ge van 3 cm lengte, 1 cm hoogte en 4 mm dikte ('breedte') staat een magneetveld van 0,02 T. Wanneer we 60 mV over de lengte van het plaatje zetten ontstaat een Hall-spanning van 150  $\mu\text{V}$ .

a Bereken de driftsnelheid van de elektronen [Antw.  $v_{\text{dr}} = 0,75 \text{ m/s}$ ]

b Bereken de beweeglijkheid van de elektronen in Ge.

[Antw.  $\mu = 0,38 \text{ m}^2/\text{Vs}$ ]

**Opg 2.5.3 \*\*** Een koperfolie heeft een lengte van 5 cm, een breedte ('hoogte') van 15 mm en een dikte ('breedte') van 10  $\mu\text{m}$  (zie ook fig. 2.24). Over de lengte zet men een spanning van 0,5 Volt.

Gegeven: de geleidingslektrondichtheid in koper is  $10^{28} / \text{m}^3$ .

a bereken de stroom in het folie.

[Antw.  $I = 88 \text{ A}$ ]

b loodrecht op het vlak zet men een magneetveld van 0,2 T. Bereken de Hall-spanning.

[Antw.  $U_{\text{H}} = 1,1 \text{ mV}$ ]

- Opg 2.5.4** \*\* Vervang het folie in de vorige opgave door een strip n-Ge dat 5 mm dik is. Bereken de Hall-spanning. [Antw.  $U_H = -14$  mV]
- Opg 2.5.5** \*\*\*\* We maken een magneetveldmeter met behulp van een strip InSb (waarom dát materiaal?) Neem een kristaldikte van 1 mm, lengte van 1 cm. We wensen bij een veld van  $10^{-5}$  T een Hall-spanning van 1  $\mu$ V. Hoe groot kiezen we de spanning over de strip? [Antw.  $U = 0,13$  V]

**Ladingsdichtheid en Hall-weerstand** Als de stroom wordt bepaald door meerderheidsladings—of door het ladingstype met een veel grotere beweeglijkheid—dan is de betreffende ladingsdichtheid te bepalen. De ladingsdichtheid  $\rho$  hangt direct samen met de geleidbaarheid (soortelijke geleiding)  $\gamma$ , en wel via de beweeglijkheid:  $\gamma = \rho\mu$ . De omgekeerde ladingsdichtheid is dus evenredig met de beweeglijkheid:

$$1/\rho = \mu/\gamma$$

Invullen van de hierboven gevonden uitdrukking voor de beweeglijkheid geeft dan:

$$1/\rho = \frac{1}{B} \frac{U_H/h}{U/l} / \gamma$$

De soortelijke geleiding is evenredig met de geleiding  $G$ , daar  $G = \gamma A/l = \gamma bh/l$ , of,  $\gamma = (l/bh)G$ . Daardoor is de omgekeerde ladingsdichtheid niet alleen omgekeerd evenredig met  $U$ , maar ook met  $G$ ; tezamen is ze omgekeerd evenredig met  $I = GU$ :

$$1/\rho = \frac{b}{B} \frac{U_H}{I}$$

Men noemt de verhouding tussen de Hall-spanning en de stroom, die de eenheid ‘weerstand’ heeft, de **Hall-weerstand**  $R_H$ :

$$R_H = \frac{U_H}{I}$$

De omgekeerde ladingsdichtheid, die de **Hall-constante**  $A_H$  wordt genoemd, wordt daarmee uitdrukbaar in de Hall-weerstand:

$$1/\rho = A_H = \frac{b}{B} R_H$$

Merk op, dat de eenheid klopt:  $\Omega\text{m}/\text{T} = \Omega\text{m}\cdot\text{m}^2/\text{Vs} = \text{m}^3/\text{As} = \text{m}^3/\text{C}$  is het omgekeerde van een ladingsdichtheid  $\text{C}/\text{m}^3$ . Oplettende lezers wordt erop gewezen dat de Hall-constante heel vaak als  $R_H$  wordt genoteerd, waardoor verwarring met de (quantum) Hall-weerstand kan ontstaan.

**Conclusie** Met behulp van een magneetveld dwars op de stroom kunnen we van de beweeglijke ladingsdrager in de geleider (mits van maar één type) drie eigenschappen bepalen:

**type** uit het teken van  $U_H$  volgt het teken van  $q$ ;

**beweeglijkheid**

$$\mu = \frac{1}{B} \frac{U_H/h}{U/l}$$

**ladingsdichtheid**

$$1/\rho = \frac{b}{B} \frac{U_H}{I}$$

**Opg 2.5.6 \*\*\*\*** Een Hall-proef wordt uitgevoerd op een koperfolie met de volgende afmetingen: dikte  $15 \mu\text{m}$ , hoogte 2 cm, lengte 5 cm. Over de lengte van het folie wordt een spanning gezet van 1 V.

a Bereken de stroomsterkte door het folie. [Antw.  $I = 354 \text{ A}$ ]

Verder zetten we een magneetveld dwars op het folie met een sterkte van 0,1 T, en meten dan een Hall-spanning van  $168 \mu\text{V}$ .

b Bereken de beweeglijkheid van geleidingslektronen uit de Hall-spanning. [Antw.  $\mu = -4,2 \cdot 10^{-3} / \text{T}$ ]

**Kwantum Hall-weerstand** Een recente verrassing in de vastestofnatuurkunde is de ontdekking door von Klitzing (1980), dat de Hallweerstand *gekwantiseerd* is. Om precies te zijn: eigenlijk is de ladingsdichtheid van elektronen aan het oppervlak van een dunne ‘film’ gekwantiseerd, doordat de hoogte van de film één elektron dik is, en de elektronen naast elkaar op bepaalde afstand moeten zijn. De filmweerstand is een veelvoud van een **elementaire weerstand**, de **kwantum Hallweerstand**  $R_H$ , die kan worden uitgedrukt in de elementaire grootheden *constante van Planck* en *elementaire lading*:

$$R_H = \frac{h}{e^2} = 25812,8056(12) \Omega$$

De eenheden kloppen:  $\text{Js}/\text{C}^2 = (\text{J}/\text{C})/(\text{C}/\text{s}) = \text{V}/\text{A} = \Omega$ . Vanwege de grote precisie waarmee  $R_H$  is gemeten, wordt overwogen voor de elektrische eenheden niet meer uit te gaan van de *stroomeenheid* A, maar van de *weerstandseenheid*  $\Omega$  (we krijgen dan, in plaats van het huidige mksA-stelsel, het mks $\Omega$ -stelsel).

**Opg 2.5.7** Welke bewering is waar of onwaar:

a \* De Hall-constante  $A_H$  is omgekeerd evenredig met de deeltjesdichtheid van de meerderheidsladungdragers.

A waar B onwaar

b \* De beweeglijkheid van gaten hangt niet af van de dotatie.

A waar B onwaar

c \*\*\* Dat elektronengeleiding identiek is met de verplaatsing van geleidingslektronen in de tegenovergestelde richting van het elektrische veld, is aan te tonen door het meten van de Hall-spanning.

A waar B onwaar



d \*\*\* Dat gatengeleiding identiek is met de verplaatsing van geleidings-elektronen in de tegenovergestelde richting is aan te tonen door het meten van de Hall-spanning.

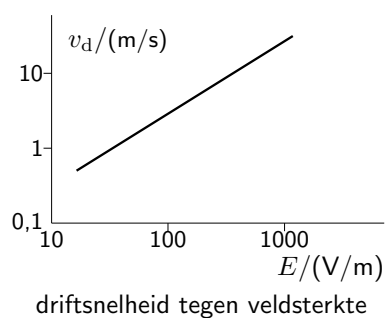
A waar

B onwaar

Opg 2.5.8 \*\*\*

In de grafiek is op dubbellogarithmische schaal getekend de driftsnelheid als functie van de veldsterkte. Daaruit volgt voor de beweeglijkheid:

- A geen constante waarde
- B  $0,03 \text{ m}^2/\text{Vs}$
- C  $0,05 \text{ m}^2/\text{Vs}$
- D  $0,3 \text{ m}^2/\text{Vs}$
- E  $0,5 \text{ m}^2/\text{Vs}$



## 2.6 Relaxatie en recombinatie

### 2.6.1 Relaxatie

**Relaxatietijd** Voor een beter begrip van het *weerstandsmechanisme* zullen we laten zien dat het leidt tot *relaxatie* (van latijn ‘relaxatio’: ‘ontspanning’) van de driftsnelheid. Daartoe wordt de *fictieconstante*, de evenredigheidsconstante  $f$  tussen de wrijvingskracht  $F_w$  en de driftsnelheid  $v_{dr}$ , uitgedrukt in een nieuwe grootte **relaxatietijd**  $\tau$ . Aan te nemen valt dat de weerstandskracht zal afhangen van de totale extra impuls  $m^*v_{dr}$  die het elektron opbouwt tussen twee botsingen (in ieder geval is dat zo bij deeltjesbotsingen). Op grond van eenheden (kracht is massa maal versnelling = kgm/s<sup>2</sup>, en impuls is massa maal snelheid = kgm/s) moet de evenredigheidsconstante een omgekeerde tijd zijn:

$$F_w = \frac{1}{\tau} m^* v_{dr}$$

De relaxatietijd  $\tau$  is dan zoets als de tijd tussen twee botsingen. Merk op, dat de massa—traagheid—hier een rol speelt. Uit vergelijken met de definitie van de fictieconstante en de beweeglijkheid blijkt:

$$\frac{1}{f} = \frac{\mu}{q} = \frac{\tau}{m^*}$$

$$\tau = \frac{m^* \mu}{q}$$

Vullen we waarden in die ongeveer bij n-type metalen gelden, namelijk:  $m^* = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, en,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, dan blijkt de relaxatietijd  $\tau$  in de orde grootte van  $10^{-14}$  s. De relaxatietijd is dus wel zeer kort. Bij halfgeleiders vinden we een  $\tau$  die een factor 100 groter is dan in metalen (want de beweeglijkheid is nu eenmaal veel groter) maar toch nog in de orde grootte van  $10^{-12}$  s ligt, dus ook heel kort. Dit lijkt erop te wijzen, dat de weerstandskrachten op atomair niveau moet worden gezocht, waar de snelheid van de elektronen heel groot is, en de afstanden heel klein.

**Uitschakelen stroom** De relaxatietijd  $\tau$  kan in verband worden gebracht met het ‘uitsterven’ (het ‘ontspannen’) van de driftsnelheid. Daartoe bezien we de beweeglijke ladingen  $q$  wanneer de stroom plotseling wordt uitgezet. De bewegingsvergelijking voor  $q$  (de wet van Newton) luidt:

$$F_w = m^* \frac{dv_{dr}}{dt} = -\frac{1}{\tau} m^* v_{dr}$$

Werk dit om naar de *differentiaalvergelijking* (met differentiaal  $d$ ):

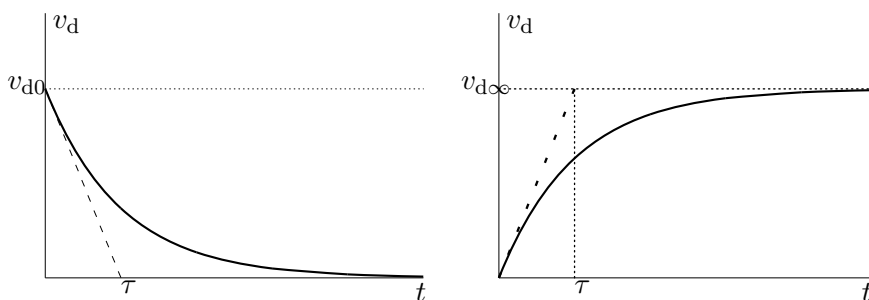
$$dv_{\text{dr}}/v_{\text{dr}} = -\frac{1}{\tau}dt$$

De massa is weggefallen (!). De driftsnelheid  $v_{\text{dr}}$  is een functie van de tijd ( $v_{\text{dr}}(t)$ ), met door de veldsterkte bepaalde beginwaarde:

$v_{\text{dr}}(t=0) = v_{\text{dr}}$ . Los op door het linkerlid naar de snelheid te integreren, en het rechterlid naar de tijd vanaf het uitzetten:

$$\left[ \ln(v_{\text{dr}}) \right] = - \left[ \frac{t}{\tau} \right] \quad \text{of:} \quad \frac{v_{\text{dr}}(t)}{v_{\text{dr}}(0)} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

De grafiek van de driftsnelheid na uitzetten is in fig. 2.25a.



a Driftsnelheid na uitzetten bron.

b Driftsnelheid na aanzetten bron.

Figuur 2.25 Driftsnelheid als functie van de tijd bij uitzetten of aanzetten. De raaklijn vanaf het schakelpunt treft de tijdas resp. maximumwaarde na de tijd  $\tau$ ; de werkelijke grafiek heeft daar de tijd  $5\tau$  voor nodig.

**Uit- en in-schakeltijd** Bekijk figuren 2.25a, b. Ten tijde  $t = 0$  heeft de lading een driftsnelheid  $v_{\text{dr}}$ . De driftsnelheid sterft uit in een tijd die bepaald wordt door de relaxatietijd. Na de *relaxatietijd*  $\tau$  is de driftsnelheid (en dus de stroom) met een factor  $e = 2,7$  gedaald. Iets analoogs gebeurt bij het aanzetten van de ‘stroom’; dan *groeit* de driftsnelheid exponentieel naar de stationaire waarde van de driftsnelheid. Praktisch is de uit- resp. *inschakeltijd* van de stroom 5 relaxatietijden, omdat we dan minder dan een procent overhouden van, resp. tekort komen op, de eindwaarde.

**Voorbeeld Relaxatie in koper** Bepaal de relaxatietijd en de uitschakeltijd uit de beweeglijkheid van  $-4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Vs}$ . Bereken ook de ‘driftweg’ die het geleidingslektron in de relaxatietijd heeft afgelegd, en vergelijk die met de atoomafstand.

Vul in voor een geleidingselektron:

$$\tau = \frac{m^* \mu}{q} = \frac{m_e \mu_n}{-e} = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

We hebben, bij gebrek aan beter, de effectieve massa van het geleidingselektron gelijk gesteld aan de elektronmassa. Meestal is dat een overschatting, zodat de relaxatietijd daardoor overschat is.

De afgelegde afstand in de richting van het veld is ongeveer driftsnelheid maal relaxatietijd. De driftsnelheid hangt natuurlijk ook af van de veldsterkte. Nemen we aan dat de veldsterkte 1 kV/m is, dan is de driftsnelheid 1000 keer de beweeglijkheid, 4,2 m/s, en dus is de 'driftweglengte'  $4,2 \cdot 2,4 \cdot 10^{-14} = 1 \cdot 10^{-13}$  m. De afstand tussen de koperatomen is  $2,5 \cdot 10^{-10}$  m; dus een geleidingselektron komt praktisch ter plekke tot stilstand. In werkelijkheid 'passeert' het in die tijd nog zo'n 150 atomen. Immers, het elektron heeft een 'ongerichte' Fermisnelheid rond de ionen (los van de veldsterkte!) in de orde van  $1,6 \cdot 10^6$  m/s; de Fermisnelheid is  $3,8 \cdot 10^5$  maal groter dan de driftsnelheid.

- Opg 2.6.1** \*\* Bereken de relaxatietijd voor meerderheidsladingen in:
- |                |  |
|----------------|--|
| a Na           | [Antw. $\tau = 2,9 \cdot 10^{-14}$ s]  |
| b Cd (cadmium) | [Antw. $\tau = 0,27 \cdot 10^{-14}$ s] |
- Opg 2.6.2** \* De relaxatietijd  $\tau$  van een materiaal is de tijd waarin na uitschakelen
- A het aantal beweeglijke ladingen een factor  $e$  is afgenomen
  - B de driftsnelheid een factor  $e$  is afgenomen
  - C de stroom een factor  $e$  is afgenomen
- Opg 2.6.3** \*\*\* De tijd waarin de driftsnelheid  $v_{dr}$  bij uitschakelen van de spanningsbron is afgenomen tot de helft is  $\tau \ln 2$  seconden als de relaxatietijd  $\tau$  is.
- A waar
  - B onwaar

## 2.6.2 Recombinatie

**Generatie/recombinatie-proces** De stroomsterkte wordt bepaald door twee grootheden: de driftsnelheid en het aantal ladingen. Het aantal geleidingselektronen en gaten kan worden verminderd door **recombinatie** (latijn 'recompingere' is 'weer samenvoegen'), en vermeerderd door **generatie** (latijn 'generere' is 'voortbrengen'). Bij generatie ontstaan een *geleidingselektron* en een *gat* uit een *bindingselektron*. Bij recombinatie 'vangt' een gat weer een geleidingselektron; in werkelijkheid gebeurt dat vaak *indirect*, doordat een 'tussenatoom' en een geleidingselektron en een gat vangt. In thermisch evenwicht zijn *generatie* en *recombinatie* van paren geleidingselektron/gat 'in evenwicht'. Recombinatie heeft alleen effect *buiten thermisch evenwicht* als er een 'teveel' aan deeltjes is. Denk aan een halfgeleider, waarbij met behulp van een

sterke puls ingestraald licht een groot aantal bindingslektronen wordt aangeslagen, zodat grote aantallen extra geleidingslektronen en gaten ‘genereren’. Of denk aan de basislaag van een transistor, waarin, door emissie vanuit de emitter, grote aantallen extra minderheidsladingsdragers worden ‘geschoten’.

**Dragerlevensduur** Recombineren (‘weer verdwijnen’) is een proces waarbij de dichtheden  $n$  en  $p$  van de geleidingslektronen en gaten stabiel (d.w.z. altijd náár het evenwicht toegaand) verminderen tot de evenwichtswaarden  $\bar{n}$  en  $\bar{p}$  weer bereikt zijn:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} \sim -(np - \bar{n}\bar{p})$$

De evenredigheidsconstante kan, op grond van het verschil in eenheden in het linkerlid (dichtheid/s) en in het rechterlid (dichtheid<sup>2</sup>), worden geschreven als een omgekeerde *karakteristieke dichtheid* maal een omgekeerde *karakteristieke tijd*; als karakteristieke dichtheid nemen we de som van de evenwichtsdichtheden  $\bar{n} + \bar{p}$  (het *totale* aantal deeltjes per volume-eenheid). De karakteristieke tijd heet de (drager)*levensduur* of **recombinatietijd**  $\tau_r$ . Het **generatie/recombinatie**-proces wordt beschreven door:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dp}{dt} = -\frac{(np - \bar{n}\bar{p})}{(\bar{n} + \bar{p})\tau_r}$$

Merk op dat, bij een gegeven evenredigheidsconstante, de levensduur  $\tau_r$  van gaten met geleidingslektronen omgekeerd evenredig is met het *totale aantal beweeglijke ladingen in evenwicht* (hoe meer, hoe sneller):

$$\boxed{\tau_r \approx C/(\bar{n} + \bar{p})}$$

De evenwichtsaantallen voor  $n$  en  $p$  bij de zuivere halfgeleider zijn  $\bar{n} = n_i$  en  $\bar{p} = n_i$  (hierop komen we nog terug). De evenwichtsaantallen bij de onzuivere halfgeleider hangen af van de dotatie:  $\bar{n} = n_d$ ,  $\bar{p} = 0$  in n-type, of  $\bar{p} = n_a$ ,  $\bar{n} = 0$  in p-type. Met behulp van bijzondere onzuiverheden kunnen ook andere waarden worden verkregen, maar daar gaan we niet op in. De evenredigheidsconstante  $C$  is afhankelijk van vele factoren, zoals temperatuur en de soort onzuiverheden. Neem als orientatie voor  $C$ :  $C \propto 10^{17} \text{ s/m}^3$ .

**Verval aantaloverschot** Neem aan dat de aantallen van geleidingslektronen en gaten *alleen* maar veranderen door *recombinatie* (dus er is geen ‘afvloeiing’). Door de aard van recombinatie (een geleidingslektron valt in een gat waarbij *beiden* verdwijnen) zal het verschil tussen

de dichtheden altijd constant blijven:  $p - n = \text{constant}$ . Dat stelt ons in staat om het generatie/recombinatie-proces ‘op te lossen’, net zoals we dat bij het aan/uitschakel-proces deden. Daartoe moet veel werk worden verzet. Als we echter eventjes wachten, kan het proces worden vereenvoudigd tot een exponentieel verval:

$$n - \bar{n} \approx (\bar{n} + \bar{p})e^{-t/\tau_r}$$

Daaruit concluderen we, dat de relaxatietijd van het verval gelijk kan worden gesteld aan de *recombinatietijd* of *levensduur*  $\tau_r$ . De levensduur voor gat en geleidingselektron zijn gelijk (natuurlijk). We nemen aan, dat de levensduur in het normaal gedoteerde materiaal ongeveer  $10^{-6}$  s is. Er bestaan nu gebieden, zoals de basis van de transistor (in het volgend hoofdstuk gaan we daar uitgebreid op in), waar de evenwichtsaantallen verschoven zijn: daar kan de levensduur dus oplopen tot wel  $10^{-3}$  s. (Gelukkig maar: anders zou het experiment van Shockley en Haynes niet gelukken).

**Conclusie** *Bij de generatie en recombinatie van gaten en geleidings-elektronen kunnen twee omstandigheden worden onderscheiden: bij thermisch evenwicht en buiten thermisch evenwicht. In het eerste geval is de relaxatietijd, in- of uitschakeltijd,  $\tau$  afhankelijk van de beweeglijkheid (dus afhankelijk ladingtype):*

$$\tau = \frac{m\mu}{q}$$

*In het tweede geval is de levensduur  $\tau_r$  (voor geleidingselektron en gat) afhankelijk van de evenwichtsdichtheden (die zijn dotatie afhankelijk, maar type onafhankelijk); als oriëntatie:*

$$\tau_r \propto 10^{17}/(\bar{n} + \bar{p})$$

**Opg 2.6.4** \*\* Benader de levensduur voor ladingen in:

- a n-Si met dotatie  $10^{-6}$   
b n-Ge met dotatie  $10^{-3}$

[Antw.  $\tau_r \propto 10^{-6}$  s]  
[Antw.  $\tau_r \propto 10^{-9}$  s]

**Opg 2.6.5** \* De dragerlevensduur  $\tau_r$  van een materiaal is de tijd waarin

- A het aantal beweeglijke ladingen een factor  $e$  is afgenomen  
B de driftsnelheid een factor  $e$  is afgenomen  
C de stroom een factor  $e$  is afgenomen

**Opg 2.6.6** \*\*\* De tijd waarin het aantal extra gegenereerde gaten na het uitschakelen van de lichtbron is afgenomen tot een procent is  $5\tau$  seconden als de dragerlevensduur  $\tau$  is.

- A waar B onwaar

## 2.7 Geleiding en diffusie

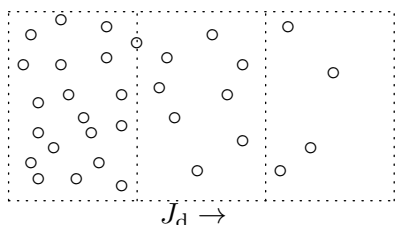
**Inleiding** In de voorgaande paragrafen hebben we het gehad over de geleiding van elektrische stroom in vastestoffen. Een bindingslektron bleek te verplaatsen naar een naburige positie waar een binding niet bezet was, d.w.z. een plekje zonder (bindings)elektron. Ook een geleidingslektron, dat door het veld van zijn plaats werd getrokken, liet een lege plek achter waar een ander (geleidings)elektron werd ‘ingetrokken’. We zullen hier verder ingaan op dit zogenaamde **diffusieproces** om de wet te vinden die het verband tussen geleiding en diffusie geeft. Daarbij zal blijken dat de beweging van elektronen kan worden begrepen vanuit de wet die de verdeling van deeltjes over toestanden bepaalt. Dat is de *verdelingswet van Boltzmann*, een benadering van de *verdelingswet van Fermi-Dirac*. In beide wetten speelt de *Fermi-energie*, en de daardoor bepaalde *voltapotentiaal*, een beslissende rol.

### 2.7.1 Coëfficiënten van diffusie en geleiding

**Veldstroom en wet van Ohm** Een elektrische stroom is het gevolg van een elektrisch spanningsverschil  $U$ . Meestal is een uitwendige bronspanning nodig om een potentiaal  $V$  te doen ontstaan, maar er zijn ook andere mogelijkheden. Denk bijvoorbeeld aan thermospanning, inductiespanning, foto-elektrisch galvanische spanning, enzovoort. De spanning veroorzaakt een elektrisch veld  $E = -dV/dx$  dat krachten op ladingen uitoefent. Daardoor ontstaat een **veldstroom**  $J_e$ , die in veel gevallen kan worden beschreven door de **wet van Ohm**:  $J_e = \gamma E$ , met geleidbaarheid  $\gamma$ . Tezamen leidt dat tot de **veldstroom**:

$$J_e = -\gamma \frac{dV}{dx} \quad \text{wet van Ohm}$$

**Diffusiestroom en wet van Fick** Het ‘diffusie’ verschijnsel is op een vergelijkbare manier te beschrijven. We beperken ons tot stroom in één richting, waarbij het aantal ladingen per volume in de x-richting afneemt. Schuiven we langs een veldlijn een afstand  $dx$  op, dan vermindert de ladingsdichtheid. Heel aannemelijk is, dacht Fick, dat de stroomdichtheid  $J_d$  van de **diffusiestroom** evenredig zal zijn met de afname van de ladingsdichtheid in de stroomrichting:



Figuur 2.26 Diffusie van ladingen: het overschot aan deeltjes links ‘diffundeert’ naar rechts waar een tekort is

$$J_d = -D \frac{d\rho}{dx} \quad \text{wet van Fick}$$

We merken op, dat de **wet van Fick** niet alleen geldt voor systemen met ladingen, maar in het algemeen voor systemen met *deeltjes*, zoals gassen. In dit geval konden we de *deeltjes*dichtheid omzetten in een *ladings*dichtheid door te vermenigvuldigen met de elektrische lading van de deeltjes; deeltjesstroom werd ladingsstroom, deeltjesdichtheid werd ladingsdichtheid.

**Diffusie-coëfficiënt** De evenredigheidsconstante  $D$  heet de **diffusie-coëfficiënt**. De eenheid volgt uit die van de stroomdichtheid  $J_d$  ( $A/m^2$ ), de eenheid van de ladingsdichtheid  $\rho$  ( $C/m^3 = As/m^3$ ) en de eenheid van  $dx$  (m); bijgevolg is de eenheid van  $D$ :  $(A/m^2)m/(As/m^3) = m^2/s$ , een oppervlak per tijd. We hadden al gezien dat er een *kwalitatief* verband is tussen geleiding en diffusie. De gelijkenis tussen de twee wetten voor stroom—de diffusiestroom, veroorzaakt door diffusie, en de veldstroom, veroorzaakt door het potentiaalveld—doet een *kwantitatief* verband tussen  $\rho$  en  $V$  verwachten, evenals tussen de evenredigheidsconstanten  $D$  en  $\gamma$  (feitelijk:  $\mu$ ). Dat bracht Einstein op een gedachte.

**Opg 2.7.1** Welke van onderstaande beweringen zijn waar?

- a \* In de wet van Fick,  $J_d = -Dd\rho/dx$ , stelt  $\rho$  de soortelijke weerstand voor.
 

A waar	B onwaar
--------	----------
- b \* De wet van Fick geldt alleen in homogene media.
 

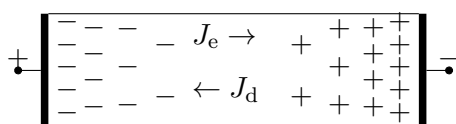
A waar	B onwaar
--------	----------
- c \* De wet van Fick geldt altijd in inhomogene media.
 

A waar	B onwaar
--------	----------
- d \* De verplaatsing van bindingselektronen met als gevolg gaten-geleiding kan worden beschreven met het begrip diffusiestroom.
 

A waar	B onwaar
--------	----------

**Einstein's gedachte-experiment** Einstein vergeleek *diffusi*estroom (tengevolge van diffusie) met *veld*stroom (tengevolge van een elektrisch veld). Daartoe bedacht hij een situatie waarin beide stromen tegelijk voorkomen: een geleider wordt onder een uitwendige spanning gezet, zonder dat er stroom gaat lopen (open circuit, zie fig. 2.27). Door de stroom zou immers het evenwicht verstoord worden. Verder is de geleider in **thermisch evenwicht**: overal is dezelfde temperatuur. De uitwendige spanningsbron doet een potentiaalverloop, en dus een elektrisch veld ontstaan in de geleider; stel dat de +spanning links is.





Figuur 2.27 Einsteins gedachte experiment: Veldstroom en diffusiestroom in evenwicht in een geleider tengevolge van een aangelegde uitwendige spanning.

Tengevolge van het elektrische veld zullen ladingen in de geleider worden getrokken naar de polen van de bron zodat een *veldstroom* gaat lopen in de richting van het veld. De positieve plaat trekt negatieve elektronen naar zich toe, dus loopt een stroom van links naar rechts:  $J_e = -\gamma dV/dx$ .

De *negatieve* ladingsdichtheid links, is uiteraard kleiner dan de positieve ladingsdichtheid rechts, waardoor een *diffusiestroom* ontstaat die van rechts naar links loopt:  $J_d = -Dd\rho/dx$ . De kring is open, zodat er in een evenwichtssituatie nergens nettostroom kan lopen: *de diffusiestroom is op iedere plaats gelijk maar tegengesteld aan de veldstroom*:

$$J = J_d + J_e = 0 \quad \text{stroomloos thermisch evenwicht}$$

**Evenwichtsverdeling van lading** De stroomloze thermische evenwichtsvergelijking wordt een vergelijking voor  $\rho$  door de veldstroom en de diffusiestroom in te vullen:

$$-D \frac{d\rho}{dx} - \gamma \frac{dV}{dx} = 0$$

We laten  $x$  weg door met  $dx$  te vermenigvuldigen:

$$-Dd\rho - \gamma dV = 0$$

Vergeet echter niet dat de geleidbaarheid ('impliciet', verborgen) afhangt van de ladingsdichtheid:  $\gamma = \rho\mu$ ; dus:

$$-Dd\rho - \rho\mu dV = 0$$

Dit is een D(ifferentiaal) V(ergelijking) met variabelen  $\rho$  en  $V$ . De oplossing, een exponentiële functie, komt tot stand door scheiden van variabelen en integreren zoals bij relaxatie (zie pag. 107 of wiskundeboek):

$$\begin{aligned} d\rho/\rho &= -(\mu/D)dV \\ \left[ \ln(\rho) \right] = \ln(\rho/\rho(0)) &= -(\mu/D)[V] = -(\mu/D)(V - V(0)) \\ \rho &= Ce^{-(\mu/D)V} \end{aligned}$$

De integratieconstante  $C$  is in het bijzonder afhankelijk van het aantal beschikbare ladingen bij het begin en de potentiaal daar. Dat  $\rho$  exponentieel afhangt van de potentiaal  $V$  is een speciaal geval van een *algemene wet*: de *verdelingswet van Boltzmann* voor een systeem van deeltjes in thermisch evenwicht.

**Verdelingswet van Boltzmann** Het is algemeen bekend dat deeltjes streven naar een zo laag mogelijke energietoestand, waarbij een competitie ontstaat tussen de vele deeltjes om de ‘plaatsen’ met de laagste energie. Een deeltje heeft daarbij slechts een bepaalde kans om in een (lage) energietoestand terecht te komen; omgekeerd is slechts een *fractie*  $f$  van de toestanden bij een hogere energie ‘bezet’ door een deeltje. Hoe worden de deeltjes verdeeld over de verschillende energietoestanden? Oftewel: hoe is de verdeling van de *fractie-bezet*? Maxwell heeft in 1892 laten zien hoe de fractie bezette (energie)toestanden van *atomen* (in een gas) eruit ziet, en Boltzmann heeft de ‘verdelingswet’ voor *vrije deeltjes* gevonden. De fractie-bezet is de *bezettingskans*  $f$  voor toestanden van elektronen rond de energie  $E$  in een kristal met chemische energie  $\mu$ ; volgens de **verdelingswet van Boltzmann** bepaalt door de **Boltzmann-factor**:

$$f \approx e^{-(E-\mu)/kT}$$

Het gaat daarbij om de competitie tussen de *extra energie*  $E - \mu$ , boven de ‘normale’ *chemische energie*  $\mu$ , en de *thermische (warmte) energie* gekenmerkt door de waarde  $kT$ ;  $T$  is de absolute temperatuur, en  $k$  is de **constante van Boltzmann** met de waarde:

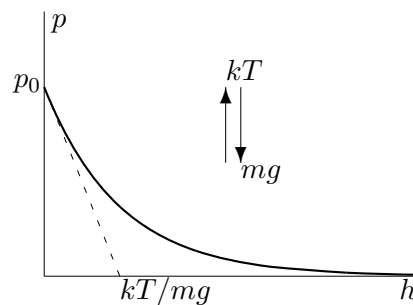
$$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Bij de 27°C is de warmteenergie:

$$T = 300 \text{ K} \quad kT = 25,8 \text{ meV}$$

De Boltzmann-factor komt, bijvoorbeeld, voor bij de competitie tussen extra zwaarte-energie  $E = mgh$  (in het gas is  $\mu = 0$ ) en warmte-energie  $kT$  van luchtmoleculen met massa  $m$  in de atmosfeer. Als we temperatuurverandering in eerste instantie verwaarlozen, dan neemt de luchtdichtheid exponentieel met de hoogte af; voor  $\text{N}_2$  is  $kT/mg = 11 \text{ km}$ , wat een idee geeft van de dikte van de atmosfeer.

Geleidings-elektronen en gaten in een kristal zijn te beschouwen als gasatomen: vrije deeltjes, waarvoor de Boltzmann-verdeling geldt. De energie is dan de elektrische (potentiële) energie  $E = qV$  in het kristal. Op de chemische energie komen we terug.



Figuur 2.28 Luchtdruk als functie van hoogte: de deeltjesdichtheid, dus de druk  $p$ , neemt exponentieel af met de zwaarte-energie, dus de hoogte, volgens de Boltzmannverdeling.

**Einstein relatie tussen  $\mu$  en  $D$**  Om het verband tussen de veldstroom en de diffusiestroom precies te krijgen herschrijven we de op pag. 113 gevonden ladingsdichtheid. De elektrische energie  $E$  van een geleidingselektron lading  $q = -e$  in potentiaal  $V$  is  $E = qV$ , dus substitueren we  $V = E/q$ :

$$\rho(x) = Ce^{-(\mu/Dq)E(x)}$$

De fractie bezette toestanden op de positie  $x$ , de bezettingskans  $f$ , is, op het aantal toestanden na, gelijk aan de ladingsdichtheid, dus:

$$f \sim e^{-(\mu/Dq)E(x)}$$

Na vergelijken met de *verdelingswet van Boltzmann* concluderen we dat de exponenten gelijke argumenten moeten hebben:

$$\mu/Dq = 1/kT$$

Wij herschrijven deze **Einstein relatie** voor een ladingdrager, geleidingselektron of gat, in de volgende vorm:

$\frac{\mu}{q} = \frac{D}{kT} \quad \text{Einstein relatie}$
--

Controleer eenheden:  $(\text{m}^2/\text{Vs})/C = (\text{m}^2/\text{VA}) = (\text{m}^2/\text{Js})$ . Deze afleiding van  $\mu$  in termen van  $D$  leert ons, dat elektrische geleiding wordt bepaald door diffusie.

**Conclusie** *Elektrische geleiding is een diffusieverschijnsel dat wordt bepaald door de verdelingswet van Boltzmann. In thermisch evenwicht geldt de Einstein relatie tussen de beweeglijkheid  $\mu$  en de diffusie-coëfficiënt  $D$  van een ladingdrager.*

**Opg 2.7.2 \*\*** Bereken de diffusie-coëfficiënt  $D$  bij 300 K, met behulp van de Einstein relatie, voor:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| a gaten in Ge                 | [Antw. $D_p = 0,91 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$ ] |
| b geleidingselektronen in Cu. | [Antw. $D_n = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ]  |
| c gaten in Be                 | [Antw. $D_p = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ]  |

**Opg 2.7.3 \*** De Boltzmann-factor geeft de fractie rond een bepaalde energie van:

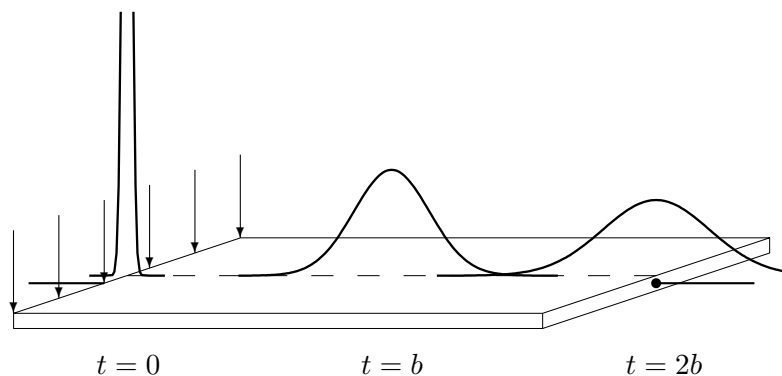
- A de elektronen
- B de elektronen die een toestand bezetten
- C de toestanden
- D de toestanden die met een elektron zijn bezet.

**Experiment van Shockley en Haynes** Om het verband tussen  $D$  en  $\mu$  zichtbaar te maken, bedachten Shockley en Haynes een experiment. Aan het ene einde van een geleider wordt op een heel klein plekje gedurende een heel korte tijd een groot aantal extra beweeglijke ladingen gemaakt. Bijvoorbeeld door een puls licht op het midden van een geleider te laten vallen, waardoor bindingslektronen worden losgemaakt en geleidingslektronen worden. De extra ladingen stromen onder invloed van een elektrisch veld naar de andere kant van de geleider, waar we de ladingsdichtheid meten (zie figuur 2.29). We merken twee dingen op:

1. Het duurt een tijdje voor de ‘gemiddelde’ extra lading aan de andere kant is vanwege de beperkte snelheid. Deze **looptijd**  $t$  wordt bepaald door de *beweeglijkheid*;
2. Sommige ladingen komen eerder dan andere aan de andere kant aan, omdat door de diffusie de deeltjes alle kanten uit willen. De **spreiding**  $\sigma$  (verbreding) van de plek met extra ladingen wordt bepaald door de *diffusie-coëfficiënt*:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{2Dt} \\ L &= \sqrt{D\tau}\end{aligned}$$

De  $\sigma$  bij de halve relaxatietijd (of levensduur) heet **diffusielengte**  $L$ . Uit de metingen (van het aantal ladingsdragers als functie van tijd en plaats) volgen tegelijk beweeglijkheid  $\mu$  en diffusie-coëfficiënt  $D$ . De relatie van Einstein kan zo worden gecontroleerd. En die klopt!



Figuur 2.29 Experiment van Shockley en Haynes. Op het midden van een strip geleider valt kortstondig een puls licht die daar ladingsdragers vrijmaakt. Door geleiding wordt de lading verplaatst, door diffusie wordt de lading verspreid. Getekend is de ladingsverdeling op verschillende tijdstippen; merk op dat de puls verbreed en verplaatst.

**Opg 2.7.4 \*\*\*** Bij het experiment van Shockley en Haynes valt een lichtpuls op het midden van een strip zuiver Si, dat links aan de + en rechts aan de – van een spanningsbron is aangesloten. Na enige tijd meten we aan de + kant van de strip:

- A geen puls
- B een verbrede puls na ‘korte’ tijd
- C een verbrede puls na ‘lange’ tijd
- D twee verbrede pulsen na elkaar

**Opg 2.7.5 \*\*\*\*** Op het –uiteinde van een strip Ge valt in het experiment van Shockley en Haynes een lichtpuls. Over de 5 cm lange strip staat 1 V spanning, zodat na enige tijd een ladingspuls de +zijde bereikt.

a Hoeveel tijd heeft de lading nodig om de +zijde te bereiken?

[Antw.  $t = 6$  ms]

b Welke spreiding heeft de puls dan gekregen ( $T = 300$  K)?

[Antw.  $\sigma = 1,1$  cm]

**Veldstroom en/of diffusiestroom?** Er worden hier *begrippen* als diffusiestroom en veldstroom gehanteerd, maar die stromen lopen niet altijd *werkelijk* in het materiaal. Bij het experiment van Einstein (zie fig. 2.27) loopt niet de ene helft van de elektronen in de geleider naar de ene kant, en de andere helft naar de andere kant! Wat er wèl gebeurt is, dat op iedere lading apart verschillende *krachten* werken: *veldkracht* en *diffusiekracht*, en dat die krachten *gemiddeld* in evenwicht zijn. Een vergelijkbare situatie kennen we in het al genoemde voorbeeld, namelijk een kolom lucht waarin (naarmate men hoger komt) het aantal deeltjes afneemt (zie fig. 2.28). Daar zouden we de dichtheid kunnen berekenen door uit te gaan van een diffusiestroom naar boven toe en een zwaartekrachtstroom naar beneden toe. Van deze twee stromen merken we echter niets: ze zijn slechts denkbeeldig. Pas als een gas in een lege ruimte stroomt merken we de diffusiestroom *apart* op.

De deeltjesverdeling kan gelukkig *rechtstreeks* uit de verdelingswet van Boltzmann worden berekend, omdat daarin *beide* aspecten zijn opgenomen; men noemt die methodiek *statistische mechanica*, een aparte tak van de natuurkunde. Zo zullen wij ladingsdichtheden in de vastestof berekenen uit de verdelingswet van Boltzmann. Ben je er echter wel van bewust, dat in de *elektrotechnische* literatuur praktisch alleen wordt gewerkt met diffusie- en veldstromen: dat is omslachtig, maar kan natuurlijk ook.

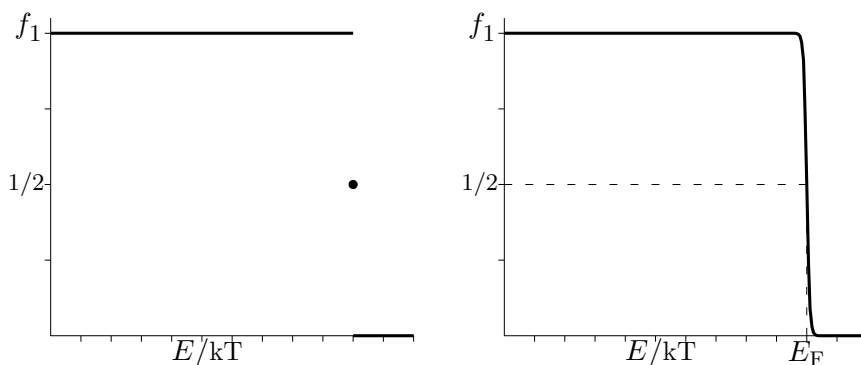
### 2.7.2 Geleiding en Fermi-energie

**Verdelingswet van Fermi-Dirac** De indruk zou kunnen zijn ontstaan dat elektronen (en gaten) altijd onderhevig zijn aan de verdelingswet van Boltzmann. Dat is echter bij lagere temperaturen zeker niet juist (en gelukkig maar zullen we zien: er zou anders geen gatengeleiding zijn, en dioden en transistoren zouden niet bestaan). Bij lagere temperatuur gedragen elektronen zich niet meer als ‘vrije’ ononderscheidbare deeltjes. Het zijn ‘fermionen’, deeltjes die niet toestaan dat een ander deeltje in dezelfde toestand is. (We hebben die eigenschap al ontmoet in de vorm van het Pauli principe.) Fermi (en onafhankelijk daarvan ook Dirac) heeft (1927) laten zien hoe fermionen zich verdelen over de verschillende energietoestanden bij een gegeven temperatuur. De fractie bezet  $f$  van de toestanden bij (of beter: rond) de energie  $E$  is volgens de **verdelingswet van Fermi-Dirac** bepaald door de bezettingskans:

$$f = \frac{1}{1 + e^{(E-\mu)/kT}}$$

De materiaalconstante  $\mu$  is de **chemische energie**. Bij  $T = 0$  is de chemische potentiaal gelijk aan de **Fermi-energie**. De Fermi-energie kan worden gezien als de hoogste energie die een elektron kan krijgen bij  $T = 0$  (tgv het Pauli principe worden immers eerst alle lagere energieniveaus bezet; zie ook fig 2.30a). De chemische potentiaal is weinig temperatuur afhankelijk, dus ongeveer gelijk aan de Fermi-energie  $E_F$ , welke benadering we verder zullen gebruiken:

$$\mu \approx E_F$$



a Bij  $T = 0$ : onder de Fermi-energie  $E_F$  worden alle toestanden bezet, erboven alle onbezet; ieder elektron heeft een zo laag mogelijke energie.

b Bij  $T = 300\text{K}$ : rond  $E_F$  zijn er zowel toestanden onbezet als bezet, omdat de thermische energie gebruikt is om naar een iets hogere energie te komen.

Figuur 2.30 Fractie bezette elektrontoestanden  $f$  als functie van de energie bij twee temperaturen. Bij de energie  $E_F$  springt de grafiek via  $\frac{1}{2}$  omlaag.

Bij hoge temperatuur en energie  $((E - E_F)/kT > 5)$  kan de Fermi-Dirac verdeling vereenvoudigd worden tot de Boltzmann-verdeling (zie ook fig. 2.30b):

$$f \approx e^{-(E-E_F)/kT}$$

**Opg 2.7.6 \*** De Boltzmann-factor voor elektronen met energie  $E$  in een kristal met Fermi-energie  $E_F$  heeft de grootte:

- A  $\exp(-E/kT)$
- B  $\exp(-(E - E_F)/kT)$
- C  $\exp((E - E_F)/kT)$
- D  $\exp(E/kT)$

**Opg 2.7.7 \*\*** Bereken, en schets de grafiek van, de staart van de fractie bezet van geleidingselektronen  $f$ , in de Boltzmann benadering. Neem het interval van  $E - \mu = 0$  eV tot  $E - \mu = +1$  eV in stappen van  $\frac{1}{4}$  eV

a bij de 'werktemperatuur'  $T = 300$  K

[Antw. Van  $f = 1$  tot  $4 \cdot 10^{-18}$ ]

b met hoge thermische energie bij  $T = 3000$  K

[Antw. Van  $f = 1$  tot  $2 \cdot 10^{-2}$ ]

**Fermi-energie en stroomdichtheid** De betekenis van de hoogte van de *Fermi-energie* voor geleiding maken we duidelijk door na te gaan wat er gebeurt als we in het Einstein experiment wèl stroom laten lopen in *thermisch evenwicht* (thermische stromen zullen we niet behandelen). Gaat nu de veldstroom het winnen van de diffusiestroom of gebeurt er iets anders? Welnu, vooruitlopend op het verhaal, de Fermi-energie zal plaatsafhankelijk worden, en de 'helling' ervan zal de stroom bepalen. We beperken ons hier tot geleidingselektronen; gaten gaan, zijnde ontbrekende elektronen, analoog.

In de Boltzmann benadering geldt voor de ladingsdichtheid van de geleidingselektronen:

$$\rho = C e^{-(E-E_F)/kT}$$

waarin de elektrische energie  $E = qV$  en  $q = -e$ . De potentiaal  $V$  en de Fermi-energie  $E_F$  zijn plaatsafhankelijk. De *diffusiestroom*  $J_d$  krijgen we door differentiëren (met de 'kettingregel') naar  $x$ :

$$J_d = \frac{\rho D}{kT} \left( q \frac{dV}{dx} - \frac{dE_F}{dx} \right)$$

Met behulp van de Einsteinrelatie  $D/kT = \mu/q$ , en de relatie  $\gamma = \rho\mu$  wordt de diffusie-coëfficiënt uitgedrukt in de *geleidbaarheid*:  $\rho D/kT = \gamma/q$ . De diffusiestroom kan dan worden gesplitst in *twee termen* tot:

$$J_d = +\gamma \frac{dV}{dx} - \frac{\gamma}{q} \frac{dE_F}{dx}$$

We herinneren eraan dat de eerste term tegengesteld is aan de *veldstroom*  $J_e = -\gamma \frac{dV}{dx}$ . De *netto stroomdichtheid*  $J$  is de som van diffusie- en veldstroom in thermisch evenwicht,  $J = J_d + J_e$ :

$$J = -\gamma \frac{d(E_F/q)}{dx} \quad q = -e$$

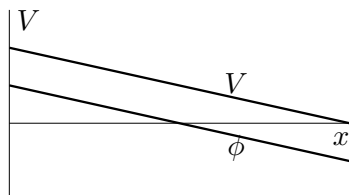
**Voltapotentiaal en stroomdichtheid** We zien tot onze verbazing dat voor het bepalen van de *totale* stroom de elektrische potentiaal, uit de wet van Ohm, is vervangen door een andere ‘potentiaal’ (de eenheid is immers Volt=J/C), de Fermi-energie afhankelijke potentiaal:  $E_F/(-e)$ . Voor gebonden ladingen (in dit geval aan het kristal gebonden) is de energie negatief; dus is de potentiaal positief. Deze potentiaal speelt een belangrijke rol bij elektrische verschijnselen in kristallen (zoals we in een volgend hoofdstuk zullen zien). De **voltapotentiaal**  $\phi$  definiëren we algemeen met de chemische energie  $\mu$  als:

$$\phi = -\mu/e$$

De algemene *stroomvergelijking* (voor elektronen of gaten):

$$J = -\gamma \frac{d\phi}{dx}$$

vat de wetten van Ohm en Fick samen. Dat is het juiste uitgangspunt voor de beschrijving van een situatie waarin er tegelijk en elektrische stroom en diffusiestroom is—zoals in de contactlaag tussen p-halfgeleider en n-halfgeleider. Bij temperatuur  $T = 0$  wordt  $\mu = E_F$ , dus de nultemperatuur-voltapotentiaal is  $\phi_F = -E_F/e$ .



Figuur 2.31 Voltapotentiaal  $\phi$  en potentiaal  $V$  als functie van de positie  $x$  in een geleider: voltapotentiaal en potentiaal lopen evenwijdig

### Voltapotentiaal en potentiaal

In een geleider is de stroom constant, zodat de grafiek van  $\phi$  tegen de afstand  $x$  een rechte lijn is met de rc bepaald door de stroomsterkte. Als de veldsterkte in de geleider ook overal constant is, dan lopen voltapotentiaal en potentiaal  $V$  evenwijdig. In dat geval kunnen we evengoed  $V$  gebruiken om de stroom te berekenen, zoals we bij de wet van Ohm doen. Als de veldsterkte niet meer constant is, en de spanning niet lineair verloopt—bij



halfgeleidercontacten treedt dat op—dan kan de werkelijke stroom slechts worden bepaald uit de voltapotentiaal, (dus de Fermi-energie).

**Opg 2.7.8** \* Gatenstroom wordt, in het algemeen, bepaald door de potentiaal:

- A  $V$
- B  $\phi = E_F/q$  met  $q = +e$
- C  $\phi = E_F/q$  met  $q = -e$

**Opg 2.7.9** \* I Voor een gat geldt:  $J = +d(E_F/e)/dt$ ;

II Voor een geleidingselektron geldt:  $J = -d\phi/dt$ ;

- A beide waar
- B alleen I waar
- C alleen II waar
- D beide onwaar

**Opg 2.7.10** \*\*\* Van Cu wordt gegeven dat onder neutrale omstandigheden de voltapotentiaal  $\phi = 4,6\text{ V}$  is. Bij een rechte Cu-geleider (lengte 10 cm) wordt de linker zijde,  $x = 0$ , geaard en de rechterzijde,  $x = 0,1\text{ m}$ , op  $+1,0\text{ V}$  gezet.

a Bereken, en teken de grafiek van, de voltapotentiaal als functie van de positie. [Antw.  $\phi_x = -4,6 + 10x$ ]

b Bereken de stroomdichtheid uit het verloop van de voltapotentiaal. [Antw.  $J = -\gamma d\phi_x/dx = -\gamma 10 = -5,9 \cdot 10^8\text{ A/m}^2$ ]

c \*\*\* Bereken de stroomsterkte. [Antw.  $I = ?$ ]

**Opg 2.7.11** Welke van onderstaande beweringen zijn waar?

a \*\*\* Uit de vergelijking van Einstein concluderen we dat de diffusiecoëfficiënt waarschijnlijk temperatuur afhankelijk is.

- A waar
- B onwaar

b \*\*\* De juiste interpretatie van de vergelijking van Einstein,  $\frac{D}{kT} = \frac{\mu}{q}$ , de beweeglijkheid per eenheid van lading komt overeen met de diffusiecoëfficiënt per eenheid van thermische energie, is: elektrische geleiding is een diffusieverschijnsel.

- A waar
- B onwaar

## 2.8 Elektronenergie in kristal

**Van atoom naar kristal** We hebben gezien dat de geleiding nauw samenhangt met de verdeling van de energie over de geleidingselektronen of gaten. We bezien nu in meer detail welke energie een elektron in de vastestof kan hebben. Daarbij gaan we uit van de situatie: elektronen in een *atoom* (zie fig. 2.32a). De vraag is natuurlijk of de *elektronenergie* anders zal zijn als er veel atomen in een kristal zitten. Een ding blijft: de elektronenergie zal negatief moeten zijn, om het aan het kristal te binden. We hebben gezien, dat we in een kristal—naast de elektronen in de ionen—te maken hebben met twee soorten elektronen: de bindings-elektronen en de geleidings-elektronen. Wanneer het kristal wordt gevormd, vanuit de gas en vloeistoffase, komen de valentie-elektronen onder invloed van de ionen rondom, waarbij hun energie beïnvloed wordt.



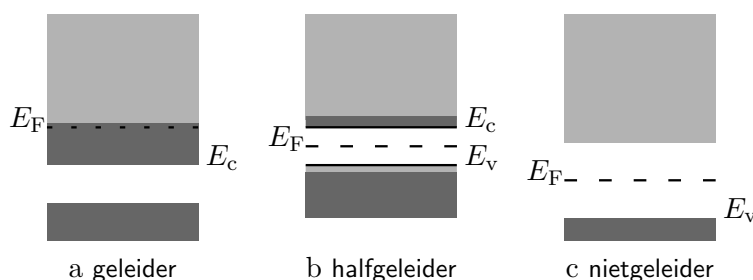
a In atoom: duidelijk gescheiden elektron toestanden, ook al wordt de 'afstand' kleiner bij de hogere energieën. De band bestaat uit de toestanden van de vrije elektronen

b In kristal: de vele toestanden rond dezelfde atoom-toestand splitsen naar iets lager gelegen banden (dan bij atoom). De banden blijven meestal gescheiden

Figuur 2.32 Elektronenergie van elektron toestanden in een atoom en in een kristal met elkaar vergeleken. De energie staat verticaal; een streep duidt een toestand aan, een arcering een band van toestanden (of de vrije toestanden)

**Energiebanden** Ieder ion in het kristal apart heeft valentie-elektron toestanden, waardoor in het kristal tezamen zéér veel elektrontoestanden ontstaan voor de niet-gebonden elektronen. Denk bijvoorbeeld aan  $10^{28}$  toestanden per  $\text{m}^3$ . De energieën daarvan zullen zeer dicht bij elkaar liggen. We noemen zulke aaneengesloten energietoestanden een **energieband**. Bedenk wel, dat het niveau van de energie—ten opzichte

van de vergelijkbare toestand in het atoom—omhoog is gegaan, maar dat de energie van toestanden in principe (niet werkelijk!) kan oplopen tot aan de vacuumenergie nul (zie fig. 2.32b). De toestand van een elektron wordt beschreven met *kwantumgetallen*, waarvan de energie de belangrijkste is. In een atoom cirkelen de elektronen *rond* het atoom, daarom is daar het *impulsmoment* een kwantumgetal. In de vastestof zullen de *niet*gebonden elektronen door het kristal heen kunnen, al of niet ‘in de buurt’ blijvend; de **kristalimpuls** is dáár het kwantumgetal waarmee de vele toestanden worden beschreven. Ofschoon de kristalimpuls een belangrijke rol speelt in de vastestof (zeker bij Si) zullen wij er toch niet op ingaan.



Figuur 2.33 Bandenergieën voor elektronen in de vastestof, met de Fermi-energie, de hoogste ‘bereikte’ elektronenergie bij  $T = 0$ , voor drie soorten ‘geleiders’.

**Bindingsband en geleidingsband** De aanwezige beweeglijke elektronen moeten, volgens het *Pauli-principe*, over die verschillende toestanden (met verschillende kwantumgetallen) verdeeld worden. Verder zullen elektronen een toestand zoeken met een zo laag mogelijke energie. Er zijn dan twee mogelijkheden, gekenmerkt door de energieband waarin het elektron terecht komt:

**bindingsband** (of *valentieband*) de toestanden van de *bindingselectronen*, (gebonden aan twee of enkele atomen); de energie is ten hoogste  $E_v$  (v van het engelse *valence*= binding);

**geleidingsband** de toestanden van de geleidingsselectronen (kunnen ‘vrij’ bewegen door het kristal, maar niet daarbuiten); de energie is tenminste  $E_c$  (c van *conductance*= geleiding);

De **bandafstand**  $E_g$  (naar het engelse *bandgap*) is de energieafstand tussen geleidingsband en bindingsband:

$$E_g = E_c - E_v$$

De hoogste energie die een elektron krijgt bij temperatuur nul heet de *Fermi-energie*  $E_F$ ; de waarde daarvan hangt dus heel veel af van het aantal beweeglijke elektronen per ion. Ook kan, onder invloed van ‘energie

stimulansen', zoals temperatuur of uitwendige elektrische spanning, de Fermi-energie worden verhoogd.

**Geleiders, halfgeleiders en niet-geleiders** De verschillende soorten geleiders worden gekenmerkt door de vullingswijze van de banden; bestudeer ook figuur 2.33 op pag. 123. Zo krijgen we, vereenvoudigd, de volgende **soorten geleiders**:

**geleider** de geleidingsband is gevuld vanaf  $E_c$  tot aan  $E_F$  omdat  $E_c < E_F$ ;

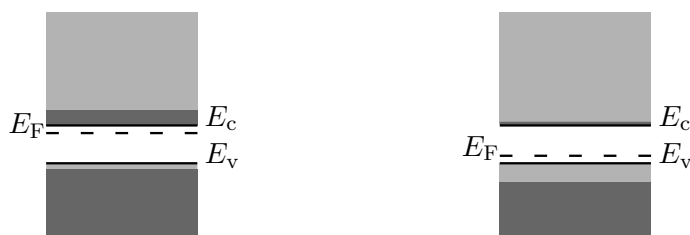
**halfgeleider** de bindingsband is geheel gevuld tot aan  $E_v$ , maar de geleidingsband (nog) niet, omdat  $E_v < E_F < E_c$ ;

**niet-geleider** de bindingsband is geheel gevuld omdat  $E_v < E_F$ , en de bandafstand is zéér groot;

Verder zijn er, zoals bekend door dotering, twee **soorten onzuivere halfgeleiders** (zie fig. 2.34):

**n-type** de vele van *donoren* komende extra beweeglijke elektronen brengen de Fermi-energie  $E_F$  dicht tegen de energie  $E_c$  van de geleidingsband, zodat er, onder invloed van de warmtebeweging, geleidingselektronen komen;

**p-type** door binding aan *acceptoren* vermindert het aantal beweeglijke elektronen, waardoor de Fermi-energie  $E_F$  dicht tegen de energie  $E_v$  van de bindingsband komt, zodat er, onder invloed van de warmtebeweging, gaten ontstaan;



a n-halfgeleider: de Fermi-energie is omhoog gegaan naar de geleidingsband toe, zodat onderin de geleidingsband veel elektronen zijn

b p-halfgeleider: de Fermi-energie is omlaag naar de bindingsband, zodat bovenin de bindingsband veel gaten zijn

Figuur 2.34 De bezetting van de elektron energiebanden, en de positie van de Fermi-energie  $E_F$ , in een onzuivere halfgeleider.

**Elektronenergiebezetting bij lage temperatuur** We weten ruwweg welke elektronenergieën *mogelijk* zijn, namelijk uit het bandenmodel. Verder weten we, bij gedoteerde halfgeleiders, hoeveel extra beweeglijke ladingen er *mogelijk* zijn, namelijk het aantal gedoteerde acceptoren

of donoren. Daardoor weten we iets over de Fermi-energie  $E_F$ . Maar hoeveel van die ladingen hebben *werkelijk* een bepaalde energie? We zagen in paragraaf 2.7.2 dat het aantal beweeglijke ladingen, rond een energie  $E$ , in ‘thermisch evenwicht’ wordt bepaald door de *verdelingswet van Fermi-Dirac* (of Fermi-Dirac-verdeling):

$$f = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}}$$

Wanneer de temperatuur  $T = 0$ , zullen alle energieën  $E < E_F$  volledig kunnen worden bezet door elektronen terwijl alle energieën  $E > E_F$  onbezet blijven (zie figuur 2.30a). Immers, voor de lagere energieën is het argument van de e-macht  $-\infty$ , zodat die term verdwijnt en  $f = 1$ . Daarentegen is boven  $E_F$  het argument  $+\infty$ , en de e-macht ‘explodeert’,  $f = 0$ . We zien dat alle toestanden onder de Fermi-energie volledig bezet (kunnen) worden, en daarboven geen enkele toestand. Omdat er geen warmte is, wint het streven naar de laagste energie het.

**Elektronenergiebezetting bij hogere temperatuur** Bij hoge temperatuur, zoals de voor toepassingen belangrijke werktemperatuur  $T = 300$ , is van de fractie bezet alleen de *staart* met hogere energie van belang. Hoe ziet die fractie bezet  $f$  eruit voor die elektronen? Zodra de fractie  $f$  onder een  $\frac{1}{4}$  is, zeg, zijn minder dan 1 van de 4 toestanden door een elektron bezet. Die elektronen kunnen praktisch vrij van de ene naar de andere toestand (toch meestal niet bezet). Ze zijn op te vatten als *vrije deeltjes*, waarvoor de *verdelingswet van Boltzmann* (of Boltzmann-verdeling) geldt:

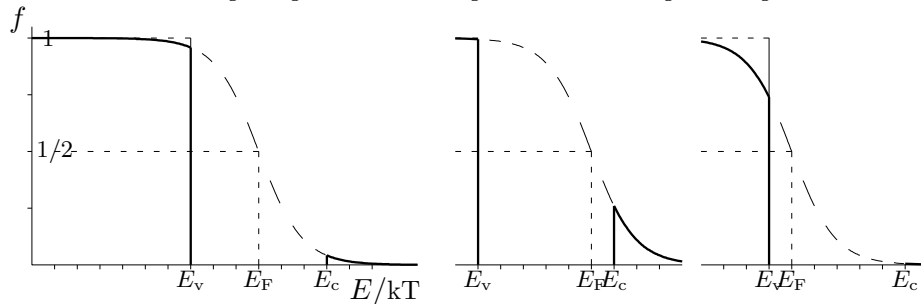
$$f \approx e^{-\frac{E-E_F}{kT}}$$

Daar men vaak geïnteresseerd is in het aantal geleidingselektronen of gaten bij een energie ver weg van de Fermi-energie ( $|E - E_F| > 5kT$ ), is de benadering met de Boltzmann verdeling vaak gerechtvaardigd.

- Opg 2.8.1 \*\*** Voor diamant (C, met dezelfde structuur als Si en Ge) geldt dat de Fermi-energie  $E_F = -5$  eV. Welke conclusie trek je daaruit voor de ladingdichtheid van beweeglijke lading, en dus voor de geleidbaarheid, bij 300 K resp 3000 K temperatuur. [Antw. bij  $T = 300$  K praktisch geen geleiding; bij  $T = 3000$  K enige geleiding]

**Elektronverdeling over energiebanden** Het *aantal* elektronen met energie  $E$  volgt uit de fractie bezette toestanden, door deze te vermenigvuldigen met het aantal toestanden rond die energie. Dus: als er geen toestand is bij een bepaalde energie, dan zijn er ongeacht de bezettingskans geen elektronen met die energie! Bij *ideale geleiders* zijn

er zoveel elektronen ten opzichte van het aantal elektrontoestanden, dat alle bindingen bezet zijn, en het hoogste elektron een geleidingselektron is: de *Fermi-energie ligt voor ideale geleiders in de geleidingsband.*



a. ideale halfgeleider      b. n-halfgeleider      c. p-halfgeleider  
 Figuur 2.35 Beweeglijke elektrondichtheid bij werkt temperatuur als functie van de energie; let op de positie van de Fermi-energie ten opzichte van de randen van de bindingsband ( $E_v$ ) en de geleidingsband  $E_c$

Bij **ideale halfgeleiders** zijn er zo weinig elektronen ten opzichte van het aantal toestanden, dat juist alle bindingen zijn bezet, en er net geen enkel geleidingselektron is: de Fermi-energie ligt voor ideale halfgeleiders juist *halverwege* de bindingsband en de geleidingsband. Zo hebben we bijvoorbeeld in Si bij  $T = 300$  K de volgende energiën:  $E_c = -4,28$  eV,  $E_v = -5,40$  eV en  $E_F = -4,85$  eV (zie tab. 2.4). Het spreekt vanzelf, dat er allerlei niet ideale geleiders en halfgeleiders zijn, waarbij de Fermi-energie op een wat andere positie ligt; ook kunnen zich complicaties voordoen, waarbij de energiën van bindingsband en geleidingsband door elkaar gaan lopen (dit nog afgezien van de afhankelijkheid van de kristalimpuls). We gaan daar allemaal niet op in.

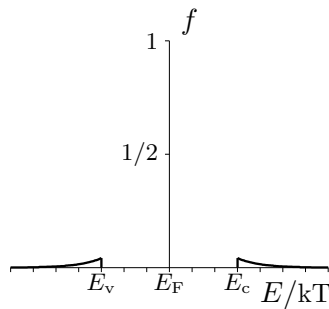
element	$n_0/\text{m}^3$	$n_i/\text{m}^3$	$-E_c/\text{eV}$	$-E_F/\text{eV}$	$-E_v/\text{eV}$
<b>Ge</b>	$4,42 \cdot 10^{28}$	$2,4 \cdot 10^{19}$	4,63	5,00	5,35
<b>Si</b>	$5,00 \cdot 10^{28}$	$1,5 \cdot 10^{16}$	4,28	4,85	5,40

Tabel 2.4 Enkele energieband-grootheden van de zuivere halfgeleiders Si en Ge bij de werkt temperatuur  $T = 300$  K;  $n_0$  is de atoomdichtheid;  $n_i$  is de eigen ladingsdrager-dichtheid. De meeste waarden zijn sterk temperatuurgevoelig, zodat ze als indicaties moeten worden gezien.

**Bindingselektronen en gaten** Er is een belangrijk gevolg van de Fermi-Dirac verdeling voor halfgeleiders in verband met *gaten*. Dat komt, doordat niet de absolute energie telt, maar de *relatieve* energie ten opzichte van de Fermi-energie:

$$\Delta E = E - E_F \quad f(E_F + \Delta E) = \frac{1}{1 + e^{\Delta E/kT}}$$

De halfgeleider wordt gekenmerkt door de *bindingsband* met negatieve energie  $\Delta E$  en de *geleidingsband* met positieve energie  $\Delta E$ .



Figuur 2.36 Fractie bezet bij ideale zuivere halfgeleider: de fractie voor de gaten onder  $E_F$  is exact het spiegelbeeld van die van de geleidingselektronen boven  $E_F$

In de bindingsband geldt voor *bindingselektronen* met energie  $\Delta E = -x$ , waarbij  $x > 0$ , een fractie *niet* bezette toestanden  $1 - f(E) = 1 - f(E_F - x)$  waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} &= 1 - f(E_F - x) \\ &= 1 - \frac{1}{1 + e^{-x/kT}} \\ &= \frac{e^{-x/kT}}{1 + e^{-x/kT}} \\ &= \frac{1}{1 + e^{x/kT}} \\ &= f(E_F + x) \end{aligned}$$

Kortweg: De kans op een gat in de bindingsband bij relatieve energie  $\Delta E = -x$  is gelijk aan de kans op een geleidingselektron in de geleidingsband bij relatieve energie  $\Delta E = +x$ . De Boltzmann-verdeling geldt dus niet alleen voor geleidingselektronen, maar evenzo voor gaten.

**Dichtheid eigen gaten en geleidingselektronen** Als, bij de zuivere *ideale halfgeleider*, de *Fermi-energie* halverwege de bandafstand is, dan is de fractie ‘gaten’ in de bindingsband gelijk aan de fractie ‘geleidingselektronen’ in de geleidingsband. Ook het aantal toestanden in de top van de bindingsband is gelijk aan het aantal op de bodem van de geleidingsband (voor de ideale halfgeleider). Daarom zijn ook de aantallen gaten en geleidingselektronen gelijk! De zuivere halfgeleider heeft bij een bepaalde temperatuur voor de *geleidingselektronen-dichtheid*  $n$  respectievelijk de *gaten-dichtheid*  $p$  een bijbehorende **eigen ladingsdragerdichtheid**  $n_i$ :

$$\boxed{n = p = n_i \quad \text{eigen dichtheid}}$$

Bij de werktemperatuur is de eigen ladingsdrager-dichtheid van de orde  $10^{16} / \text{m}^3$  voor Si en  $10^{19} / \text{m}^3$  voor Ge (zie tabel 2.4).

**Opg 2.8.2** \* De *Boltzmannfactor* voor geleidingselektronen met energie  $E$  in een kristal met Fermi-energie  $E_F$  heeft de grootte:

- A  $\exp(-E/kT)$
- B  $\exp(-(E - E_F)/kT)$
- C  $\exp(+(E - E_F)/kT)$
- D  $1/(1 + \exp(-(E - E_F)/kT))$
- E  $1/(1 + \exp(+(E - E_F)/kT))$

- Opg 2.8.3** \* De *Boltzmannfactor* voor gaten met energie  $E$  in een kristal met Fermi-energie  $E_F$  heeft de grootte:
- A  $\exp(-E/kT)$
  - B  $\exp(-(E - E_F)/kT)$
  - C  $\exp(+(E - E_F)/kT)$
  - D  $1/(1 + \exp(-(E - E_F)/kT))$
  - E  $1/(1 + \exp(+(E - E_F)/kT))$
- Opg 2.8.4** \* Bij 0 Kelvin geldt:
- I alle niveaus lager gelegen dan het Fermi-niveau zijn volledig bezet.
  - II alle niveaus hoger gelegen dan het Fermi-niveau zijn leeg.
- A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 2.8.5** \* De afstand van de valentieband tot de geleidingsband in een halfgeleidermateriaal is een grootheid,
- A die exponentieel afhankelijk is van de temperatuur
  - B die recht evenredig is met de temperatuur
  - C die voor de gebruikelijke halfgeleidermaterialen vrijwel gelijk is
  - D die typerend is voor het soort halfgeleidermateriaal
- Opg 2.8.6** \*\*\*
- I Het feit dat de elektrische geleidbaarheid van een normaal gedoteerde n-halfgeleider in de omgeving van kamertemperatuur vrijwel temperatuur onafhankelijk is, is het gevolg van de zeer kleine energy-gap van het donorniveau naar de geleidingsband.
  - II De elektrische geleidbaarheid in de omgeving van kamertemperatuur is bij een normaal gedoteerde halfgeleider vrijwel onafhankelijk van de dotatie.
- A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 2.8.7** \* Geef aan of de uitspraak waar of onwaar is:
- a Bij kamertemperatuur vormen in een  $10^{-6}$  verontreinigde n-type halfgeleider de geleidingselektronen de meerderheidsladingsdragers.
    - A waar    B onwaar
  - b Bij een zuivere halfgeleider is bij elke temperatuur het aantal gaten gelijk aan het aantal geleidingselektronen.
    - A waar    B onwaar
  - c \* Een  $n^+$  halfgeleider type is een halfgeleider waarbij positieve ladingsdragers de meerderheid vormen.
    - A waar    B onwaar



## MEERKEUZEANTWOORDEN

**Hoofdstuk 2 Kristal en elektron****2.1 Elektronen in vastestof**

- 2.1.1 B beste keus  
 2.1.2 D  
 2.1.3a B  
 2.1.3b B valentieelektronen kunnen geleidingselektronen worden  
 2.1.3c A bindingselektronen blijven dat  
 2.1.3d B slechte geleiders  
 2.1.3e B wel waar, maar van ondergeschikt belang  
 2.1.3f A  
 2.1.4 A

**2.2 Elektronen in ideale geleiders**

- 2.2.4 D een bindings-elektron wordt in een gat getrokken  
 2.2.5 B  
 2.2.6a A  
 2.2.6b B  
 2.2.6c B  
 2.2.6d B  
 2.2.7 C bindingselektronen zorgen voor gaten geleiding bij p-type  
 2.2.8 D wet van Mathiessen  
 2.2.9 B II is alleen waar voor vrije elektronen als 'effektief' wordt weggelaten

**2.3 Elektronen in halfgeleiders**

- 2.3.1 D  
 2.3.2 B  
 2.3.3a B  
 2.3.3b A  
 2.3.3c B  
 2.3.3d A  
 2.3.3e B  
 2.3.3f A  
 2.3.3g B gewoon evenredig toch!  
 2.3.3h B in een metaal wel, maar in een halfgeleider niet  
 2.3.5 A  
 2.3.6 C  
 2.3.7 C

**2.4 Geleiding in vastestof**

- 2.4.1 D

- 2.4.2 B  
 2.4.3 D  
 2.4.8 C  
 2.4.9 B  
 2.4.10 A  
 2.4.11 C  
 2.4.12 A  
 2.4.13aB in Ohm's regime niet  
 2.4.13bB omdat de atomen kris-kras bewegen  
 2.4.13cB  
 2.4.16aB  
 2.4.16bB alleen bij grote spanning  
 2.4.16cB nee, de soortelijke geleidingen  
 2.4.16dA  
 2.4.17 C bewering I geldt alleen bij zuivere stof  
 2.4.18 A  
 2.4.19 D II zou waar zijn als de temperatuurinvloed op beide bijdragen verwaarloosbaar zou zijn; nu wordt in II de temperatuurbijdrage dubbel geteld

**2.5 Beweeglijkheid en ladingsdichtheid**

- 2.5.1 A de eenvoudigste oplossing wordt verkregen door de beweging van ladingen als stroom te zien;  $E$  geeft de stroomrichting,  $B$  de Lorentzkracht, dus afbuiging  
 2.5.7a A definitie  
 2.5.7b B wel waar bij lage dichtheden  
 2.5.7c B de verplaatsingsrichting kan juist niet worden gevonden met de Hall-spanning  
 2.5.7d B als hiervoor  
 2.5.8 B bepaal het snijpunt met de lijn  $E = 1$

**2.6 Relaxatie en recombinatie**

- 2.6.2 B 'snelheid' preciezer dan 'stroom'  
 2.6.3 A maak gebruik van de eigenschap:  $e^{\ln 2} = 2$   
 2.6.5 A 'aantal' preciezer dan 'stroom'

2.6.6 A

**2.7 Geleiding en diffusie**

2.7.1a B ladingsdichtheid

2.7.1b B er zijn juist verschillen nodig  
voor diffusie

2.7.1c B geldt zolang de verschillen  
niet te groot worden

2.7.1d A

2.7.3 D

2.7.4 B tgv elektronen, die sneller  
zijn dan gaten die de andere  
kant uitgaan

2.7.6 B

2.7.8 C

2.7.9 A

2.7.11aA de beweeglijkheid is meestal  
niet omgekeerd evenredig  
met  $T$

2.7.11bA

**2.8 Elektronenergie in kristal**

2.8.2 B

2.8.3 C

2.8.4 A

2.8.5 D

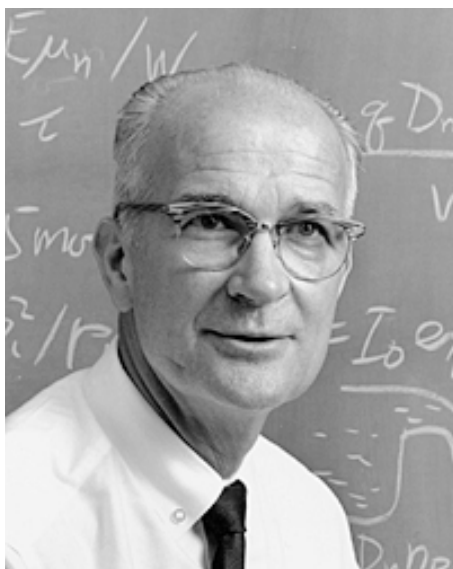
2.8.6 B

2.8.7a A

2.8.7b A

2.8.7c B





William Bradford Shockley  
(1910–1989)

*De Amerikaanse natuurkundige Shockley is bekend geworden door de ontwikkeling van de 'junction-transistor'. Voor die tijd bestudeerde hij de eigenschappen van de elektron-energiebanden van vaste stoffen. Toen hij werkzaam was op het beroemde 'Bell-Laboratorium' hield het team bestaande uit John Bardeen, Walter Brattain en William Shockley zich bezig met het ontwikkelen van een vaste-stof versterker (tot dan waren er alleen buisversterkers). Hun ideeën over het versterken van elektrongeleiding bij puntcontacten werd uitgepro-*

*beerd op een germanium plaatje, en, toevallig of niet: de eerste werkende (punt-contact)transistor werd zo in 1947 uitgevonden. Aan de hand van de gevonden eigenschappen werkte Shockley op papier de 'lagen-transistor' uit, en deze werd, na verdere ontwikkeling, in 1950 door Bell in productie genomen. Toch begon de ondernemende Shockley een eigen bedrijf voor de productie van transistors. Met hun drieën kregen de uitvinders van de transistor in 1956 de Nobelprijs voor natuurkunde.*

## Hoofdstuk 3

# KRISTALRAND EN ELEKTRON

### DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de hierna volgende begrippen zodanig te hebben opgenomen, dat u ermee kan werken en dat u ze kan toepassen in verschillende situaties, bijvoorbeeld zoals die in de elektrische vaste stof componenten voorkomen.

- uittreearbeid en uittree-energie elektron in kristal;
- Fermi-energie en voltapotentiaal, thermospanning;
- inwendig en uitwendig fotoelektrisch effect, fotogeleiding;
- inwendige en uitwendige thermische emissie van elektronen;
- emissiestroom, verzadigingsstroom en temperatuur;
- donor en donor-voltapotentiaal, acceptor en acceptor-voltapotentiaal;
- recombinatie van geleidingselektron en gat;
- dotatie, temperatuur en contactspanning bij halfgeleidercontacten;
- verarmingsgebiedmodel van Davydov voor gedoteerde halfgeleider;
- ruimteladingscapaciteit contactlaag, diëlektrische relaxatietijd;
- ideale diode, Schottky-diode en pn-diode;
- geleidende en niet-geleidende toestand, sper en doorlaat;
- sperstroom en doorlaatstroom, inversiegebied;
- gelijkrichten, drempelspanning, lawineeffect, Zenerspanning;
- warmtedissipatie en koelen, lichtemissie en LED;
- unipolaire-transistor, JFET, kanaal, source, drain, gate;
- stuurspanning, afknijpspanning, verzadigings-stroom, -spanning;
- MOSFET, verarmings- en verrijkingsgebied, gatecapaciteit, schakelaar;
- bipolaire-transistor, npn-transistor, emitter, basis, collector;
- geleidende en niet-geleidende toestand, schakelaar, stuurspanning;
- stroomversterking en recombinatiefactor;

### 3.1 Inleiding

Tot nu toe hebben we onder twee verschillende omstandigheden gekeken naar het elektron, en wel:

**in het atoom;**

**in het kristal;**

In beide gevallen zit het elektron ergens in opgesloten. Dat betekent niet, dat een elektron helemaal niet uit een atoom of een kristal kan komen. In hoofdstuk ‘Atoom en elektron’ behandelden we het begrip ionisatie: een elektron wordt uit het atoom gestoten. Welnu, zo’n verschijnsel hebben we natuurlijk ook bij elektronen in een kristal. Het kristal vatten we daarbij op als een groot atoom. We interesseren ons in dit hoofdstuk voor de verschijnselen van elektronen aan het kristaloppervlak, aan de kristalrand.

**Oppervlakteverschijnselen** Welke verschijnselen zijn het nu, die samenhangen met elektronen bij het kristaloppervlak? Dat zijn er verscheidene, waaronder er zijn die voor de elektrotechniek belangrijke zijn:

- *contactspanning* (batterij);
- *thermospanning* (thermometer);
- *gelijkrichtwerking* (diode);
- *stroom gestuurd schakelen* (bipolaire transistor);
- *stroomloos schakelen* (unipolaire transistor);

Sommige hiervan zijn nog niet zo lang geleden technisch benut, andere daarentegen waren niet alleen reeds lang bekend, maar werden ook al lang benut. De contactspanning bij metaal-metaalcontacten werd al voor 1800 door Volta (italiaan) gemeten—en die kennis benutte hij voor het construeren van de eerste galvanische cellen. De *thermostroom* werd in 1821 door Seebeck (duitser) gemeten en de thermospanning door Thomson (lord Kelvin, engels) in 1856. De *verklaring* van al de genoemde verschijnselen—allemaal uit de 19<sup>e</sup> eeuw—kon pas komen toen het bestaan van *elektronen* (Thomson, 1897), *atomen* (Rutherford, 1911, engels), en *kristallen* (von Laue, 1912, Duits) bekend werd.

**Diode ontwikkelings-geschiedenis** De *gelijkrichtende* werking—de stroomgeleiding is maar in één richting mogelijk—van het kristal Cu/FeS (koper/ijzersulfide contact), werd in 1874 door de Duitser Braun ontdekt. Het is het oudste voorbeeld van een *metaal/halfgeleider contact*. Bijna 75 jaar later, in 1950, construeerde Shockley en de zijnen (Amerikanen) een contact met dezelfde werking: het *p-halfgeleider/n-halfgeleider* contact. Een contact van *twee* materialen met gelijkricht-werking wordt **diode** genoemd (‘di’ is Grieks voor ‘twee’, en ‘odos’ is Grieks voor ‘weg’).

De oudste soort diode is de *MOS-diode*: ‘Metal Oxide Semiconductor’ (metalen ‘roesten’ nu eenmaal snel). Een latere soort diode komen we tegen als *pn-diode*. De crux van vaste stof dioden is dat er tenminste één *halfgeleider* bij het contact is betrokken.

Minder oud—maar nu verouderd!—is de *diodebuis*, gebaseerd op de gelijkrichtende werking van een metaal/vacuüm contact, in 1904 ontdekt door de amerikaan Fleming, die voortborduurde op het werk van Elster en Geitel (noren?) en de amerikaan Edison aan metaal/gas contacten. Bij dit type diode is er altijd een ‘vacuüm’, zodat er met elektroden wordt gewerkt. Door de ontwikkeling van de vaste stof componenten zijn de ‘*radiobuizen*’ naar de achtergrond gedrongen.

**Transistor ontwikkelings-geschiedenis** Lieben (duitser?) en onafhankelijk de Forest (amerikaan), wisten al in 1906 een voorloper van een ‘gestuurde vacuümbuisdiode’, de *buistriode*, te maken. Het duurde tot 1939 voordat Schottky en de rus Davydov, onafhankelijk van elkaar, met het verarmingsgebiedmodel voor oppervlakverschijnselen bij halfgeleiders kwamen. Pas toen konden de verschillende eigenschappen van de vaste stof diode worden begrepen. De eerste *puntcontact-transistor* werd in 1947 door Bardeen en Brattain op ideeën van Shockley (Bell laboratorium) geconstrueerd, gevolgd door de *lagentransistor* van Shockley in 1950. De opmars van de elektronica kon beginnen. Door de eerste *chip*, een combinatie van schakeling (Kilby, 1959, Texas Instruments corp.) en planaire technologie (Noyce, 1960, Fairchild corp.) kwam de schaalvergroting pas goed op gang—en die is nog niet gestopt. De *microprocessor*, waarbij de gehele centrale verwerkingseenheid van de computer op één chip word gezet, werd ontwikkeld (Hyatt, 1972, Intel corp.) zodat het ‘Personal Computer’ tijdperk kon beginnen.

## 3.2 Uittree-energie en voltapotentiaal

### 3.2.1 Uittree-energie

**Emissie en uittree-energie** Bij de ionisatie van een elektron uit een atoom is voor de emissie (van het latijn ‘emittere’, uitzenden, verdrijven) van een elektron een bepaalde arbeid, de *ionisatie-energie*  $E_i$ , nodig (zie pag. 23). Net zo is voor de emissie (van het latijn ‘emittere’, uitzenden, verdrijven) van een elektron *uit een kristal* een *uittreearbeid*, de **uittree-energie**  $\Phi$ , nodig. De letter ‘ $\Phi$ ’ (fi), de griekse F, wordt gebruikt omdat het om een soort potentiaal gaat; in de engelse literatuur zie je vaak de ‘ $W$ ’ gebruikt, van het engelse ‘w’orkfunction, dat is: ‘arbeidsfunctie’. Het is gemakkelijker om elektronen uit kristallen te halen dan uit atomen, dus *de uittree-energie  $\Phi$  is kleiner dan de ionisatie-energie  $E_i$*  (bij dezelfde atoomsoort):

$$\Phi < E_i$$

In een kristal zitten de atomen dicht opeen, zodat ze op elkaar—en niet te vergeten op de beweeglijke elektronen—krachten uitoefenen. Zo zal de uittree-energie beïnvloed worden door de vorm van het oppervlak, en door de soort verontreinigingen op het oppervlak. Dientengevolge zijn er voor de elektronen dicht bij het oppervlak **oppervlaktetoestanden** met bijbehorende energieën, die verschillend zijn van de toestanden binnen in het kristal.

**Uittree-energie en Fermi-energie** Vanwege de definitie van uittree-energie geldt natuurlijk dat bij de hoogste totale energie  $E$  die elektronen in het kristal werkelijk hebben, ze juist  $\Phi$  tekort komen om naar vacuüm te kunnen gaan. In vacuüm is de totale energie nul, zodat elektronen in het kristal gemiddeld ten hoogste een totale energie  $E$  hebben waarvoor geldt:

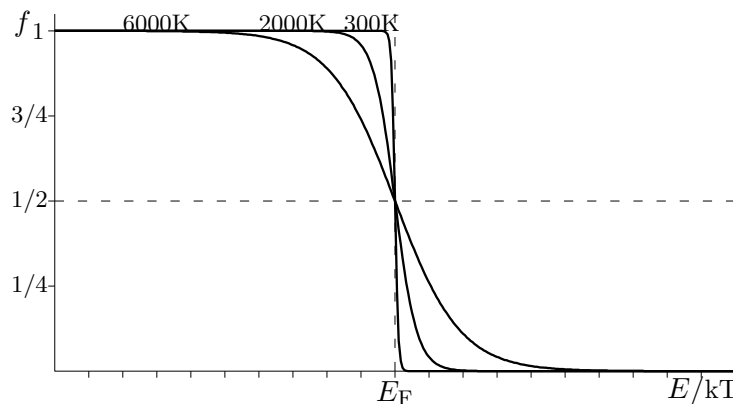
$$E \leq -\Phi$$

Bij *het absolute nulpunt van temperatuur* zijn alle elektronen in zo laag mogelijke energie toestand. Precies als in een atoom, worden de elektronen toestanden vanaf de laagste energie bezet door elektronen zodat alle elektronen zo laag mogelijke energie hebben. De dan hoogste energie voor een elektron is de **Fermi-energie**  $E_F$  (zie ook paragraaf 2.7.2 op pag. 118). In een metaal is deze energietoestand bezet met een geleidingselektron. Bij temperatuur  $T = 0$  is de *uittree-energie* het *tegengestelde* van de Fermi-energie:

$$\boxed{\Phi = -E_F \quad T = 0 \text{ K}}$$



**Temperatuurinvloed op uittree-energie** Verhoog de temperatuur van 0 naar  $T$ . Volgens de Fermi-Dirac verdeling gaan dan elektronen met energie  $\Delta E$  onder de Fermi-energie naar een toestand met energie  $\Delta E$  boven  $E_F$ , waarbij de energie stijgt met  $2\Delta E$ . Gemiddeld is  $\Delta E$  ongeveer  $0,75kT$ , zodat de gemiddelde hoogste energie ruwweg zal stijgen met de thermische energie  $1,5kT$  (zie fig. 3.1); bij de *werkt temperatuur*  $27^\circ$  is  $kT = 26$  meV, dus de energiestijging 38 meV. We kunnen aannemen dat



Figuur 3.1 Invloed van de temperatuur  $T$  op de fractie bezet  $f$  van energietoestanden voor elektronen in een kristal; de gemiddelde energiebreedte van de overgang van wel bezet naar niet bezet is bijna  $1,5kT$ .

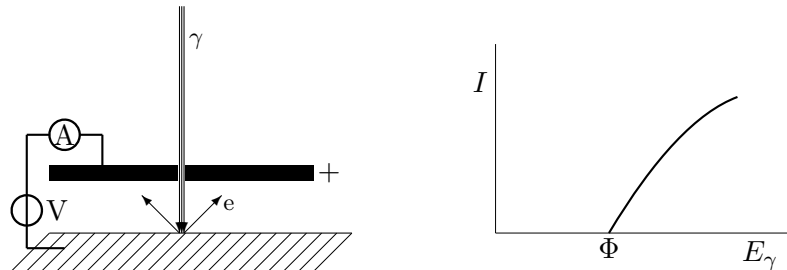
de hoogste elektron-energie bij de meeste stoffen óók met die energie zal stijgen, alhoewel dat van de precieze bandenstructuur afhangt. In eerste benadering zal dan de uittree-energie ongeveer met die waarde dalen:

$$\Phi \approx (-E_F) - 1,5kT$$

Denk eraan dat  $-E_F$  positief is.

### 3.2.2 Foto-elektrisch effect

**Meetmethode uittree-energie** Hoe moet de energie die nodig is om een elektron uit het kristal vrij te maken, de *uittree-energie*  $\Phi$ , worden gemeten? Een vanouds bekende methode gebruikt het *uitwendig foto-elektrisch effect* (Hertz, 1887) waarbij de elektronen aan het oppervlak van een plaat door fotonen uit het kristal worden vrijgemaakt (zie fig. 3.2a). De fotonen zitten in een lichtstraal die we (scheef) op het oppervlak laten vallen. De geëmitteerde elektronen worden opgevangen op een geleidende plaat even boven het oppervlak. De plaatspanning kan zo worden gevarieerd dat de stroomsterkte van de *emissiestroom* nul wordt. Dan is de fotonenergie verminderd met de uittree-energie gelijk aan de elektrische energie van het elektron.

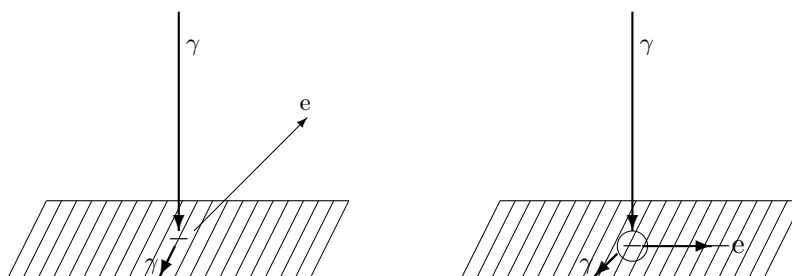


a Elektronen aan het oppervlak worden daaruit geëmitteerd door erop vallend licht; een plaat op positieve potentiaal vangt ze op.

b Emissiestroom als functie van de fotonenergie; merk op, dat de fotonenergie minimaal de uittree-potentiaal is, en lineair toeneemt.

Figuur 3.2 Uitwendig foto elektrisch effect.

**Uitwendig foto-elektrisch effect** De bepaling van de *uittree-energie*  $\Phi$  gaat dan als volgt. Kies licht van een geschikte golflengte (dus met voldoende fotonenergie); is de energie  $E_\gamma$  van het foton te klein ( $E_\gamma < \Phi$ ), dan is het niet mogelijk een elektron te emitteren uit het kristal. Voer in dat geval de foton-energie op, dan komt er een moment dat de energie  $E_\gamma$  van het foton boven de uittree-energie  $\Phi$  uitkomt en er elektron-emissie optreedt ( $E_\gamma > \Phi$ ). Er ontstaat dan een elektronenstroom van het kristaloppervlak naar buiten (dat is een elektrische stroom van buiten náár het kristal toe). De emissie wordt 'zichtbaar' gemaakt door de stroommeting bij de opvangplaat (zie fig. 3.2b). Omdat in dit geval het elektron is geëmitteerd vanuit de geleidingsband naar buiten, noemt men dit het **uitwendig foto-elektrische effect**.



a Uitwendig foto-elektrisch effect: een geleidingselectron wordt door een foton volledig uit het kristal gestoten (elektron emissie).

b Inwendig foto-elektrisch effect: een bindingselectron wordt naar de geleidingsband gestoten.

Figuur 3.3 Twee soorten fotoelektrisch effect.

**Inwendig foto-elektrisch effect** Fotonen die het kristal inkomen zullen niet alleen de ‘lossere’ geleidings-elektronen, die ‘vrij’ in het kristal bewegen, treffen, maar ook bindings-elektronen die zich wat dichterbij de atomen bevinden en dus wat ‘vaster’ zitten. Omdat de bindings-elektronen sterker gebonden zijn, is hun energie lager; dus zal de fotonenergie in het algemeen onvoldoende zijn om ze te emitteren. Wel zal de fotonenergie groot genoeg kunnen zijn om de binding met het atoom te verbreken (zie fig. 3.3b).

Als een foton een energie heeft die groter is dan de *bandafstand*, het energieverschil tussen de *bindingsband* en de *geleidingsband*, dan zal een bindings-elektron aanslaan naar een toestand in de geleidingsband en spreekt men van het **inwendig foto-elektrisch effect**. Door het inwendig foto-effect ontstaan er geleidings-elektronen en gaten, dus de mogelijkheid van elektrische geleiding: **foto-geleiding**. Foto-geleiding komt bij verschillende halfgeleiders voor; bijzonder gevoelig voor *zichtbaar* licht zijn de stoffen CadmiumSulfide (CdS) en Selenium (Se). Die worden daarom gebruikt in fotocellen en (foto)kopiëerapparaten.

**Opg 3.2.1** \*\* Een foto-elektrische cel is gemaakt van CdS.

a wat is de maximale golflengte die is waar te nemen?

[Antw.  $\lambda = 0,52 \mu\text{m}$ ]

b in welk gebied ligt dat licht?

[Antw. zichtbaar groen]

c idem voor een Si fotocel.

[Antw.  $\lambda = 1,13 \mu\text{m}$ ; infrarood]

### 3.2.3 Voltapotentiaal

In het vorige hoofdstuk, paragraaf 2.7.2 op pag. 120, hebben we de voltapotentiaal ‘zomaar’ naar voren gebracht als een denkbeeldige spanning die, bepaald door de Fermi-energie, de stroom bepaalde. We zullen hier wat dieper ingaan op de vraag wat er elektrisch gebeurt aan het oppervlak. Daarbij zal blijken, dat er aan het oppervlak van een stof een elektrische lading aanwezig is, die aanleiding geeft tot een elektrische potentiaal: de voltapotentiaal.

**Oppervlaktetoestand n-geleiders** Hoe kunnen we ons een *oppervlaktetoestand* indenken? Beschouw een *geleidingselektron* of *bindings-elektron* in een geleider. Is het elektron midden in het kristal, dan is de precieze positie *elektrisch gezien* van weinig invloed, omdat er aan alle kanten ionen zijn die eraan trekken. Is het elektron daarentegen aan het oppervlak, dan zitten de meeste ionen aan één kant, de binnenkant. Bijgevolg wordt een elektron aan het oppervlak naar binnen weggetrokken, waardoor het voor een elektron dat naar buiten wil ontsnappen moeilijk wordt om door de oppervlaktelaag te komen. Bij metalen moet het

<i>element</i>	K	Na	Ca	Mg	Pb	Al	Ag	Fe	Cu
$\Phi/eV = \phi/V$	2,2	2,3	2,9	3,6	4,0	4,2	4,4	4,5	4,6
<i>Ionisatie-energie/eV</i>	4,3	5,1	6,1	7,7	7,4	6,0	7,6	7,8	7,7
<i>element</i>	Se	Pt	Au	Ge	Si	Zn	Sb	W	Cu
$\Phi/eV = \phi/V$	5,9	5,4	5,2	4,9	4,9	4,9	4,6	4,6	4,6
<i>Ionisatie-energie/eV</i>	9,8	9,0	9,2	7,9	8,2	9,4	8,6	8,0	7,7

Tabel 3.1 Uittree-energie  $\Phi$ , voltapotentiaal  $\phi$  en ionisatie-energie van enkele elementen. Merk op, dat  $\Phi$  in eV uitgedrukt gelijk is aan  $\phi$  uitgedrukt in V. De uittree-energie is erg gevoelig voor vuiligheid, oxydatie, oppervlaktebewerking en dergelijke. Opgegeven waarden zijn dan ook hooguit tot op tienden van Volts.

tegen het veld (negatief ten opzichte van de vaste stof) van de ‘ruimte’-lading in; bij halfgeleiders moet het door een laag zonder beweeglijke ladingdragers. In beide gevallen wordt het teruggehaald door de ionen.

**Voltapotentiaal en uittree-energie** De oppervlaktetoestand heeft tot gevolg, dat het inwendige van het kristal op een hogere elektrische potentiaal staat dan de buitenkant: *tussen kristal en vacuum is de voltapotentiaal  $\phi$* . Omdat de uittree-energie  $\Phi$  gelijk moet zijn aan de arbeid die het minimaal kost om een elektron de voltapotentiaal  $\phi$  te doen overwinnen, geldt tussen uittree-energie en voltapotentiaal het verband:

$$\Phi = e\phi$$

In woorden betekent dat: de *uittree-energie* uitgedrukt in *elektronVolts* is gelijk aan de *voltapotentiaal* uitgedrukt in *Volts*. Zie de tabel 3.1, of BINAS tabel 24, voor de uittree-energie van enkele elementen. De Fermi-energie  $E_F$  van elektronen, tegengesteld aan de uittree-energie bij  $T = 0$ , kan ook worden uitgedrukt in de voltapotentiaal  $\phi_F$  bij  $T = 0$  (zie paragraaf 2.7.2 op pag. 120):

$$E_F = -e\phi_F$$

**Opg 3.2.2 \*\*\*\*** Een fotokathode wordt bestraald met licht (UV) uit een kwiklamp. De spanning op een plaat, parallel aan het kathodeoppervlak, wordt zo gekozen, dat juist geen elektronen de plaat bereiken. Deze remspanning  $U$  wordt gemeten bij verschillende golflengten uit het licht.

$\lambda/\text{nm}$	578	546	492	436	405
$U/\text{V}$	0,40	0,55	0,80	1,04	1,30

a bepaal de voltaspanning  $\phi$  van het kathodemateriaal door bovenstaande gegevens uit te zetten in een grafiek ( $f, \phi$ ) ( $f$  is de fotonfrequentie) en het snijpunt van de rechte door de meetpunten met de  $f$ -as te bepalen.

[Antw.  $\phi = 1,61 \text{ V}$ ]

b bepaal uit de rc van de rechte de waarde van  $h/e$ .

[Antw.  $h/e = 3,91 \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$ ; vergelijk 'echt'  $4,14 \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$ ]

**Temperatuurinvloed op voltapotentiaal** Door rekening te houden met de temperatuurafhankelijkheid van de uittree-energie vinden we de invloed van  $T$  op de voltapotentiaal. Gebruik makend van de nultemperatuur voltapotentiaal  $E_F = -e\phi_F$ , volgt in eerste benadering de temperatuur afhankelijkheid van de voltapotentiaal:

$$\phi \approx \phi_F - 1,5 \frac{k}{e} T$$

Per graad temperatuurverhoging neemt de voltapotentiaal dus ongeveer af met:  $d\phi/dT \approx 1,5k/e = -1,4 \cdot 10^{-4} \text{ V/K}$ , d.w.z. *per graad temperatuurstijging gaat de voltapotentiaal ongeveer 0,1 mV omlaag*. Slechts een forse temperatuurverhoging met b.v. 1000 K geeft een merkbare voltapotentiaalsverandering. In werkelijkheid blijkt de spanningsverandering veel eerder meetbaar te zijn. Merk op dat in deze eerste benadering *ieder* materiaal een gelijke verandering geeft. *Verschillen* in  $d\phi/dT$  tussen twee materialen noemen we **thermospanning**. De thermospanning wordt veroorzaakt door de *verschillen* tussen de bandenstructuren rond de hoogste energietoestanden van de verschillende materialen. De thermospanning is dus veel kleiner dan 0,1 mV, ten hoogste van de orde van  $50 \mu\text{V/K}$ ; we gaan daar verder niet op in. Zie ook BINAS tabel 27.

**Opg 3.2.3** \* De Fermi-energie is de energie:

- A die minimaal nodig is om een elektron uit het kristal te halen
- B die maximaal nodig is om een elektron uit het kristal te halen
- C de minimale energie die een elektron uit het kristal heeft
- D de maximale energie die een elektron uit het kristal heeft

**Opg 3.2.4** \*\*\* De uittree-energie neemt af met de temperatuur. Bereken voor welke temperatuur de uittree-energie ongeveer nul wordt ('plasma' temperatuur) voor de elementen Cu, Zn, Pb, Si, Ge. Vergelijk deze temperaturen met de smelttemperaturen, en geef commentaar daarop.

[Antw.  $T = \frac{2}{3} \Phi/k = 41 \cdot 10^3 \text{ K}$ , resp. 44; 35; 44; 44 kK]

### 3.2.4 Thermische emissie

**Soorten thermische emissie** Edison ontdekte in 1897 dat het verhogen van de stroom door een draad, via *temperatuurverhoging*, leidt tot het uitstoten ('emitteren', of, in het engels 'emission') van elektronen. Technische toepassingen van die **uitwendige thermische emissie** volgden elkaar snel op: het buizentijdperk—met de 'warm gestookte'-kathoden—was aangebroken. We noemen in het bijzonder de diodeglijkrichter (Fleming, 1904). 'Emissie' is 'uittreden' van aan het kristal gebonden elektronen: elektronen die eerst gebonden zijn—*negatieve* energie hebben—maar zóveel thermische energie erbij krijgen dat ze vrij

worden—*positieve* energie krijgen. Een oppervlakte elektron heeft daarvoor een extra hoeveelheid energie nodig gelijk aan de uittree-energie  $\Phi$ . De **inwendige thermische elektronemissie** is verantwoordelijk voor de *diodesroom* van de ene naar de andere kant van de pn-diode. Hierbij moeten de elektronen de contactspanning overwinnen: met behulp van de thermische energie. Vandaar de *temperatuurgevoeligheid* van halfgeleider-dioden en -transistoren. In het volgende zullen we de uitwendige emissie behandelen; de inwendige is analoog.

**Vrijgemaakte elektronen** De ladingsdichtheid van alle *beweglijke* elektronen (bindingselectronen of geleidingsselectronen) noteren we als  $\rho_b$ ; die lading is niet aan de ionen maar wel aan het kristal gebonden. De ladingsdichtheid van de beweglijke elektronen die (theoretisch) *positieve energie* hebben noteren we als  $\rho_{b\text{pos}}$ ; met positieve energie is een elektron vrij geworden—het is niet meer gebonden aan het kristal. Van alle beweglijke elektronen krijgt natuurlijk slechts een miniem deel de kans om een toestand met positieve energie te bezetten. Dat wordt bepaald door de *verdelingswet van Fermi-Dirac*, die bij benadering een Boltzmann-factor geeft waarin  $\mu \approx E_F \approx \Phi$ :

$$f \approx e^{-(E-\Phi)/kT}$$

**Verzadigings-emissie** Om vrij te komen moet een beweeglijk elektron aan drie eisen voldoen, *voldoende, positieve, energie*—waar we tot nu naar keken—is niet genoeg. In de buurt van het oppervlak moet de:

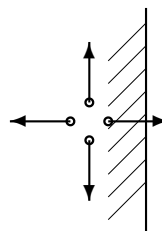
**energie** positief zijn;

**snelheid** naar het oppervlak gericht zijn;

**positie** voldoende dicht bij het oppervlak zijn;

Het elektron moet *niet te ver* van het oppervlak zijn en *naar het oppervlak toe* bewegen; alléén de snelheid loodrecht op het oppervlak telt. In de simpelste benadering beweegt de helft van de elektronen loodrecht op het oppervlak, en daarvan gaat weer de helft naar het oppervlak toe; totaal is dat een kwart. De lading die in aanmerking komt voor emissie heeft dus ladingsdichtheid  $\frac{1}{4}\rho_{b\text{pos}}$ , met de verzadigingswaarde  $\frac{1}{4}\rho_b$ .

De gemiddelde elektron snelheid is ongeveer de snelheid  $v_F$  van de elektronen met Fermi-energie, zodat  $\frac{1}{2}mv_F^2 = E_{kF}$ . Alleen elektronen bin-



Figuur 3.4 Elektronsnelheid en emissie: alleen snelheid naar het oppervlak toe kan tot emissie leiden, mits het oppervlak bereikt kan worden

nen  $v_F$  meter van het oppervlak zullen het oppervlak in een seconde bereiken. De **verzadigingsstroom**-dichtheid  $J_s$ , het maximale aantal ladingen dat per seconde door een  $m^2$  oppervlak kan gaan, is:

$$J_s = \frac{1}{4} \rho_b v_F$$

**Uitwendige emissie-stroom** De emissiestroom-dichtheid  $J$  uit het oppervlak is evenredig met de ladingsdichtheid van de beweeglijke ladingen met positieve energie  $\rho_{b\text{pos}}$ . Evenzo is de verzadigings-emissiestroom-dichtheid  $J_s$  evenredig met de totale ladingsdichtheid  $\rho_b$ . Voor de verhouding geldt:

$$J/J_s = \rho_{b\text{pos}}/\rho_b$$

De onderlinge verhouding tussen de ‘vrije’ en ‘gebonden’ elektronen  $\rho_{b\text{pos}}/\rho_b$  kan via Fermi-Dirac—na veel moeite—worden benaderd:

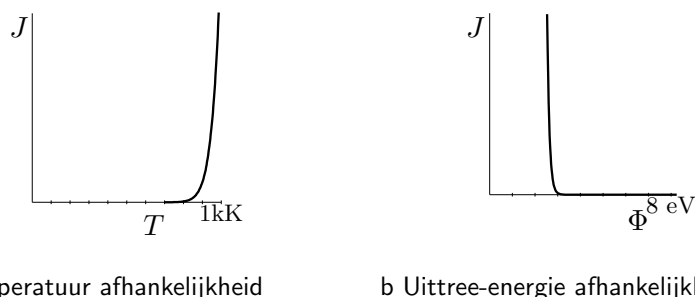
$$\rho_{b\text{pos}}/\rho_b \approx \frac{3}{2} \frac{e^{-\Phi/kT}}{(E_{kF}/kT)^2}$$

Ze wordt bepaald door twee soorten factoren. De noemer, met het kwadraat, hangt samen met het aantal toestanden met positieve energie;  $E_{kF}$  is de *bewegingsenergie* van de elektronen met Fermi-energie. De teller is de Boltzmann-factor voor het uittreden van een elektron met Fermi-energie. Daardoor worden beide factoren bepaald door de verhouding tussen de uittree-energie  $\Phi$ —die verricht moet worden om het elektron vrij te maken—en de thermische energie  $kT$ —die arbeid moet opbrengen. Voor een hóge emissie is nodig een lage waarde van de verhouding  $\Phi/kT$ , dus hoge temperatuur en lage uittree-energie; zie figuur 3.5 op pag. 144. Voor kathode materiaal kiezen we bij voorkeur metalen met kleine uittree-energie (Barium 2,5 eV; Magnesium 3,6 eV). Omgekeerd is voor een goede gloeilamp een láge emissie nodig bij een hoge temperatuur, dus daar is een gróte uittree-energie nodig (Wolfram 4,6 eV; Platina 5,4 eV).

**Richardson constante** Meestal wordt de emissie-stroomdichtheid  $J$  uitgedrukt in een constante en een temperatuurafhankelijkheid. Die constante  $A$  wordt de **Richardson-constante** genoemd, naar degene die als eerste die afhankelijkheid heeft gemeten:

$$J = AT^2 e^{-\Phi/kT}$$

Daar de Fermi-energie  $E_F$  zelf temperatuur-afhankelijk is, is ook de Richardson-constante dat. Soms wordt dat tot uitdrukking gebracht



Figuur 3.5 Afhankelijkheid van de emissie-stroomdichtheid  $J$  van temperatuur  $T$  en uittree-energie  $\Phi$ .

door ' $T^2$ ' te vervangen door een macht tussen 1 en 2, bijvoorbeeld ' $T^{1,4}$ '. Door vergelijken vinden we de getalwaarde van de Richardson constante:

$$A = \frac{3}{2} (E_{\text{kF}}/k)^{-2} J_s$$

In verband met de toepassing bij halfgeleiders, merken we op dat  $A$ , dus  $J$ , evenredig is met de dotatie.

**Voorbeeld Bariumkathode** Bepaal de *elektron-emissie* voor een bariumkathode bij 1000 K.

Bepaal eerst  $\rho_b$ . De massadichtheid van barium is  $3,51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ; neem aan dat er 2 geleidingselektron/atoom is. Dan is de geleidingselektron-ladingsdichtheid:

$$\rho_b = 3,51 \cdot 10^3 / (137,3 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}) \cdot 2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} = 4,94 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$$

Bepaal nu  $v_F$ . Barium staat niet in BINAS tabel 30a, zodat de fermi-snelheid niet kan worden opgezocht. Analoog aan wat geldt voor elektronen in het atoommodel van Bohr nemen we aan dat de *bewegingsenergie* van de Fermi-elektronen tegengesteld is aan de totale energie:  $E_{\text{kF}} = -E_F = \Phi = 2,52 \text{ eV}$  (BINAS tabel 24). We rekenen terug,  $\frac{1}{2} m_e v_F^2 = 2,52 e$ , waaruit  $v_F = 0,938 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ . De verzadigingsstroom-dichtheid  $J_s$  wordt dan:

$$J_s = \frac{1}{4} \cdot 4,94 \cdot 10^9 \cdot 0,938 \cdot 10^6 = 1,16 \cdot 10^{15} \text{ A/m}^2$$

Voor de werkelijke stroomdichtheid is nodig de Boltzmannfactor, dus  $\Phi/kT$ . Bij 300 K is  $kT = 25,8 \text{ meV}$ , zodat bij 1000 K de warmte-energie  $kT = 86,0 \text{ meV}$ . Dus  $\Phi/kT = 2,52/0,086 = 29,3$ . Bereken de emissiestroom-dichtheid  $J$ :

$$J = 1,5 \cdot (29,3)^{-2} e^{-29,3} \cdot 1,16 \cdot 10^{15} = 0,4 \text{ A/m}^2$$

Tenslotte volgt de emissiestroom voor een tot 1000 K gestookte bariumkathode van  $1 \text{ cm}^2$  oppervlak:  $I = 40 \mu\text{A}$ . Met behulp van een uitwendige spanning kan die stroom enorm worden verhoogd.



**Opg 3.2.5 \*\*** Bepaal de emissiestroom voor een Cu-kathode bij 1200 K met  $1 \text{ cm}^2$  oppervlak.

a Bereken de geleidingselektron-ladingsdichtheid  $\rho_b$ .

[Antw.  $\rho_b = -1,4 \cdot 10^{10} \text{ C/m}^3$ ]

b Bereken de verzadigings-stroomdichtheid  $J_s$ .

[Antw.  $J_s = -5,5 \cdot 10^{15} \text{ A/m}^2$ ]

c Bereken de emissiestroomdichtheid  $J$ .

[Antw.  $J = -4 \cdot 10^{-7} \text{ A/m}^2$ ]

d Bereken de emissiestroom  $I$

[Antw.  $I = -0,4 \text{ pA}$ ]

**Opg 3.2.6 \*** Goed kathodemateriaal heeft;

**I** een hoge uittree-arbeid;

**II** een hoge smelttemperatuur;

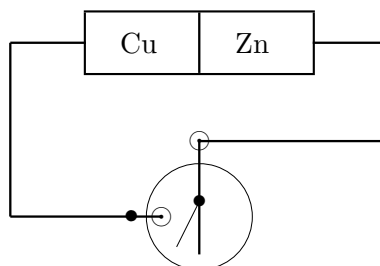
A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar

### 3.3 Contactspanning

#### 3.3.1 Contactspanning geleiders

**Spanningsreeks** Dat de voltpotentiaal ook een werkelijk meetbare elektrische potentiaal is, blijkt op verschillende manieren. De oudste daarvan werd gevonden door Volta voor 1800(!).

Volta ontdekte dat, als twee metalen contact met elkaar maken, er over de vrije uiteinden een contactspanning staat. Gelukkig had hij voor spanningsmetingen de elektroscop uitgevonden, die **stroomloos** (de kring wordt niet gesloten) meet: de ladingen op de verticale vaste staaf en het draaibare metaalblaadje stoten elkaar af. Door de contactspanning te meten tussen verschillende metalen in contact met koper bepaalde hij de **spanningsreeks**:



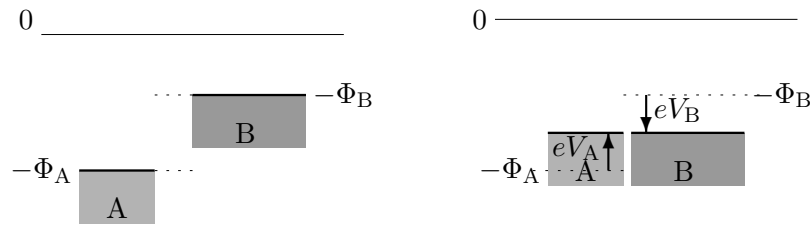
Figuur 3.6 Meting voltpotentiaal: alleen met een elektroscop kan stroomloos worden gemeten, zodat de voltpotentialen niet verstoord worden

<i>element</i>	Pt	Au	Cu	Fe	Sn	Ag	Al	Pb	Mg
<i>Contactspanning/eV</i>	-0,8	-0,6	0	0,1	0,2	0,2	0,4	0,6	1,0

Tabel 3.2 Spanningsreeks van enkele elementen.

Vergelijk de spanningsreeks met de tabel van voltpotentialen 3.1. Dan blijkt dat de contactspanning precies het verschil is tussen de twee voltpotentialen! Doordat het zo moeilijk is te meten, wijkt de door Volta gevonden spanningsreeks zo hier en daar af van de hedendaagse. Waarom zou Volta hebben gemeten tegen het metaal koper (koper was gezegd zijn referentie)?

**Kringen** We kijken nog eens wat preciezer naar de contactspanning. Neem twee metalen, met uittree-energie  $\Phi_A$  respectievelijk  $\Phi_B$ , terwijl  $\Phi_A > \Phi_B$  is verondersteld; dus in de hoogste bezette energietoestand hebben de elektronen in B meer energie dan in A. Zolang A en B geen contact maken, zal in metaal A het elektron met de hoogste energie (het geleidingselectron) een energie  $-\Phi_A$  hebben, respectievelijk  $-\Phi_B$  in metaal B. Plaats nu de twee metalen tegen elkaar aan, zodat er een stevig contact is (fig. 3.7a en b). Dan zullen er in de grenslaag elektronen van B naar A ‘overlopen’, omdat de aantrekkingskracht in A groter



a kristallen op enige afstand: twee onafhankelijke energieën.      b bij innig contact kristallen: alleen bij het contact is beïnvloeding.

Figuur 3.7 Elektronenergie in twee kristallen.

is (lagere energie toestand). Het lijkt dus of er lading op de contactoppervlakken komt: negatieve *oppervlaktelading* bij A, positieve oppervlaktelading bij B. De *elektronen* steken het contactvlak over totdat er evenwicht heerst. Het lijkt wel of het contact een *condensator* is met een *capaciteit*, die afhangt van de beide materialen, met een *lading*, die wordt bepaald door de oppervlaktelading en een *spanning*, waarop beide materialen invloed hebben. De oorspronkelijke elektrische potentiaal  $V'$ , die er was vóór A en B contact maakten, verandert onder invloed van het contact in een potentiaal  $V$  (zie ook fig. 3.7). Van A naar B gaande neemt de *potentiaal*  $V$  toe met  $U_{BA} = V_B - V_A$  tengevolge van de oppervlaktelading.

**Contactspanning en voltapotentiaal** De totale energie voor de geleidingselektronen zal nu in beide metalen dezelfde worden:

$$E_{\text{tot}} = -\Phi_A - eV_A = -\Phi_B - eV_B$$

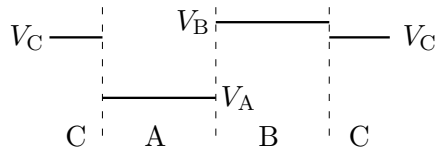
Omdat de uittree-energie samenhangt met de oorspronkelijke potentiaal  $V$  volgens  $\Phi_A = e\phi_A$  en  $\Phi_B = e\phi_B$ , volgt na invullen van de potentialen en uitdelen van de elektronlading:

$$\phi_A + V_A = \phi_B + V_B$$

Daaruit volgt voor de **contactspanning**  $U_{BA}$ , het potentiaalverschil gemeten van A naar B,

$$U_{BA} = V_B - V_A = \phi_A - \phi_B$$

**Conclusie** De *contactspanning* die ontstaat bij het contact van twee elementen A en B, gemeten van A naar B, is gelijk aan het verschil van de voltapotentiaal van A en die van B (Let op volgorde!)



Figuur 3.8 Potentiaalverloop bij galvanisch contact van geleiders in een kring: de som van de contactspanningen is nul

Waarom moet de contactspanning *stroomloos* worden gemeten? Omdat bij een kring, zoals hiernaast, de netto kringspanning nul is! Noem de spanning, zoals gebruikelijk,  $U$  (zonder accent). Startend vanuit A en naar B gaande krijgen we in het voorbeeld een kringspanning:

$$U_{BA} + U_{CB} + U_{AC} = (\phi_A - \phi_B) + (\phi_B - \phi_C) + (\phi_C - \phi_A) = 0$$

die totaal nul is.

- Opg 3.3.1** \* Verklaar waarom de spanningsreeks ruwweg loopt van lichtere naar zwaardere elementen.
- Opg 3.3.2** \*\* Maak een schatting van de normaalspanning van een nikkel-cadmium cel op grond van de voltapotentiaalen van de afzonderlijke elementen.  
[Antw.  $U = 0,87\text{ V}$ ]
- Opg 3.3.3** \*\*\* De voltapotentiaal van koper is  $4,6\text{ V}$ , van lood  $4,0\text{ V}$ . De contactspanning van koper naar lood is.
- A  $-8,6\text{ V}$
  - B  $-0,6\text{ V}$
  - C  $0,6\text{ V}$
  - D  $8,6\text{ V}$
- Opg 3.3.4** \*\*\* We hebben een contact Al (links) tegen Cu (rechts). De uittree-energie van Al is kleiner dan van Cu. Gaan we van links naar rechts door het contact, dan zal de potentiaal
- A omlaag gaan
  - B gelijk blijven
  - C omhoog gaan

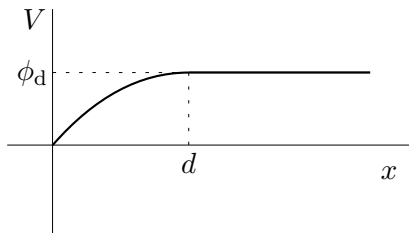
### 3.3.2 Contactspanning halfgeleiders

**Het pn-contact** Hoe komt de contactspanning tot stand bij het contact van een p-halfgeleider en een n-halfgeleider van hetzelfde element? We onderzoeken daartoe hoe aan de rand van een gedoteerd gebied de voltapotentiaal tengevolge van die dotering tot stand komt. De spanning over de contactlaag bij het contactvlak wordt aan beide zijden van het contactvlak opgebouwd. We brengen in herinnering (pag.126) dat in de zuivere halfgeleider de *geleidingselektronen-dichtheid*  $n$ , respectievelijk de *gaten-dichtheid*  $p$ , een temperatuurafhankelijke waarde *eigen ladingsdrager-dichtheid*  $n_i$  heeft:

$$n = p = n_i \quad \text{zuiver}$$

We bezien eerst de spanningsopbouw aan de zijde van de n-halfgeleider. Het zal blijken, dat de extra voltapotentiaal wordt bepaald door de verhouding tussen de onzuivere doteringsdichtheid en de eigen ladingsdragerdichtheid.

### Potentiaal aan buitenrand



Figuur 3.9 Potentiaal in n-gebied nabij het contactvlak: van buiten (links) naar binnen (rechts) loopt de potentiaal op van 0 tot de voltapotentiaal.

We mogen aannemen, dat eventueel aanwezige geleidingslektronen in de buurt van het contactvlak naar de p-zijde zijn gediffundeerd. Op de rand  $x = 0$ , het contactvlak, is de potentiaal dus (bijna) gelijk aan die van de zuivere situatie, onveranderd (bij afspraak) nul:  $V(0) = 0$ . De energie van de geleidingslektronen is dus onveranderd, evenals de dichtheid van de geleidingslektronen  $n$  respectievelijk de dichtheid van de gaten  $p$ . Op de buitenrand van de contactlaag geldt voor de dichtheid:

$$n(0) \approx p(0) \approx n_i$$

Deze randvoorwaarde voor de dichtheid van de ladingsdragers maakt het mogelijk op eenvoudige wijze andere elektron toestanden uit te drukken in de zuivere toestand. Het is wel een benadering.

**Dichtheid geleidingslektronen inwendig** Door de n-dotering is het aantal beschikbare geleidingslektronen praktisch gesproken vermeerderd met één geleidingslektron per donorion. Daardoor is in het n-gebied, waar de invloed van de p-halfgeleider verdwenen is, de dichtheid van geleidingslektronen  $n$  nagenoeg gelijk geworden aan de donordichtheid  $n_d$ —*geleidingslektronen zijn meerderheids-ladingsdragers in het n-gebied*. De dichtheid van de geleidingslektronen  $n$  voldoet aan de randvoorwaarde:

$$n(n) = n_d$$

**Energie geleidingslektronen** Bezie een geleidingslektron met negatieve lading  $-e$  op een positie  $x$ . Doordat de potentiaal  $V(x)$  is veranderd, ten opzichte van de zuivere toestand, is de energie van de elektronen veranderd. En door de energieverandering verandert het aantal

ladingen met die energie volgens de *verdelingswet van Boltzmann* (in benadering). Voor het elektron neemt de elektrische energie, *ten opzichte van de zuivere toestand*, af met

$$\Delta E = -eV(x)$$

De Boltzmannfactor is  $f = \exp(-\Delta E/kT) = \exp(eV(x)/kT)$ . De mate waarin de geleidingslektrondichtheid  $n$  is gestegen in verhouding tot de eigen waarde  $n_i$  is gelijk aan  $f$ :

$$\frac{n(x)}{n_i} = e^{eV(x)/kT}$$

**Donor-voltapotentiaal over n-contactlaag** Er is één positie waar we de potentiaal en de dichtheid van de geleidingslektronen kennen. In het gewone n-gebied, ver van de contactlaag, wordt de potentiaal gelijk aan de nader te bepalen **donor-voltapotentiaal**  $\phi_d$ ; de spanning  $\phi_d$  staat dus over de n-contactlaag. Aan de rand van het binnengebied is  $V(x) = V(n) = \phi_d$  en tegelijk  $n(x) = n(n) = n_d$ . Dus wordt de Boltzmann-factor op de rand:

$$\boxed{\frac{n_d}{n_i} = e^{e\phi_d/kT}}$$

Daarmee is de donor-voltapotentiaal over de n-contactlaag  $\phi_d$  in relatie gebracht tot de donordichtheid  $n_d$ . Expliciet:

$$\phi_d = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{n_d}{n_i}\right)$$

Merk op, dat de potentiaal niet verandert als we teller en noemer delen door de dichtheid  $n_0$  van de zuivere stof-ionen. Daarbij worden de dichtheden vervangen door de concentraties:  $c = n/n_0$ ; met *donor-dotatie*  $c_d$  en **eigen ladingsdrager-concentratie**  $c_i$ :

$$\frac{n_d}{n_i} = \frac{c_d}{c_i}$$

Bij de *werkt temperatuur*  $T = 300$  K geldt:

$$\text{Ge } c_i = 5,4 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{Si } c_i = 2,9 \cdot 10^{-13}$$

Iedere factor 10 in de dotatie bij 27° C werkt temperatuur geeft een verhoging van de voltapotentiaal met  $\frac{kT}{e} \ln 10 \approx 60$  mV. Vergelijk dat met de thermospanning, die van de orde is 50  $\mu$ V/K.

**Voltapotentiaal en Fermi-energie** We hebben bepaald welke invloed de donor dotering heeft op de vermindering van de energie van een geleidingselektron ten opzichte van de zuivere toestand. Daar het altijd om energieverschillen gaat, kunnen we evengoed of beter zeggen dat niet de elektron-energie is *verlaagd*, maar dat de Fermi-energie is *verhoogd*. Zie ook de figuren 2.34a en b op pag. 124. Zo beschouwd zegt men dan dat donor dotering leidt tot een **Fermi-energieverhoging**  $\Delta E_F$  gelijk aan:

$$\Delta E_F = e\phi_d$$

Een dotatiefactor 10 leidt tot een verhoging van  $\Delta E_F$  met 60 meV, zoals we zagen aan de voltapotentiaal.

**Dichtheid minderheids-ladingsdragers** We bepalen het aantal gaten op dezelfde manier als we het aantal geleidingselektronen hebben bepaald. Dan dienen we allereerst de energie van een gat zien vast te stellen. Aangezien een gat een ‘ontbrekend bindingselektron’ is, komt de elektrische energie van het *ontbrekende* elektron op  $+eV(x)$ . Bij een toenemende potentiaal zal het aantal gaten dus dalen. Net zo als bij  $n$  geldt voor de *gatendichtheid*  $p$ , vergeleken met de zuivere toestand:

$$\frac{p(x)}{n_i} = e^{-eV(x)/kT}$$

**Acceptor-voltapotentiaal over p-contactlaag** Hierboven zagen we, dat de donor-voltapotentiaal  $\phi_d$ , over de n-contactlaag, bepaald wordt door de donordichtheid  $n_d$  (in verhouding tot de eigen ladingsdragerdichtheid  $n_i$ ). Op dezelfde wijze wordt de **acceptor-voltapotentiaal**  $\phi_a$ , over de p-contactlaag, bepaald door de acceptordichtheid  $n_a$  (in verhouding tot de eigen waarde  $n_i$ ):

$$\frac{n_a}{n_i} = e^{-e\phi_a/kT}$$

Aangezien de eigen ladingsdragerdichtheid veel kleiner is dan de acceptordichtheid, is het linkerlid groter dan 1. Dus zal de potentiaal negatief zijn:

$$\phi_a = -\frac{kT}{e} \ln \frac{n_a}{n_i}$$

Merk op dat de *negatieve* waarde van de acceptor-voltapotentiaal over het p-gebied komt van de *negatieve* acceptorionen.

**Recombinatie van gat en geleidingslektron** We maken een klein maar leerzaam uitstapje. Let eens op het produkt van de aantallen gaten en geleidingslektronen *op dezelfde positie*. Doordat de elektrische energie van gat en geleidingslektron tegengesteld zijn, valt bij de vermenigvuldiging de potentiaalafhankelijkheid weg, oftewel, *overall* is:

$$np = n_i^2$$

Het produkt van de dichtheden van geleidingslektronen en gaten is, onafhankelijk van dotatie en positie, gelijk aan het kwadraat van de eigen ladingsdrager-dichtheid. Nu is dit produkt evenredig met de kans dat een gat en een geleidingslektron ‘elkaar vinden’ en *recombineren* (waarbij beide verdwijnen). De vergelijking  $np = n_i^2$  drukt dan uit, dat de *recombinatiekans* een ‘zuivere’ eigenschap is, niet bepaald door de onzuiverheden. Een gat kan, anders gezegd, geen verschil zien tussen een geleidingslektron afkomstig van een donorion en een aangeslagen bindingslektron. (Dit alles is helaas slechts in ideale halfgeleiders èn bij benadering juist.)

**Contactspanning pn-contact** We bezien een pn-contact met links een p-halfgeleider en rechts een n-halfgeleider. Er ontstaat kort na het in contact brengen een spanningsverschil tussen de beide zijden van het contact. Bij het pn-contact wordt de *contactspanning*  $U_c$  over het contact van p naar n gerekend. Zij is het verschil van de voltapotentialen:

$$-U_c = U_{np} = \phi_d - \phi_a$$

Doordat  $\phi_a$  zelf negatief is, tellen de potentialen absoluut op! Vullen we de vergelijkingen voor de  $\phi_d$  en  $\phi_a$  in, dan wordt de contactspanning over het pn-contact bepaald door:

$$\frac{n_d n_a}{n_i n_i} = e^{eU_{np}/kT}$$

De dotaties bepalen de contactspanning; merk op, dat een factor 10 in de dotatie (bij  $T = 300$  K) slechts een ‘constante’ 60 mV verhoging van de spanning geeft.

**Contactspanning rechtstreeks** Een vergelijking voor de contactspanning is ook ‘rechtstreeks’, zonder de *aparte* voltapotentialen, te bepalen, namelijk uit de *verhouding* tussen de dichtheden van de geleidingslektronen *aan beide zijden* van de contactlaag:

$$\frac{n(n)}{n(p)} = e^{-(E_n(n) - E_n(p))/kT}$$



In het rechterlid is het energieverval bepaald door het spanningsverschil, dat is de contactspanning:

$$-(E_n(n) - E_n(p)) = -(-eU_{np})$$

Het linkerlid kan worden uitgewerkt met de produktregel  $np = n_i^2$ , tezamen met de randvoorwaarden  $n(n) = n_d$  en  $p(p) = n_a$ . Zo vinden we bijvoorbeeld:

$$\frac{n_d n_a}{n_i^2} = e^{eU_{np}/kT}$$

Overigens zouden we natuurlijk dezelfde waarde vinden door naar de verhouding te kijken van de *gatendichtheden* in de *omgekeerde richting*:

$$\frac{n_a n_d}{n_i^2} = e^{-eU_{pn}/kT}$$

**Conclusie** *De contactspanning tussen twee gedoteerde halfgeleiders van dezelfde zuivere stof wordt bepaald door de dotaties. De acceptor-voltapotentiaal  $\phi_a$  over de p-laag, de donor-voltapotentiaal  $\phi_d$  over de n-laag, en de contactspanning  $U_c = U_{pn}$  van p naar n:*

$$\begin{aligned} \phi_a &= -\frac{kT}{e} \ln \frac{n_a}{n_i} & \phi_d &= \frac{kT}{e} \ln \frac{n_d}{n_i} \\ U_c = \phi_a - \phi_d &= -\frac{kT}{e} \ln \left( \frac{n_d}{n_i} \frac{n_a}{n_i} \right) \end{aligned}$$

#### Voorbeeld Si-Diode

- Bepaal de contactspanning van een Si-diode met dotatie  $2 \cdot 10^{-6}$  aan beide zijden van de contactlaag bij een temperatuur van 300 K.
- Bereken de concentratie van de minderheidsladingsdragers.

Volgens tabel 2.4 is  $n_{Si} = 5 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$ . Daaruit volgen de donordichtheid en acceptordichtheid  $n_a = n_d = 10^{23} / \text{m}^3$ . We gaan uit van de eigen ladingsdrager-dichtheid  $n_i = 10^{16} / \text{m}^3$ .

- Voor de spanning over het n-verarmingsgebied  $\phi_d$  volgt:

$$\phi_d = \frac{kT}{e} \ln(10^{23}/10^{16}) = \frac{kT}{e} \ln 10 \cdot 7 = 0,060 \cdot 7 = 0,42 \text{ V}$$

Evenzo is aan de p-kant  $\phi_a = -0,42 \text{ V}$ , en dus de contactspanning  $U_c = -U_{np} = -(\phi_d - \phi_a) = -0,83 \text{ V}$ .

- Het produkt van de dichtheden van meerder- en minderheidsladingsdragers is gelijk aan de intrinsieke waarde kwadraat:

$$n(x)p(x) = n_i^2 = 10^{32}$$

In de n-laag is de geleidingslektronendichtheid gelijk aan de donordichtheid:  $n(n) = n_d = 10^{23}$ . Ingevuld in de produktvergelijking met  $x = n$  vinden we voor de gaten in het n-gebied:

$$p(n) = n_i^2/n_d = 10^{32}/10^{23} = 10^9$$

De concentratie aan minderheidsladingsdragers, de gaten, in het n-gebied, is daarmee

$$p(n)/n_{Si} = 10^9/5 \cdot 10^{28} = 2 \cdot 10^{-20}$$

Op grond hiervan mogen de gaten met recht 'minderheid' worden genoemd! Analooft geldt dezelfde verhouding voor de minderheidsladingdragers in het p-gebied.

- Opg 3.3.5** \*\* Een Si diode bestaat uit een  $2 \cdot 10^{-5}$  gedoteerde p-laag en een  $2 \cdot 10^{-8}$  gedoteerde n-laag.  
 a bereken de contactspanning. [Antw.  $U_c = -0,69$  V]  
 b \*\*\*\* bereken de dichtheid van de geleidingselektronen in het p-gebied:  $n(p)/n_{Si}$ , en vergelijk de berekende waarde met de dichtheid aan gaten in het zelfde gebied  $p(p)/n_{Si}$ . [Antw.  $n(p)/n_{Si} = 2 \cdot 10^{-21}$ ]
- Opg 3.3.6** \*\*\* De contactspanning van een zwaar gedoteerd n-gebied naar een licht gedoteerd n-gebied is  
 A 0  
 B positief  
 C negatief
- Opg 3.3.7** \* De verhouding van de dichtheid van geleidingselektronen aan de p- en de n-zijde van een pn-diode is gelijk aan  
 A  $\exp(\frac{U_{pn}}{kT})$   
 B  $\exp(eU_{pn}/kT)$   
 C  $\exp(-U_{pn}/kT)$   
 D  $\exp(-eU_{pn}/kT)$
- Opg 3.3.8** \*\*\* De contactspanning van de licht(l) naar de zwaar(z) gedoteerde zijde van een  $nn^+$ -diode' in eenheden  $\frac{kT}{e}$  is gelijk aan  
 A  $\ln(\frac{n_l}{n_i} \frac{n_z}{n_i})$   
 B  $\ln(\frac{n_i}{n_l} \frac{n_z}{n_i})$   
 C  $\ln(\frac{n_l}{n_i} \frac{n_i}{n_z})$   
 D  $\ln(\frac{n_i}{n_l} \frac{n_i}{n_z})$

## 3.4 Verarmingsgebied-model

### 3.4.1 Ruimtelading in verarmingsgebied

**Inleiding** Het is lang onduidelijk gebleven hoe de *contactspanning* precies tot stand kwam en waar precies die stond. Dat komt, omdat de uitwerking van de achterliggende verdelingswet van Fermi-Dirac in de praktijk veel te ingewikkeld is. In het bijzonder als we niet alleen de geleiders bezien, maar ook de halfgeleiders en niet-geleiders. Voor de *halfgeleiders* kwam pas in 1939 een bevredigend model: het *verarmingsgebied*model van *Davydov*, en, onafhankelijk van hem, van *Schottky*. In het engels wordt de term ‘*depletion-zone*’ gebruikt voor ‘verarmingsgebied’ (het engelse ‘*deplete*’ is ‘leegmaken’ of ‘uitputten’). Met dat model is het mogelijk om de stroomloze eigenschappen van dioden en transistoren te begrijpen, in het bijzonder het *gelijkrichteffect*. Als de *elektronemissietheorie* van *Mott* aan dit model wordt toegevoegd, dan kunnen we bovendien de *stroom* door de diode en de bipolaire transistor begrijpen. Tezamen met de elektron-emissietheorie is het verarmingsgebied-model dus het theoretisch fundament voor het begrijpen van de werking van de actieve elektronische componenten.

**Het verarmingsgebied** We hebben reeds de grondgedachte van het **verarmingsgebied-model** naar voren gebracht bij de verklaring van de voltapotential. Hier zullen we er uitvoeriger op ingaan. *Davydov* en *Schottky* namen het volgende aan voor de contactlaag aan het oppervlak: *aan het oppervlak van een halfgeleiderkristal is een gebied zonder beweeglijke ladingdragers: het verarmingsgebied; de rest van de halfgeleider is elektrisch neutraal.*

In het bijzonder betekent dat voor het verarmingsgebied van halfgeleiders:

- bij **n-type** zijn er géén geleidingselektronen;
- bij **p-type** zijn er géén gaten;

Het gevolg van het ontbreken van de beweeglijke lading in de contactlaag is, dat er *netto lading* is in het verarmingsgebied, namelijk de niet-gecompenseerde *onbeweeglijke lading* van de gedoteerde ionen. We zullen verder uitwerken hoe die lading samenhangt met de ‘contactspanning’, de ‘externe spanning’, de diepte van en de veldsterkte in het verarmingsgebied.

**Beperking verarmingsgebied-model** Met het *verarmingsgebied*model van *Davydov* en *Schottky* zijn enkele zeer belangrijke eigenschappen van de dioden en transistoren te begrijpen. Het model geeft echter niet een volledige verklaring: alléén de eigenschappen onder geïdealiseerde

(stroomloze) omstandigheden in de zogenaamde ‘sper’ toestand worden verklaard. De *grootte* van de contactspanning wordt *niét* door het verarmingsgebied-model verklaard. Om die te verklaren hebben we, in een vorige paragraaf, gebruik gemaakt van de onderliggende theorie: de theorie van het thermische evenwicht volgens Fermi-Dirac.

**Lading in kristal** Een kristal moet elektrisch neutraal zijn. Toch bestaat het uit allemaal verschillende soorten ladingen. Een deel van de lading is gebonden aan ionen, gevormd door de atoomkernen met daaromheen schillen met elektronen; het is de *onbeweeglijke lading* (dat geldt ook voor de dotering). De *beweeglijke lading* bestaat uit twee soorten: de bindingselektronen en de geleidingselektronen (waaronder die van de dotering). De geleidingselektronen kunnen zich, min of meer, vrij door het kristal bewegen. De *geleidingselektronen* zorgen voor een negatieve ruimtelading in de omgeving van de positieve ionen. De *gaten* zorgen voor een positieve ruimtelading rond de negatieve ionen. Is nu om een of andere reden de verdeling van de ruimtelading verstoord—aan het oppervlak van de contactlaag—dan heeft dat gebied een netto lading.

**Lading in verarmingsgebied** We nemen als voorbeeld een n-halfgeleider, die eigenlijk deel uitmaakt van een contact met een metaal (of een p-halfgeleider), met de rand bij  $x = 0$ , en *verarmingsgebied-diepte*  $d$ ; waarvan de grootte nog nader te bepalen is. Als de **dichtheid van onbeweeglijke ladingen**  $\rho_o$  is, en die van de beweeglijke lading  $\rho_b$ , dan geldt voor de *totale ladingsdichtheid*  $\rho$ :

$$\rho = \rho_o + \rho_b$$

Volgens het *verarmingsgebied-model* is de contactlaag  $0 < x < d$  een verarmingsgebied *zonder beweeglijke lading* (zie fig. 3.10):

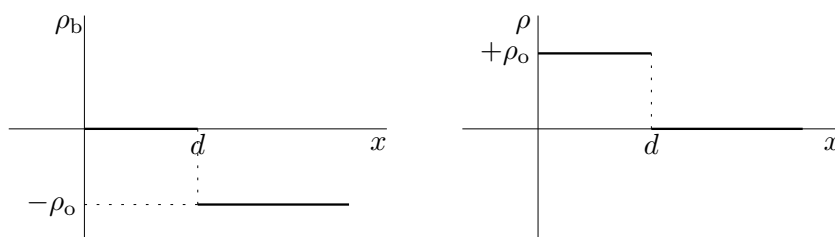
$$\begin{array}{ll} 0 < x < d & \rho_b = 0 \quad \rho = \rho_o \\ x > d & \rho_b = -\rho_o \quad \rho = 0 \end{array}$$

Een gevolg hiervan is, dat er in het verarmingsgebied wel een elektrisch veld moet zijn maar in het inwendige niet. Volgens het model is dus op een positie  $x$ :

- òf de dichtheid van de beweeglijke ladingsdragers  $\rho_b = 0$ ;
- òf de veldsterkte  $E = 0$ ;

Maar dan kan er nergens stroom zijn, omdat voor stroom beweeglijke lading èn veld nodig is. Het model past bij de stroomloze toestand. Dat de halfgeleider volgens het model een *oppervlaktelading* heeft is ogenschijnlijk in strijd met de elektrische neutraliteit. Maar bedenk dat het om

een contactvlak gaat: aan de andere kant zal een tegengestelde lading moeten zijn!



a Ladingsverdeling van de *beweeglijke* lading: deze zijn afwezig in de oppervlaktelaag.

b Ladingsverdeling van de *totale* lading: de oppervlaktelaag heeft de lading van de doteringsionen.

Figuur 3.10 Ladingsverdeling van verschillende soorten lading bij het oppervlak van een n-halfgeleider volgens het verarmingsgebied-model.

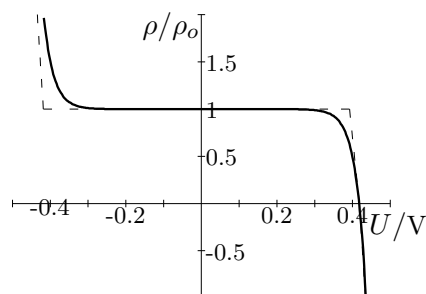
**Verarmingsgebied en Boltzmann evenwicht** Omdat de verdelingswet van Fermi-Dirac bepaalt hoe de toestanden van de elektronen bezet zijn, bepaalt ze ook de ladingsdichtheid van de onbeweeglijke ladingen. We gingen daar al op in bij de afleiding van de spanning over de contactlaag (dat is dus het verarmingsgebied). We zullen er nog eens naar kijken om te zien waarom het verarmingsgebied-model de werkelijke situatie heel goed benadert. Bij het bepalen van de contactspanning zagen we dat er een plaatafhankelijke potentiaal  $V$  in de contactlaag was. De (plaatsafhankelijke) dichtheid aan geleidingselectronen en gaten werd in de benadering met het Boltzmann evenwicht:

$$\frac{n}{n_i} = e^{eV/kT} \quad \frac{p}{n_i} = e^{-eV/kT}$$

Daarmee wordt de totale ladingsdichtheid:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_o + \rho_n + \rho_p \\ &= en_d - en + ep \\ &= e(n_d - n + p) \\ &= e \left( n_d - n_i \left( e^{eV/kT} - e^{-eV/kT} \right) \right) \\ &= e(n_d - n_i 2 \sinh(eV/kT)) \end{aligned}$$

(wie niet van hyperbolische functies houdt moet de laatste regel maar weglaten). De grafiek is getekend in figuur 3.11.



Figuur 3.11 De relatieve ladingsdichtheid  $\rho/\rho_0$  in een n-type Si kristal met een dotatie van  $2 \cdot 10^{-6}$  als functie van de voltapotentiaal  $V = \phi(x)$  in het kristal. Let op het lange traject waar de lading constant die van de donorlading is, bijna tot aan de contactspanning van  $U_c = 0,41$  V.

Welnu, er is iets bijzonders met het potentiaalafhankelijke gedeelte: het bestaat uit exponenten met een zéér groot getal (voor zolang de potentiaal niet al te klein is). Immers, bij  $T = 300$  K is  $e/kT = 1/0,0258\text{V} = 38,6/\text{V}$ . Het gevolg is, dat voor ‘normale’ potentialen met  $|V| < 0,32$  V de exponentieële term verwaarloosbaar is, en er dus geen noemenswaardige  $\rho_b$  is. Slechts in het kleine spanningsinterval tussen 0,32 V en 0,41 V valt de ladingsdichtheid steil naar 0. De contactspanning  $V_c = 0,41$  V is de potentiaal op de plek waar de lading 0 is, namelijk in het inwendige. Het verarmingsgebied-model doet nu niets anders dan deze grafiek vereenvoudigen tot een horizontale lijn tot 0,41 V, waar de grafiek naar 0 springt.

### 3.4.2 Elektrisch veld in verarmingsgebied

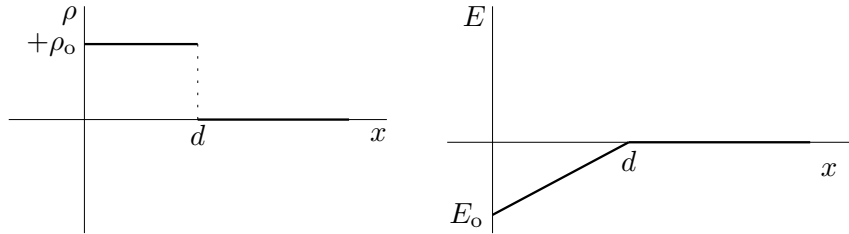
**Veldsterkte in verarmingsgebied** Uit de nettolading in het verarmingsgebied komt een elektrisch veld. Dat veld is, voor n-type halfgeleider, *naar buiten gericht* (‘negatief’ = naar links). Immers, binnenin kan geen veld zijn. Je kan gemakkelijk inzien dat het veld, dat bij  $x = d$  nog nul is, voor kleinere  $x$ -waarden steeds toeneemt. De totale flux, die uit het verarmingsgebied komt, is volgens Gauss gelijk aan de lading in het verarmingsgebied. Noemen we de **verarmingsgebied-ruimtelading**  $Q_o$ , dan is, bij een rand-oppervlak  $A$  dus volume  $dA$  van het verarmingsgebied,:

$$Q_o = \rho_o(dA)$$

De fluxdichtheid aan het buitenoppervlak,  $D_o$ , wordt volgens Gauss:

$$D_o = -\frac{\Psi_{\text{uit}}}{A} = -\frac{Q_{\text{in}}}{A} = -\rho_o d$$

De **verarmingsgebied-randveldsterkte**  $E_o$ , aan de buitenrand, is  $E_o = D_o/\epsilon$ , waarin  $\epsilon$  de permittiviteit is. Samengevat:



- a Ladingsdichtheid: de lading is geconcentreerd in de buitenrand (tot een diepte  $d$ ) gelijk aan de onbeweeglijke (gedoteerde) lading, doordat de beweeglijke lading is verdwenen.
- b Veldsterkte  $E$ : Omdat  $dE/dx \sim \rho$ , is  $E$  een rechte lijn, met maximale waarde  $E_o$  aan de rand en verdwijnend in het binnengebied.

Figuur 3.12 Ladingsdichtheid  $\rho$  en veldsterkte  $E$  in het verarmingsgebied van een n-type halfgeleider als functie van afstand  $x$  tot het randoppervlak.

$$E_o = -\frac{\rho_o}{\epsilon}d$$

De veldsterkte loopt in het verarmingsgebied, zoals te zien in figuur 3.12, lineair van  $E_o$  naar 0. *Ga zelf na*, dat op  $x = \frac{2}{3}d$ , het veld volgens Gauss wordt bepaald door een lading van slechts  $\frac{1}{3}Q_o$ . Algemeen geldt:

$$\frac{E}{E_o} = \frac{d-x}{d} \quad 0 < x < d$$

**Potentiaal in verarmingsgebied** Tenslotte kan nu het potentiaalverloop worden berekend uit de veldsterkte. Een elektron dat uit het inwendige komt zal in het verarmingsgebied een tegenkracht ondervinden, dus een steeds lagere potentiaal. Omgekeerd, starten we aan de buitenkant met potentiaal  $V = 0$  en neemt, naar rechts gaande, de potentiaal toe met  $dV$ :

$$dV = -Edx = -\frac{d-x}{d}E_o dx$$

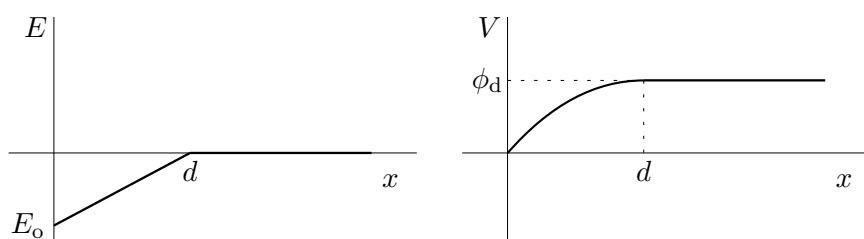
Integreren we dit van 0 tot  $x$ , dan vinden we een parabolische potentiaal vorm (fig. 3.13), met bij diepte  $x = d$  zijn topwaarde  $U_n$ , de *verarmingsgebied-spanning* (die bij een uitwendige spanning niet  $\phi_d$  hoeft te zijn).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^x dV \\ &= -\frac{E_o}{d} \int_0^x (d-x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{E_o}{d} \left[ -\frac{1}{2}(d-x)^2 \right]_0^x \\
 &= \frac{1}{2} \frac{E_o}{d} ((d-x)^2 - d^2) \\
 &= U_n \left( 1 - \left( \frac{d-x}{d} \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

Daarin is de topwaarde van de potentiaal, aan de halfgeleider kant, gelijk aan de gemiddelde veldsterkte maal diepte:

$$U_n = \frac{1}{2}(-E_o)d$$



a Veldsterkte  $E$ : is een lineaire functie die maximaal is aan de buitenrand  $x = 0$  en verdwijnt in het inwendige  $x > d$ .

b Potentiaal  $V$ : omdat  $E = -dV/dx$ , is  $V$  een parabol-functie met richtingscoëfficiënt  $-E$ . De potentiaal klimt van 0 aan de rand tot de donor-voltapotential  $\phi_d$  in het inwendige.

Figuur 3.13 Veldsterkte  $E$  en potentiaal  $V$  in het verarmingsgebied van een n-type halfgeleider als functie van afstand  $x$  tot het randoppervlak.

**Verarmingsgebied-diepte, -lading en -randveldsterkte** We kunnen nu, omgekeerd, van het *verarmingsgebied-diepte*  $d$ , de *ruimtelading*  $Q_o$ , en de *randveldsterkte*  $E_o$ , uitdrukken in de *spanning* over het verarmingsgebied  $U_n$ :

$$d = \sqrt{2\epsilon U_n / \rho_o}$$

$$\frac{Q_o}{A} = \sqrt{2\epsilon \rho_o U_n}$$

$$-E_o = \sqrt{2\rho_o U_n / \epsilon}$$

Voor p-type halfgeleider moeten we er rekening mee houden dat de lading van de acceptorionen *negatief* is, waardoor ook  $\rho_o$ ,  $Q_o$ ,  $U_p$  en  $-E_o$  *negatief* zijn.



Zouden we deze theorie willen toepassen op geleiders, dan komen er problemen. Kenmerkend voor *geleiders* is de zeer grote ladingsdichtheid  $\rho_o$  van de onbeweeglijke ladingen: de metaalionen. *In geleiders, en alleen daar, zou de verarmingsgebied-diepte  $d$  praktisch nul zijn.* Daarom is het verarmingsgebied-model alleen bij halfgeleiders toepasbaar. Bij hoge dotatie, dus grote  $\rho_o$ , gedragen halfgeleiders zich enigszins metallisch: een dun verarmingsgebied met een redelijke geleidbaarheid. Die eigenschap wordt in de chiptechnologie veel gebruikt.

**Voorbeeld Si en n-Si** Bereken, bij 300 K, de diepte van het verarmingsgebied in n-Si:

- dotatie  $2 \cdot 10^{-6}$  met  $U_n = 0,42$  V;
- dotatie  $2 \cdot 10^{-3}$  met  $U_n = 0,60$  V;

Voor zuiver Si geeft BINAS tabel 17  $\epsilon_r = 12$ , dus  $\epsilon = 12\epsilon_0$ . Verder berekenen we al eerder  $n_{Si} = 5 \cdot 10^{28} / m^3$ . Daaruit volgt voor het  $2 \cdot 10^{-6}$  n-Si een  $\rho_o = 1,6 \cdot 10^4$  C/m<sup>3</sup>. Dus:

- $d^2 = 2 \cdot 12 \cdot \epsilon_0 / 1,6 \cdot 10^4 = 0,63 \cdot 10^{-3} \epsilon_0$ ;  $d = 75$  n m;
  - $d^2 = 2 \cdot 12 \cdot \epsilon_0 / 1,6 \cdot 10^7 = 0,90 \cdot 10^{-6} \cdot \epsilon_0$ ;  $d = 2,8$  nm;
- Uitgedrukt in atoom afstanden 0,273 nm wordt de diepte:
- 275 atoomafstanden voor 'gewone' dotering;
  - 10 atoomafstanden voor 'zware' dotering.

**Opg 3.4.1 \*\*** Een pn-diode van het basismateriaal Germanium staat in sper. De spanning over het verarmingsgebied *aan de p-zijde* is 1,1 V.

- Bereken de diepte van het verarmingsgebied als het p-Ge dotatie  $10^{-4}$  heeft. [Antw.  $d = 2,1 \cdot 10^{-8}$  m]
- \*\*\*\* bereken deze diepte in atoomafstanden.

[Antw.  $d = 74$  atoomafstanden]

**Opg 3.4.2 \*\*** Een metaal-halfgeleider-diode met het metaal Cu aan de n-kant heeft over het verarmingsgebied in Cu een spanning van 2 V. Verdere vragen als bij de vorige opgave. Neem  $\epsilon_r = 1$

[Antw.  $d = 5,10 \cdot 10^{-11}$  m = 0,05 nm = 0,22 atoomafstanden]

**Opg 3.4.3 \*\*** Een p-type Si is verontreinigd met een acceptorendichtheid van  $0,625 \cdot 10^{22} / m^3$ . In een verarmingsgebied van dat materiaal is de ruimteladingsdichtheid:

- $-10^3$  C/m<sup>3</sup>;
- 0;
- $+10^3$  C/m<sup>3</sup>;
- anders.

**Opg 3.4.4 \*** De spanning over het verarmingsgebied, bij constante dotatie, is;

**I** kwadratisch evenredig met de diepte van het gebied;

**II** evenredig met de ruimtelading in het gebied;

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

**Capacitieve werking verarmingsgebied** De lading van het verarmingsgebied wordt bepaald door de dotering, en de spanning over het verarmingsgebied. Voor het n-gebied geldt bijvoorbeeld (pag. 160):

$$\frac{Q_d}{A} = \sqrt{2\epsilon\rho_d U_n}$$

In thermisch evenwicht is het contact elektrisch neutraal. Dus wordt de *verarmingsgebied-lading* gecompenseerd door oppervlaktelading (metaal), of ruimtelading (halfgeleider), aan de andere kant van het contact. Normaal is capaciteit  $C$  de verhouding tussen lading  $Q$  en spanning  $U$ . Daar de ruimtelading in één verarmingsgebied met de *wortel* van de spanning varieert,  $Q_d/A = \sqrt{2\epsilon\rho_d U_n}$ , dus met de spanning *niet evenredig* is, hebben we hier te maken met een *spanningsafhankelijke capaciteit*. In zo'n geval kijken we naar de **ruimtelading-capaciteit**  $C_d$ , de *afgeleide* van de lading naar de spanning. Immers, de capaciteit is óók de evenredigheidsconstante tussen stroom  $I$  en spanningsverandering  $dV/dt$ :  $I = dQ/dt = (dQ/dV)dV/dt = C_d dV/dt$ . In ons geval:

$$C_d = \frac{dQ_d}{dU} = A\sqrt{\frac{\epsilon\rho_d}{2U_n}}$$

De capaciteit is omgekeerd evenredig met de diepte van het verarmingsgebied, omdat  $d_n^2 = 2\epsilon U_n/\rho_d$ . De *verarmingsgebied-capaciteit* kan dus geschreven worden als:

$$C_d = \epsilon \frac{A}{d_n}$$

Verbazingwekkend: dit is de formule voor een 'gewone' plaatcondensator met plaatafstand  $d_n$ . Dat betekent dat dynamisch gezien de ruimtelading in het verarmingsgebied van de halfgeleider praktisch geconcentreerd is op de overgang van het inwendige naar het verarmingsgebied.

**Opg 3.4.5 \*\*** Bereken voor een n-type Si met dotatie  $10^{-6}$  de verarmingsgebied-capaciteit. De spanning over het verarmingsgebied is 1,0 V en het contactoppervlak heeft een grootte van  $0,1 \text{ mm}^2$ . [Antw.  $C = 65 \text{ pF}$ ]

**Diëlektrische relaxatietijd** Bij wisselspanning over de *pn-diode* gaat de toestand steeds over van niet-geleidende naar geleidend en omgekeerd (zie 166). In de niet geleidende toestand is de contactlaag capacitatief, en houdt de ruimtelading 'vast'. In de geleidende toestand is er geen ruimtelading, want die 'vloeit af' (in werkelijkheid vloeien juist de beweeglijke ladingen toe, maar dat verandert de redenering niet). We kunnen het proces tijdens de geleidende fase opvatten als een condensator met *verarmingsgebied-capaciteit*  $C_d$  die leegloopt over een weerstand

met weerstand  $R$ . In dat geval zal de lading in de tijd teruglopen volgens een exponentieel verval met **diëlektrische relaxatietijd**  $\tau_d$ :

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau_d}$$

Immers, de afname van de lading per seconde,  $dQ/dt$ , is de stroom:

$$I = Q_0 e^{-t/\tau_d} \cdot (-1/\tau_d) = -Q/\tau_d$$

Eenzijds wordt de stroom bepaald door de weerstand  $R = \rho d/A = d/A\gamma$  van het verarmingsgebied in de *geleidende* toestand. Anderzijds wordt  $I$  bepaald door de lading, dus de capaciteit  $C_d = \epsilon d/A$ , in de *niet geleidende* toestand. Tezamen:

$$\begin{aligned} -U/R &= -C_d U/\tau_d \\ \tau_d &= RC_d \end{aligned}$$

De diëlektrische relaxatietijd  $\tau_d$  wordt na invullen van  $R$  en  $C_d$ :

$$\tau_d = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

Merk op, dat  $\gamma$  via  $\gamma = \rho\mu$  afhangt van de ladingsdichtheid van de beweeglijke lading  $\rho$ , dus van de dotatie, maar niet van de diepte of zoiets. De diëlektrische relaxatietijd blijkt van de orde  $10^{-10}$  of korter te zijn.

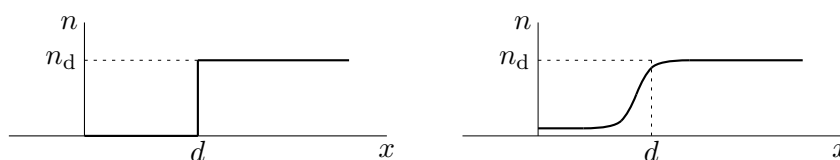
Bij zeer hoge frequenties mogen we niet meer aannemen dat de ladingen rond het contactvlak zich snel genoeg kunnen aanpassen aan de aantallen die op dat moment bij het evenwicht horen. Daarvoor is diffusie en recombinatie van de overschotladingen nodig. Dat laatste gaat veel langzamer, zodat de meest bepalende tijd dan de levensduur zal zijn.

**Voorbeeld Diëlektrische relaxatietijd n-Si** Bepaal van  $10^{-6}$  gedoteerd n-Si de diëlektrische relaxatietijd.

Uit het voorbeeld van pag. 87 halen we dat de lading van de geleidings-elektronen  $\rho_n = -8 \text{ kC/m}^3$ . De beweeglijkheid van de geleidings-elektronen is  $\mu_n = -0,18 \text{ m}^2/\text{Vs}$ . De geleidbaarheid wordt daarmee:  $\gamma = -8 \cdot 10^3 \cdot -0,18 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ S/m}$ . De permittiviteit volgt, met de diëlektrische constante van Si:  $\epsilon_r = 12$ , uit die van vacuum:  $\epsilon = 12 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ F/m}$ . De diëlektrische relaxatietijd wordt van de orde  $\tau_d = 1,1 \cdot 10^{-10} / 1,4 \cdot 10^3 = 10^{-13} \text{ s}$ .

**Opg 3.4.6 \*\*** Bereken de diëlektrische relaxatietijd  $\tau_d$  van p-Ge met een dotatie van  $10^{-7}$ . [Antw.  $\tau_d = 1,1 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ ]

**Beweeglijke lading in verarmingsgebied** Het *verarmingsgebied-model* is gebaseerd op het verwaarlozen van de ladingsdichtheid van de beweeglijke lading zolang de potentiaal onder de contactspanning is. Als de potentiaal voldoende dicht bij de contactspanning komt, is dat echter niet meer reëel. Dicht bij de ‘binnenrand’ van het verarmingsgebied zullen meerderheidsladingsdragers uit het inwendige het gebied indringen. Aan de andere buitenrand zullen minderheidsladingsdragers vanuit het andere materiaal doordringen in het verarmingsgebied. Om een idee te krijgen van de ladingsdichtheid die daardoor in het verarmingsgebied ontstaat nemen we, als een ruwe benadering voor de potentiaal, de potentiaal van het model van Davydov. Daarin verloopt de potentiaal als een omgekeerde parabool, die zijn topwaarde  $V_n$  bereikt aan de binnenrand van het verarmingsgebied op een afstand  $d$  van het contactvlak. Volgens het



a Davydov: de contactlaag is zonder beweeglijke ladingen en in het binnengebied bepaalt de dotering het aantal geleidingselektronen. Let op de abrupte overgang bij de binnenrand van de contactlaag

b Boltzmann-verdeling: overal is het aantal geleidingselektronen exponentieel afhankelijk van de voltapotentiaal. Let op de Gauss-kromme bij de binnenrand van de contactlaag

Figuur 3.14 Dichtheid geleidingselektronen  $n$  rond de contactlaag van een n-gebied volgens de modellen van Davydov en Boltzmann.

Boltzmann evenwicht loopt de dichtheid van de geleidingselektronen dan exponentieel kwadratisch snel af van de topwaarde, op de binnenrand van het verarmingsgebied  $x = d$ , tot de eigen waarde, aan de buitenrand  $x = 0$ , bij het contactvlak. De dichtheid  $n$  heeft daardoor de vorm van een halve Gauss-kromme (zoals te zien in fig. 3.14), waarvan de topwaarde gelijk is aan de dotering waarde  $n_d$ . De breedte van de overgangslaag naar het contactlaag kan worden uitgedrukt in de diepte  $d$  van het contactlaag, en is ongeveer  $d/\sqrt{2 \ln(c_d/c_i)}$ —dat is in de orde van tienden van de diepte. Conclusie: het verloop vindt plaats in slechts een klein gedeelte van het contactlaag, zodat de verwaarlozing daarvan in het algemeen redelijk is.

## 3.5 Dioden

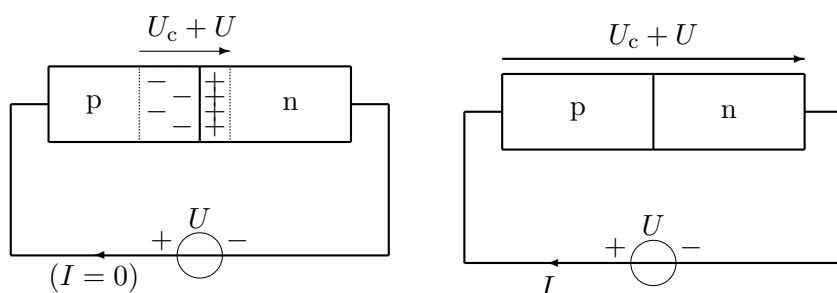
### 3.5.1 Ideale diode

Op grond van het aangegeven gedrag van de ladingen bij het contactvlak van de diode, kunnen we de stroom-spanning karakteristiek begrijpen. Met de geïdealiseerde werking van de contactlagen krijgen we het schakelaar-model van de diode: de *ideale diode*.

**Diodeafspraken** Om duidelijke uitspraken over het diodegedrag te kunnen doen, spreken we af, dat we stroom  $I$  en spanning  $U$  in dezelfde richting positief zullen noemen (zie fig. 3.15). Daarbij kiezen we de **positieve kringrichting** zo, dat die een *negatieve contactspanning*  $U_c$  heeft. In de geleidende toestand wordt de uitwendige spanning(sbron)  $U$  daardoor positief; het is een ‘doorlaatspanning’. Deze tekenafpraak maakt:

- de *contactspanning*  $U_c$  negatief;
- een *doorlaatspanning*  $U$  positief;
- een *sperspanning*  $U$  negatief;

Op het contact van de p- en n-halfgeleider van de diode ontstaat van nature een contactlaag met erover een *spanningsval*  $U_{pn}$ , van p naar n, gelijk aan de contactspanning  $U_c$ . De aansluitcontacten aan de diode moeten zó zijn uitgevoerd—dat is lang niet eenvoudig—dat de contactspanningen daar over een ‘groot’ gebied (vergeleken met de pn-contactlaag) worden uitgesmeerd, zodat de contactspanningen daar geen storende invloed hebben op de schakeling.



- a  $U < -U_c$ : Niet geleidende toestand, met de spanning  $U_c + U$  over de contactlaag.
- b  $U \geq -U_c$ : Geleidende toestand, met de spanning  $U$  over de gehele diode.

Figuur 3.15 Diodetoestanden afhankelijk van de uitwendige spanning  $U$  en de inwendige contactspanning  $U_c$ . Bij tekenafpraak voor spanning en stroom bij de diode is de contactspanning van p naar n negatief.

**Niet-geleidende toestand** Zonder uitwendige spanning is de **diodespanningsval**  $U_{\text{pn}} = U_c$  over de contactlaag, gemeten in de kringrichting van p naar n. Is de *uitwendige spanning*  $U < 0$ , in dezelfde richting als de contactspanning, dan komt  $U$  *bijna geheel* over het contact te staan (zie fig. 3.15). Immers, het verarmingsgebied bevat praktisch geen beweeglijke lading, waardoor de weerstand ervan hoog is vergeleken met de weerstand van de rest van de stroomkring. Totaal is dus

$$U_{\text{pn}} = U_c + U$$

Bijgevolg wordt het in de halfgeleider aanwezige verarmingsgebied dieper. Geleiding door het verarmingsgebied is niet mogelijk, omdat in het verarmingsgebied géén ladingsdragers zijn. Men zegt dat de diode in de **niet-geleidende toestand** ‘spert’:

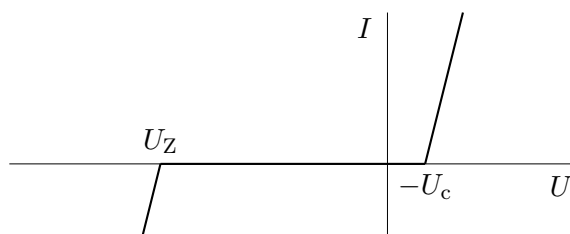
$$U < -U_c \quad I = 0 \quad \text{niet-geleidend}$$

**Geleidende toestand** Is de *uitwendige spanning*  $U$  tegen de contactspanning in, dan wordt de spanning over de contactlaag  $U_{\text{pn}}$  (in absolute zin) kleiner dan de contactspanning  $U_c$ , waardoor de verarmingsgebied minder diep wordt. Geleiding is mogelijk zodra  $U_{\text{pn}} \leq 0$ , als de uitwendige spanning  $U$  de contactspanning heeft gecompenseerd, en het verarmingsgebied is verdwenen. De spanning zal dan *niet* meer over het contact staan, maar over de gehele diode. De diode is veranderd in een halfgeleider weerstand met een kleine geleiding waarvoor de wet van Ohm geldt. Men zegt dat de diode in de **geleidende toestand** ‘doorlaat’ (de gelijkrichtende werking!):

$$U \geq -U_c \quad I > 0 \quad \text{geleidend}$$

De spanning  $-U_c$ , waarbij de geleidende toestand begint, wordt **drempelspanning** of genoemd.

**Lawineffect en doorslagspanning** De uitwendige spanning in de sperrichting kan zo ‘groot’ worden, dat de verarmingsgebiedrand-veldsterkte  $E_o$  bindingselektronen—of andere gebonden elektronen—uit hun binding kan trekken. De spanning waarbij dat gebeurt heet **doorslagspanning**, of **Zenerspanning**  $U_Z$ . Er treedt dan doorslag en ionisatie op rond het contactvlak. De vrijgekomen ladingdragers worden daar dermate versneld dat zij op hun beurt nieuwe ionisaties kunnen veroorzaken: **lawineffect**. Door dat lawineffect verdwijnt het verarmingsgebied snel, en er is weer geleiding waardoor de (sper)stroom sterk toeneemt (zie fig. 3.16). De stroom kan echter zo groot worden, dat de



Figuur 3.16 ideale diode-karakteristiek met de stroom  $I$  als functie van de spanning  $U$  over de diode. Let op de drempelspanning  $-U_c$ , waarbij er stroom  $I$  gaat lopen in de doorlaatrichting, en op de Zenerspanning  $U_Z$ , waarbij er stroom gaat lopen in de sperrichting. De steilheid van de grafiek komt door de  $I$ -schaalkeuze.

ionen in de buurt van het contactvlak van hun plaats komen waardoor het contact wordt opgeblazen. De doorslagspanning is afhankelijk van de dotatie. Immers,  $E_o$  is evenredig met de wortel van het produkt van  $\rho_o$  en  $U_{pn} = U_c + U$  (zie pag. 160 en pag. 152); vooral de  $\rho_o$  is evenredig met de dotatie.

**Ideale diode-karakteristiek** Op grond van het bovenstaande zien we het volgende in de  $IU$ -karakteristiek van de ideale diode (figuur 3.16). Bij positieve uitwendige spanning  $U$  zal het verarmingsgebied eerst kleiner worden, waarbij nog  $I = 0$ , en verdwijnen als  $U = -U_c$ , waarna er stroom gaat vloeien:  $I > 0$ . Bij negatieve uitwendige spanning  $U$ , in de richting van de contactspanning, wordt eerst het verarmingsgebied slechts groter, en blijft  $I = 0$ . Bij de grote negatieve spanning  $U = U_Z$ , zal het verarmingsgebied door doorslag en lawineeffect verdwijnen, waarna er stroom zal gaan vloeien:  $I > 0$ .

**Voorbeeld doorslagspanning** Bereken voor silicium de doorslagspanning.

We berekenen de *doorslagspanning*  $U_Z$  uit de vergelijking voor de maximale veldsterkte in het verarmingsgebied:

$$U_Z = -\epsilon E_o^2 / 2\rho_o$$

Bij een doorslagveldsterkte in de orde van  $3 \cdot 10^7$  V/m en een dotatie  $10^{-6}$ —dus een donorldingsdichtheid van  $8 \text{ kC/m}^3$ —vinden we daaruit een doorslag bij ruim  $-5$  Volt.

**Opg 3.5.1** \*\* Bereken de doorslagspanning voor Ge met dotatie  $10^{-6}$ , uitgaande van een doorslagveldsterkte  $8 \cdot 10^6$  V/m. [Antw.  $U_Z = -0,64$  V]

**Opg 3.5.2** \* De Zenerspanning is bij een diode de spanning waarbij

- A de spanning verzadigt in doorlaatrichting
- B de stroom verzadigt in doorlaatrichting
- C de spanning verzadigt in sperrichting
- D de stroom verzadigt in sperrichting

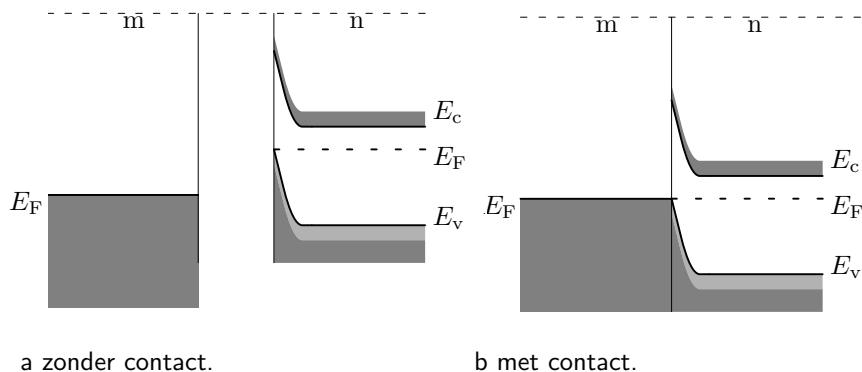
### 3.5.2 Schottky-diode

**Uitvoering** Als eerste werkelijke diode behandelen we de **Schottky-diode** (MS) waarbij aan de ene zijde van het contact een *metaal* m is ('Metal'), en aan de andere zijde een gedoteerde *halfgeleider* ('Semiconductor'). We behandelen alleen de combinatie van een n-metaal met een n-halfgeleider. Het voordeel van de diode is, dat we voor de werking eigenlijk alleen naar de halfgeleider kant behoeven te kijken. Het metaaloppervlak zorgt voor de (noodzakelijke) *oppervlaktelading* die die van het verarmingsgebied compenseert.

**Contactspanning** De *voltapotentiaal* van metalen (denk bijvoorbeeld aan koper Cu met een voltapotentiaal  $\phi_{\text{Cu}}$  van 4,73 eV) is in het algemeen kleiner dan die van een halfgeleider (denk bijvoorbeeld aan Si met een voltapotentiaal  $\phi_{\text{Si}}$  van 4,85 eV). Door de dotering is echter de Fermi-energie omhoog gegaan met de donor-voltapotentiaal  $\phi_{\text{d}}$  van bijvoorbeeld 0,42 eV (zie fig. 3.17a). Alles bijeen wordt de contactspanning  $U_{\text{c}}$  (van m naar n):

$$U_{\text{c}} = -\phi_{\text{Cu}} + \phi_{\text{Si}} - \phi_{\text{d}}$$

Met de boven gegeven getallen is bijvoorbeeld  $U_{\text{c}} = -0,30 \text{ V}$ . Een geleidingselektron in Si heeft een hoger energieniveau dan een geleidingselektron in het metaal, zodat bij contact een aantal ervan naar het metaal stroomt. Bij het metaaloppervlak komt dan een negatieve oppervlaktelading, en bij de halfgeleider ontstaat er een verarmingsgebied met positieve ruimtelading. Aan de kant van de halfgeleider zal de spanning in de buurt van het oppervlak parabolisch veranderen, terwijl in het metaal de spanning bij het oppervlak abrupt verandert (zie fig. 3.17b).



Figuur 3.17 Elektron-energieën verloop bij een metaal 'm' en een n-halfgeleider 'n' zonder en met contact. Let op de 'energiebarrière' tussen m en n.



- Opg 3.5.3 \*\*** Een Schottky-diode, met het metaal Cu, wordt (abusievelijk) verondersteld over het verarmingsgebied in Cu een spanning van 2 V te hebben.
- a Bereken de diepte van dat verarmingsgebied. [Antw.  $d = 0,05 \text{ nm}$ ]  
 b Bereken die diepte in atoomafstanden.  
 [Antw.  $d/a = 0,2 = 0$  (!), dus in metalen is *geen* verarmingsgebied.]
- Opg 3.5.4 \*\*** Een Schottky-diode, met de halfgeleider Germanium, is niet-geleidend, waarbij de spanning over het verarmingsgebied in de halfgeleider 1,1 V is.
- a Bereken de diepte van het verarmingsgebied in  $10^{-6}$  gedoteerd n-Ge. [Antw.  $d = 0,21 \text{ }\mu\text{m}$ ]  
 b Bereken deze diepte in atoomafstanden. [Antw.  $d/a = 740$ ]

**Capacitieve werking in sper** Ook de Schottky-diode heeft een ruimteladingcapaciteit  $C_d$ . De *ruimtelading-capaciteit* als functie van de uitwendige spanning is eenvoudig te vinden met de waarde die bij het verarmingsgebiedmodel is afgeleid (zie pag. 162):

$$C_d = \epsilon A / d_n$$

Deze capaciteit is slechts een goede benadering in de niet geleidende toestand en bij niet te hoge frequenties; dan zal de *tijdconstante* van de ruimtelading gelijk zijn aan de diëlektrische *relaxatietijd*  $\tau_d$ :

$$\tau_d = \epsilon / \gamma$$

Bij hogere frequenties zal de tijdconstante bepaald worden door de levensduur.

- Opg 3.5.5 \*\*** Een Schottky-diode is gemaakt van de n-halfgeleider Germanium, waarvan de dotatie  $10^{-6}$  is. Bereken de diëlektrische relaxatietijd  $\tau_d$ .  
 [Antw.  $\tau_d = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ ]

### 3.5.3 pn-diode

**Contactspanning pn-diode** Hoe kwam ook weer de contactspanning bij de stroomloze **pn-diode** tot stand? Zoals we in paragraaf 3.3.2 zagen zijn er bij de p-kant vrije gaten, en is er een onbeweeglijke negatieve achtergrondlading van de *acceptorionen*. Bij de n-kant zijn er vrije geleidingslektronen, en is er een onbeweeglijke positieve achtergrondlading van donorionen. Bij contact zullen er geleidingslektronen van de n-kant overlopen naar de p-kant en daar gaten opvullen (*recombinatie* van elektron en gat). Daardoor ontstaan *aan beide zijden* verarmingsgebieden, en een spanningsverloop daarover. De contactspanning  $U_c$  is tegengesteld aan de som van de voltapotentiaal over de verarmingsgebieden:

$$-U_c = \phi_d - \phi_a$$

Merk op, dat de *negatieve* waarde  $\phi_a$  wordt *afgetrokken*, dus de absolute waarde van  $\phi_a$  wordt opgeteld.

**Spanningsverdeling over contact** Bij het aanleggen van een externe spanning  $U$  zal, bij verwaarlozing van de weerstand van de aansluitingen en inwendige gebieden, de complete spanning over beide verarmingsgebieden komen te staan (zolang  $U < -U_c$ ). Die totale (negatieve) spanning,  $U_{pn} = U_c + U$ , zal zich over *beide* gebieden verdelen. Hoe? Nemen we aan dat de ladingen in de contactlagen altijd tegengesteld zijn, dan zal de spanning zich verdelen in dezelfde verhouding als de voltapotentiaal  $\phi_d$  en  $-\phi_a$ . Dat betekent voor de spanningen  $U_n$  en  $-U_p$  over de n- en p-verarmingsgebied:

$$U_n = \frac{\phi_d}{U_c}(U_c + U) \quad U_p = \frac{\phi_a}{U_c}(U_c + U)$$

**Spanningsverdeling over verarmingsgebieden** Aan beide zijden van het contact zullen de ladingen, en de diëlektrische constanten (zelfde zuivere materiaal), gelijk zijn. Volgens het verarmingsgebied-model moeten dan ook de ‘produkten’ van ladingsdichtheid van onbeweeglijke lading en spanning dezelfde uitkomst hebben. Daaruit volgt de spanningsverhouding:

$$\frac{-U_p}{U_n} = \frac{\rho_d}{-\rho_a}$$

De spanning over het verarmingsgebied is omgekeerd evenredig met de ladingsdichtheid van de onbeweeglijke ladingen. Maar bij hetzelfde zuivere materiaal verhouden die ladingsdichtheden zich als de dotaties. Praktisch *verhouden de spanningen over de verarmingsgebieden zich als de omgekeerde dotaties*:

$$\boxed{\frac{-U_p}{U_n} = \frac{-\phi_a}{\phi_d} = \frac{n_d}{n_a} = \frac{c_d}{c_a}}$$

**Diepteverhouding verarmingsgebieden** Voor de dichtheid van onbeweeglijke lading geldt in het verarmingsgebied-model:  $\rho_o = \frac{Q}{dA} = \frac{Q}{A}/d$ . De lading aan beide zijden van het contact is gelijk (maar tegengesteld). Dus: de ladingsdichtheden verhouden zich als de omgekeerde diepten van de verarmingsgebieden. Anders gezegd: *de diepten van de verarmingsgebieden verhouden zich als de omgekeerde dotaties*.

$$\boxed{\frac{d_p}{d_n} = \frac{n_d}{n_a} = \frac{c_d}{c_a}}$$

**Conclusie** *Bij een pn-diode kunnen de contactspanningen over, en de diepten van, de verarmingsgebieden worden berekend uit de dotaties:*

$$\frac{-U_p}{U_n} = \frac{d_p}{d_n} = \frac{n_d}{n_a} = \frac{c_d}{c_a}$$

Daarbij is  $U_n > 0$  en  $U_p < 0$ , met totaal:

$$U_n - U_p = -U_c - U$$

**Voorbeeld Spanningen pn-diode** Een pn-diode is gemaakt van  $2 \cdot 10^{-6}$  p-gedoteerd en  $2 \cdot 10^{-5}$  n-gedoteerd silicium. Bereken de spanningen over en de diepten van de verarmingsgebieden.

Van een eerder voorbeeld zagen we dat  $2 \cdot 10^{-6}$  dotatie bij Si een contactspanning van ruim 0,41 V gaf. Iedere factor 10 levert extra 60 mV op. Op grond van de dotaties krijgen we dan 0,41 V en  $0,41 + 0,06$  V, totaal een contactspanning van 0,89 V.

Uit de verhouding:  $-U_p/U_n = n_d/n_a = 2 \cdot 10^{-5}/2 \cdot 10^{-6} = 10$  en de som  $U_n + -U_p = 0,89$  vinden we de aparte spanningen:

$$-U_p = (10/(10 + 1))0,89 = 0,81 \text{ V}$$

$$U_n = (1/(10 + 1))0,89 = 0,08 \text{ V}$$

Merk op, dat de som klopt, en dat praktisch alle spanning over het p-gebied staat. Voor de diepte verhouding zien we evenzeer:

$$d_p/d_n = 10$$

Voor het berekenen van de aparte diepten gebruiken we de spanning en de dotatie:  $U = U_p = -0,81 \text{ V}$  en  $\rho_o = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{28} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ C/m}^3$ . Daaruit volgt:

$$d_p = \sqrt{2\epsilon U_p / \rho_a} = \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,81 / 1,6 \cdot 10^4} = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

en dus  $d_n = 1,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ .

**Opg 3.5.6 \*\*** Een pn-diode is gemaakt van  $10^{-6}$  p-gedoteerd en  $10^{-4}$  n-gedoteerd silicium. De contactspanning is dan 0,9 V.

a Bereken de spanningen over de verarmingsgebieden in het p-en n-gebied.

[Antw.  $U_p = 891 \text{ mV}$ ,  $U_n = 8,9 \text{ mV}$ ]

b Bereken de diepten van de verarmingsgebieden.

[Antw.  $d_p = 1,55 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ,  $d_n = 1,55 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ]

c Welke veranderingen komen er in de diepten en de spanningen wanneer we in de doorlaatrichting een spanning van 1,8 V aansluiten?

[Antw. De oorspronkelijke contactspanning van  $-0,9 \text{ V}$  wordt nu een spanning over het contact van  $+0,9 \text{ V}$ . De verarmingsgebieden verdwijnen en worden omgezet in verrijkingsgebieden.]

**Capacitieve werking pn-diode** Noem de ladingsdichtheden van de onbeweeglijke ladingen (donorionen resp. acceptorionen)  $\rho_n$  resp.  $\rho_p$ , en de bijbehorende contactladingen  $Q_n$  resp.  $Q_p$ . In evenwicht zijn die ladingen tegengesteld:

$$Q_p = -Q_n$$

Deze ruimtelading geeft aanleiding tot een ruimtelading-capaciteit die spanningsafhankelijk is. We hebben echter een ingewikkelde situatie doordat er twee lagen zijn. Men kan echter laten zien dat, dankzij het feit dat de verhouding van de spanningen over de lagen constant blijft, de capaciteit bepaald wordt door de *totale* diepte  $d$  van de beide verarmingsgebieden. De *ruimtelading-capaciteit* wordt:

$$C_d = \epsilon A/d \quad d = d_n + d_p$$

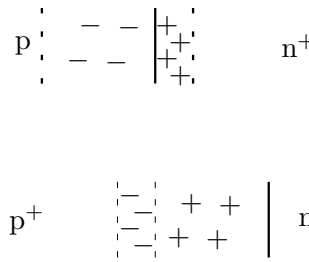
Merk op, dat de diepten omgekeerd evenredig zijn met de dotaties, zodat voor de totale diepte niet de dotaties maar de omgekeerden moeten worden opgeteld.

Bij wisselspanning met lagere frequenties zal, als bij de Schottky diode, de *diëlektrische relaxatietijd*  $\tau_d$  een rol spelen (zie pag. 163). Bij hoogfrequente spanning over de diode zullen de ruimteladingen niet snel genoeg meer kunnen opbouwen. De benodigde tijd wordt dan bepaald door de *dragerlevensduur*.

- Opg 3.5.7 \*\*** Een pn-diode is gemaakt van  $10^{-6}$  p-gedoteerd en  $10^{-4}$  n-gedoteerd silicium. De contactspanning veronderstellen we te zijn 0,9V. Het contactoppervlak is  $0,1 \text{ mm}^2$ .
- a Bereken de ruimtelading-capaciteit. [Antw.  $C = 68 \text{ pF}$ ]  
 b Bereken de diëlektrische relaxatietijd. [Antw.  $\tau_d = 2,6 \cdot 10^{-13} \text{ s}$ ]
- Opg 3.5.8 \*\*\*** De spanning over het verarmingsgebied bij een diode is:
- I kwadratisch evenredig met de diepte van de gebied;  
 II evenredig met de ruimtelading in de gebied;  
 A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar
- Opg 3.5.9 \*\*\*** Bij een pn-overgang verhouden de spanningen over de verarmingsgebieden van de p- en de n-laag zich als
- A de omgekeerde diepten van de gebieden  
 B de kwadraten van de diepten  
 C de ruimteladingsdichtheden  
 D de omgekeerde ruimteladingsdichtheden

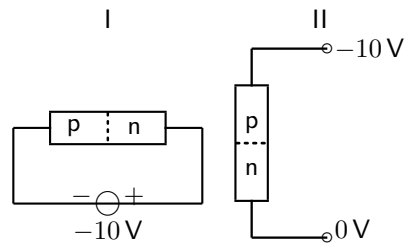
**pn<sup>+</sup>- en p<sup>+</sup>n-dioden** Praktisch wordt een van de beide dotaties groot genomen, vergeleken met de ander.

Daardoor staat de uitwendige spanning praktisch alleen over het verarmingsgebied met lage dotatie. Aan de kant met hoge dotatie is er dan bijna geen verarmingsgebied, alsof de halfgeleider een metaal is. Voor een snelle werking van de diode wordt in de praktijk de  $pn^+$  vorm toegepast: geleidingselektronen zijn sneller dan gaten, zodat het evenwicht in het p-verarmingsgebied sneller hersteld kan worden.



Figuur 3.18 Diepte van de verarmingsgebieden bij  $p^+n$ - en  $pn^+$ -dioden.

Opg 3.5.10 \* De volgende schakelingen zijn gegeven:



- A beide staan in sper
- B alleen I staat in sper
- C alleen II staat in sper
- D beide staan in doorlaat

Opg 3.5.11 \* Bij een  $p^+n$ -overgang worden de grootte van de gebieden die verarmd zijn, en het teken van de ruimtelading daarin, als volgt weergegeven:

- A  $p^+ | \quad \quad \quad + \quad \quad | \quad - \quad | n$
- B  $p^+ | + | \quad \quad \quad - \quad \quad | n$
- C  $p^+ | \quad \quad \quad - \quad \quad | + | n$
- D  $p^+ | - | \quad \quad \quad + \quad \quad | n$

### 3.5.4 Diode stroom

**Inwendige thermische emissie** We zullen laten zien, dat het *niet ideale* gedrag van de diode, namelijk dat er ook in de niet-geleidende toestand een kleine sperstroom is, wordt bepaald door de *inwendige thermische emissie*-stromen. ‘Inwendig’ betekent hier, dat een elektron vanuit zijn oppervlaktetoestand niet hoeft te emitteren naar vacuüm, maar dat het ‘slechts’ door de verarmingsgebieden heen hoeft te gaan. ‘Thermisch’ betekent dat de energie ervoor van de temperatuurbeweging komt.

Er zijn twee soorten thermische emissie van elektronen:

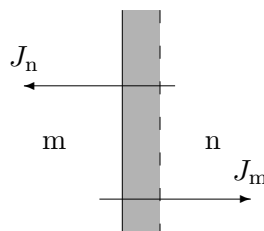
1. uitwendige thermische emissie van elektronen van kristal naar vacuüm (gloeikathodestroom);
2. inwendige thermische emissie van van elektronen van de ene kant naar de andere kant van het kristalcontactvlak (diodesperstroom);

Bij de diodestroom gaat het dus om die laatste soort.

We zullen, voor de eenvoud, aannemen dat we een contact hebben van een n-metaal naar een n-halfgeleider. Het voordeel daarvan is dat er maar één meerderheids-ladingstype is: het elektron. Ingewikkelder gevallen met twee soorten meerderheidsladingen gedragen zich analoog, omdat gaten en elektronen zich onafhankelijk gedragen.

**Emissiestromen bij open diode** Eerst behandelen we de *open* diode: de diode die *niet* in een spanningskring is opgenomen, zodat er ook geen stroom kan lopen. Toch zal er van *beide zijden* van het verarmingsgebied inwendige thermische *emissiestroom* lopen. Alleen: die stromen zijn *precies gelijk en tegengesteld*. Daartoe zullen de ladingen van beide kanten van het contactvlak zodanig van de ene naar de andere kant verschuiven, dat juist die contactspanning ontstaat waarbij de netto stroom nul is.

Van m naar n gaat een elektron emissiestroom met emissiestroomdichtheid  $J_m$ . Omgekeerd gaat van n naar m een even grote emissiestroom met emissie-stroomdichtheid  $J_n$ . Voor alle duidelijkheid spreken we af dat de stroom *op het contactvlak* wordt gemeten. Als een elektronstroom van links naar rechts gaat telt ze negatief; in dit geval is dus  $J_m$  negatief, en  $J_n = J_n(0)$  positief. De evenwichtsvoorwaarde van het stroomloze contact is:



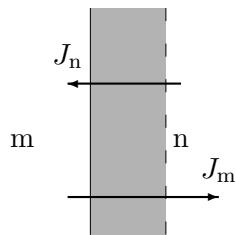
Figuur 3.19 Emissiestromen bij open diode: de contactspanning is zodanig, dat de emissiestroom van de m-zijde  $J_m$  gelijk is aan die van de n-zijde  $J_n$ . Netto is er geen stroom.

$$J_m + J_n(0) = 0 \quad \text{als} \quad U = 0$$

In feite *bepaalt* het stroomloos zijn de contactspanning, zoals we eerder zagen.

**Emissiestromen bij diode in sper en doorlaat** Leg eerst een uitwendige negatieve (sper)spanning  $U$  over de diode aan. Deze spanning staat, zolang er niet te veel stroom wordt gevoerd, praktisch geheel

over het verarmingsgebied—dus alléén in de n-halfgeleider. De emissiestroom vanuit het metaal zal in eerste benadering niet veranderen, omdat aan de metaalkant de elektronen geen verandering zien (fig. 3.20). Maar de elektronen aan de halfgeleider kant zullen wel verandering zien, omdat het verarmingsgebied groter is geworden.

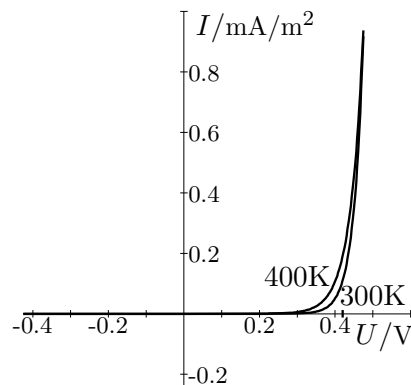


Figuur 3.20 Emissiestromen bij diode in sper. De sperspanning staat geheel aan de n-zijde, waardoor de emissiestroom  $J_n$  van de n-zijde vermindert, terwijl van de m-zijde  $J_m$  gelijk blijft: netto is er stroom.

De *emissie-stroom* vanuit de n-halfgeleider zal daardoor verkleind worden. Praten we in termen van de aantallen elektronen, dan is het aantal, dat voor emissie beschikbaar is, verminderd met de Boltzmannfactor  $e^{-(-e)U/kT} = e^{eU/kT}$  t.g.v. de extra spanning. Omdat *sperspanning* negatief is, is die factor natuurlijk kleiner dan 1, met kleinere stroom. De spanning verstoort zo het evenwicht tussen de emissiestromen, en de diode gaat stroom voeren met netto stroomdichtheid  $J$ :

$$J = J_m + J_n(0)e^{-eU/kT}$$

Bij negatieve spanning, in de niet geleidende toestand, is de e-macht kleiner dan 1, dus de *sperstroom* negatief. Door het invullen van de evenwichtsvoorwaarde  $J_m = -J_n(0)$  vinden we voor de diodestroom, in het geval er een uitwendige spanning  $U$  is,:



Figuur 3.21 Diode  $IU$ -karakteristiek bij twee temperaturen op een enkele schaal voor doorlaat en sper.

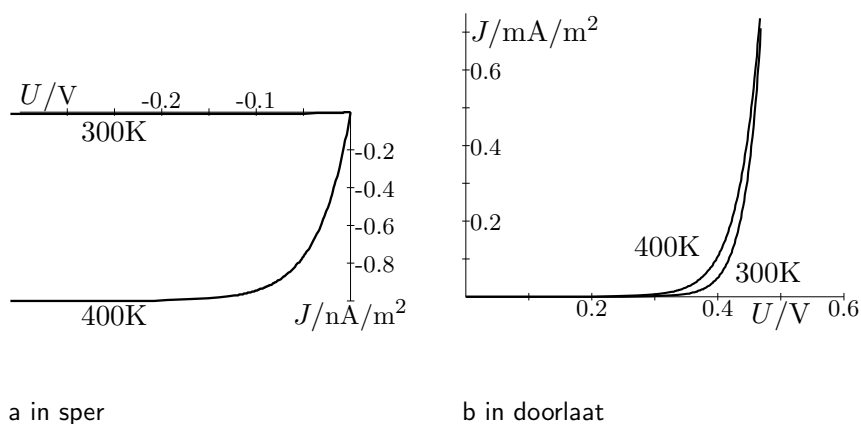
$$J = J_n(0)(e^{eU/kT} - 1)$$

Zie de figuur 3.21. De diode-stroomdichtheid in sper verzadigt bij de waarde  $J_m$  als  $J_n = 0$  is; de verzadigingswaarde van de *didestroom* wordt ‘de’ **sperstroom** genoemd. Omdat  $J_m$  een uitwendige thermische *emissiestroom*-dichtheid is, kunnen we de voor de uitwendige thermische emissie afgeleide vergelijking gebruiken (zie ook pagina 143). De sperstroom  $J_m = J_n(0)$  is evenredig met de dotatie; de temperatuur gevoeligheid is tegelijk een kwadratische en een exponentiële temperatuur afhankelijkheid. Met  $A$  de *Richardson-constante* en  $U_c$  de contactspanning over de laag geldt:

$$J_n = -J_m = AT^2 e^{-eU_c/kT}$$

We merken op, dat dezelfde formule ook nog geldt bij—niet te grote—positieve doorlaatspanning: er is dan een positieve **doorlaatstroom**. Zie figuur 3.22, waar apart sperstroom en doorlaatstroom is getekend op verschillende schaal en figuur 3.21 waarin de diode *IU*-karakteristiek is getekend met een enkele schaal.

Bij doorlaat verkleint het verarmingsgebied; natuurlijk komt er wel een zodanige ladingsverdeling rond het contactoppervlak, als overeenkomt met de Boltzmannfactoren. Dat betekent dat er in het oorspronkelijke verarmingsgebied nu juist *extra geleidingselektronen* komen; dat verschijnsel wordt **inversie** genoemd, omdat de meerderheid is ‘omgekeerd’ (het latijnse ‘invertere’ is ‘omkeren’). Overigens is de formule voor de emissiestroom een *benadering*, omdat de invloed van de stroomvoering op het verarmingsgebied niet is meegenomen. In goede benadering geldt de *exponentiële vergelijking* voor de didestroom, voor en negatieve en kleine positieve spanningen tot rond de drempelspanning, zoals in figuur 3.22 is te zien.



Figuur 3.22 Diode *IU*-karakteristiek bij twee temperaturen. Let op de sterk verschillende schalen voor de doorlaatstroom resp. sperstroom.



**Warmte- en licht-effecten** Als er stroom loopt onder invloed van een spanning, dan wordt tijdens de geleiding elektrische energie omgezet in een andere vorm. Hoe? Bij de diode in geleidende toestand,  $U \sim -U_c$  staat een groot deel van de spanning over de contactlaag. Het elektrische vermogen zal dáár worden omgezet in warmte: **warmtedissipatie**. Vergeleken met een geleider, waar de warmte overal wordt ‘gedissipeerd’, is de warmteproductie bij de halfgeleider *geconcentreerd*. Hierdoor kunnen bij het contactvlak koelproblemen ontstaan; die kunnen worden opgelost door middel van grote (metalen)koeloppervlakken. Anders kan het worden bij de diode in de *sterk* (‘geforceerd’) geleidende toestand,  $U > -U_c$ . Weliswaar staat de spanning maar voor een deel over het contact, maar de stroom is nu groot ( $P = IU$ ). Rond het contactoppervlak zou ook nu een behoorlijke warmteproductie kunnen optreden. Er is echter ook een andere manier waarop de elektrische energie kan worden omgezet, namelijk in *lichtenergie*. Een geleidings-elektron, dat recombineert met een gat, zal een hoeveelheid energie ter grootte van de bandafstand teveel hebben. Als impuls en impulsmoment van elektron en gat geschikt zijn, dan kan het energieoverschot worden meegegeven aan een *foton* (vergelijk met een aangeslagen elektron in een atoom dat terugvalt onder uitzending van een foton): fotonemissie. De **LED** (‘Light Emitting Diode’ = licht uitstralende diode) straalt dan licht uit met een energie gelijk aan de bandafstand.

**Opg 3.5.12** \* Bij een pn-diode is:

**I** de sperstroom het gevolg van thermische emissie;

**II** de doorlaatstroom het gevolg van veldemissie;

A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar

**Opg 3.5.13** \*\* Bij een Ge-diode blijkt een spanning van 75 mV in de doorlaat richting te leiden tot een stroom van  $40 \mu\text{A}$  bij een temperatuur van  $17^\circ$  Celsius. Bereken de verzadigingswaarde van de sperstroom  $I_s$ .

[Antw.  $I_s = 2,09 \mu\text{A}$ ]

**Opg 3.5.14** \*\* Bereken de golflengte van een LED gemaakt van:

a Si.

[Antw.  $\lambda = 1100 \text{ nm}$  infrarood]

b CdS.

[Antw.  $\lambda = 520 \text{ nm}$  ]

**Opg 3.5.15** \*\*\*\* Bepaal de sperstroom van een Si  $n^+p$ -contact, met 0,53 eV contactspanning, opgevat als inwendige emissie, analoog aan de methode voor uitwendige emissie. Gebruik daarbij:

$E_{kF}$  de bewegingsenergie van de Fermi-elektronen is  $E_{kF} = 4,9 \text{ eV}$ ;

$\Phi$  de inwendige ‘uittree-energie’ is de contactspanning  $\Phi = 0,53 \text{ eV}$ ;

$\rho$  de totale beweeglijke lading wordt bepaald door de dotatie, de geleidingslektrondichtheid  $n = 10^{25} / \text{m}^3$ .

zie pagina 144.

- a bereken de Fermisnelheid. [Antw.  $v_F = 1,3 \cdot 10^6$  m/s]
- b bereken de verzadigingsstroom-dichtheid  $J_s$ . [Antw.  $J_s = -5,2 \cdot 10^{12}$  A/m<sup>2</sup>]
- c bereken de emissiestroomdichtheid  $J$  bij  $T = 300$  K. [Antw.  $J = -3 \cdot 10^{-1}$  A/m<sup>2</sup>]
- d bereken de emissiestroom als het contactoppervlak  $0,1$  mm<sup>2</sup> is. [Antw.  $I = -30$  nA]

## 3.6 Veldeffect-transistor

### 3.6.1 Inleiding

**De FET** Soms gaat de techniek vreemde wegen. Halfgeleiders, dioden en gelijkrichters zijn lang bekend. In 1924 vroeg Lilienfeld octrooi aan voor zijn *veldeffect transistor*—in het engels is dat de ‘Field Effect Transistor’, waaruit de acronym ‘FET’ ontstond. Omdat er sprake is van *één* beweeglijk ladingtype, spreekt men van ***unipolaire-transistor*** (‘uni’ is ‘één’, en ‘polair’ is ‘pool’, zoals in monopool of dipool). In 1935 bedacht Heil op papier een andere uitvoering van de *FET*, de ‘Metal Oxide Semiconductor FET’, dus ‘*MOSFET*’. In die tijd was de technologie nog niet in staat om deze papieren denkbeelden tot werkelijkheid te brengen. Pas in 1960 was de technologie zover gevorderd dat de MOSFET terugkwam. En hoe! De hele ontwikkeling van chips tot microprocessoren en geheugens is te danken aan het metaal/halfgeleider-contact, de allereerste dioden.

**FET-typen** Een FET is op te vatten als een stroomvoerende geleider, waarin de *stroomsterkte* regelbaar is met behulp van een *stuurpotentiaal*. Er zijn twee typen FET, gelet op de methode van stroomregeling:

**JFET** door de *stroomdoorgang* te vergroten of verkleinen—met een halfgeleider/halfgeleider contact;

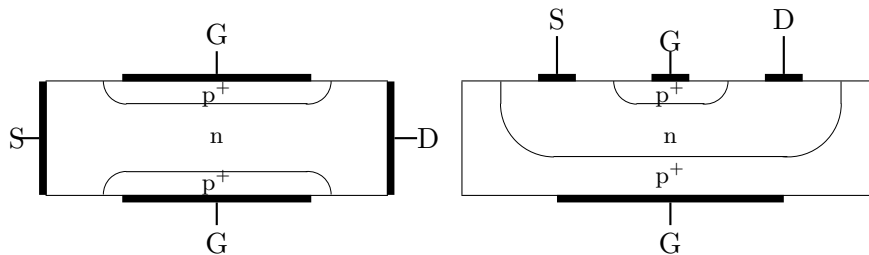
**MOSFET** door het *aantal ladingdragers* te vergroten of te verkleinen—met een metaal/isolator/halfgeleider contact;

De ‘gewone’ *Junction Field Effect Transistor*, de *JFET*, kwam net iets eerder dan die MOSFET’s. Dat was, omdat in de vijftiger jaren de halfgeleider-transistor, de pnp- en npn-transistor werd ontwikkeld; de JFET kan worden gezien als een bijproduct van die ontwikkeling.

### 3.6.2 De JFET

**Kanaal: source, drain** We zullen alleen een n-type JFET behandelen; de werking van een p-type JFET is echter geheel analoog (denk wel aan het ‘omkeren’ van de spanningen en stromen). Het basismateriaal van de n-JFET is een n-gedoteerde halfgeleider. De stroomgeleiding vindt dus plaats door de meerderheidsladingsdragers, de geleidingselectronen. Bij de JFET loopt de deeltjesstroom van de ‘source’ (engels voor ‘bron’), door het ‘channel’ (engels voor ***kanaal***kanaal) naar de ‘drain’ (engelse ‘afvoer’) (zie fig. 3.23). Bij de n-JFET loopt, door deze afspraak, de elektrische stroom van drain naar source. Daartoe wordt de ***kanaalspanning***  $U_{DS}$  positief gekozen:

$$U_{DS} \geq 0$$



a Cilindrische uitvoering: de gate loopt geheel *rondom* het cilindrische geleidende gebied.

b Vlakke('chip') uitvoering: de gate is aan *twee* zijden; onder source en drain kunnen extra gedoteerde  $n^+$  gebieden zijn.

Figuur 3.23 n-JFET in twee uitvoeringen. De deeltjesstroom loopt van source naar drain, de *stuurpotentiaal* staat op de '**gate**' (engelse 'poort'); door de extra dotatie in het  $p^+$  gebied (gate) komt het verarmingsgebied in het n-kanaal.

Bij negatieve kanaalspanning werkt alles precies andersom natuurlijk! De stroom gaat niét over de volle hoogte van de n-halfgeleider, maar door het stroomgeleidende kanaal. De hoogte van het stroomgeleidende kanaal, plaatsafhankelijk, heet de **stroomdoorgang**.

**Gate: stuurspanning** De kenmerkende eigenschap van de JFET is, dat de stroomdoorgang kan worden beïnvloed door een **stuurspanning**  $U_{GS}$  tussen de **stuurelektrode**, de 'G(ate)' (engels voor 'ingang') en de source. De stuurelektrode is bevestigd op een laag extra p-gedoteerde halfgeleider (dus  $p^+$ -type), die in de cilindrische uitvoering rondom het *kanaal* is aangebracht (zie fig. 3.23a). De contactspanning  $U_c$ , negatief van p naar n, komt grotendeels van de p-dotatie en staat over het verarmingsgebied in de n-halfgeleider. Een *negatieve* stuurspanning houdt die overgang verder in *sper*, zolang

$$U_{GS} + U_c < 0$$

Omdat het verarmingsgebied geen beweeglijke lading bevat doet dat gebied niét aan de stroomgeleiding mee. Voor de hoogte van het stroomgeleidende kanaal blijft slechts de rest van de n-halfgeleider over; de stroomdoorgang  $h$  is één diepte  $d$  van het verarmingsgebied (twéé als de *gate* aan beide zijden is) smaller dan de hoogte van de n-halfgeleider. Als de gate aan één zijde is, blijft er een stroomdoorgang over ter hoogte  $h - d$ .

**Verarmingsgebied** Neem eerst het *stroomloze* geval; daarbij heeft ieder punt  $x$  van het kanaal dezelfde potentiaal  $V$  als drain en source. Zonder stuurspanning, tussen gate en source, ontstaat er een (negatieve) contactspanning  $U_c$  in het pn-contact. Algemeen is de spanning  $U_n$  over het verarmingsgebied in het n-kanaal (van n naar p), inclusief de contactspanning:

$$U_n = V - U_c - V_G = V - V_S - (U_{GS} + U_c)$$

Het verarmingsgebied kan dieper of minder diep worden, dus de stroomdoorgang van het kanaal kleiner of groter, omdat voor de diepte  $d$  geldt:

$$d^2 = \frac{2\epsilon}{\rho_o} U_n$$

**Afkniijpspanning** De vergelijking voor de diepte  $d$  van het verarmingsgebied kunnen we veel eenvoudiger formuleren met behulp van het begrip **afkniijpspanning**  $U_{af}$ : de waarde van de spanning  $U_n$  waarbij het verarmingsgebied het gehele kanaal opvult. Door invullen van de waarde  $d = h$ , de hoogte van het kanaal, vinden we dat de afkniijpspanning kwadratisch met de hoogte toeneemt:

$$\boxed{h^2 = \frac{2\epsilon}{\rho_o} U_{af}} \quad \boxed{U_{af} = \frac{\rho_o}{2\epsilon} h^2}$$

Kennelijk moet voor de diepte tov de hoogte gelden:

$$\boxed{\frac{d}{h} = \sqrt{\frac{U_n}{U_{af}}}}$$

Immers, het linkerlid en het rechterlid moeten tegelijk 1 worden. Het is nu duidelijk, dat de spanning  $U_n$  nooit zo hoog kan oplopen dat het kanaal wordt ‘afgeknepen’—doordat er dan geen geleidend kanaal zou overblijven—zodat altijd geldt:

$$U_n \leq U_{af}$$

Daaruit volgt voor de drainspanning tov de gate:

$$V_D - V_G = U_{DG} \leq U_{af} + U_c$$

- Opg 3.6.1 \*\*** Bereken de afkniijpspanning van een JFET van n-silicium met een dotatie van  $5 \cdot 10^{-5}$  en een hoogte van het geleidende kanaal van  $0,1 \mu\text{m}$  bij tweezijdig afknijpen. Bedenk eerst hoe groot  $h$  is bij het afknijpen van beide zijden tegelijk. [Antw.  $h = 0,05 \mu\text{m}$ ,  $U_{af} = 4,7\text{V}$ ]

**Stroomvoering** Wat gebeurt er in het kanaal als we de kanaalspanning verhogen:  $U_{DS} > 0$ ? De sourcespanning is niet veranderd, dus ook de stroomdoorgang daar niet. Maar de stroom  $I$  door het kanaal veroorzaakt een spanningstoename van source naar drain, waarbij de spanning  $U_n$  over het verarmingsgebied—en dus de diepte van het verarmingsgebied—zal toenemen. Bijgevolg neemt de stroomdoorgang af, en is het kleinst aan de drainzijde, waardoor de geleiding van het kanaal afneemt (zie fig. 3.24a). Met toenemende kanaalspanning zal de stroom toenemen zolang de kleinste stroomdoorgang positief is: zolang  $U_{DG} \leq U_{af} + U_c$ , of in termen van de kanaalspanning:

$$U_{DS} \leq U_{af} + U_c + U_{GS}$$

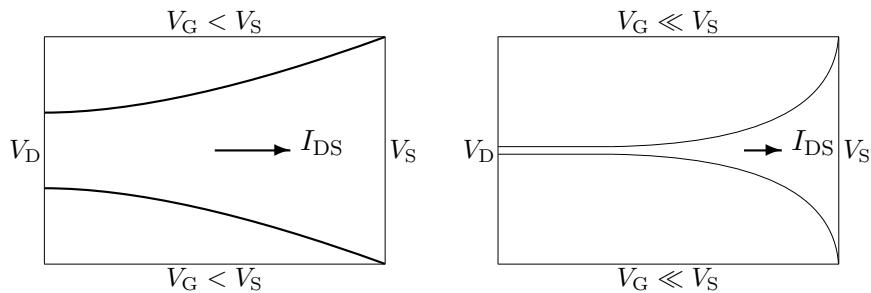
De kanaalspanning  $U_{DS}$  moet wel, bij een bepaalde stuurspanning  $U_{GS}$ , onder de **verzadigingsspanning**  $U_s$  blijven:

$$U_{s0} = U_{af} + U_c \quad U_s = U_{s0} + U_{GS}$$

De maximale waarde van de verzadigingsspanning  $U_{s0}$  wordt bereikt als de (negatieve) stuurspanning nul is geworden.

**Opg 3.6.2 \*\*** Een JFET is van n-silicium met een dotatie van  $5 \cdot 10^{-5}$ ; de hoogte van het geleidende kanaal is  $0,1 \mu\text{m}$ , de breedte 1 mm en de lengte 10 mm. Bereken de geleiding. [Antw.  $G = 0,52 \text{ mS}$ ]

**Verzadigingsstroom en verzadigingsspanning** Bij toenemende kanaalspanning  $U_{DS}$  is er een afnemende geleiding  $G$ , zodat de stroom naar



a Weinig negatieve gate  $V_G$ : bij de drain is de spanning nog ver onder de afknijpspanning, zodat een breed kanaal overblijft; het kanaal verbreed geleidelijk van D naar S.

b Negatieve  $V_G$  'boven' de afknijpspanning: de spanning is pas aan het eind van het smalle 'afknijpkanaal' onder de afknijpspanning gedaald, waarna het kanaal kan verbreden.

Figuur 3.24 Vorm van het stroomkanaal in een n-JFET bij verschillende negatieve gatespanningen  $V_G$ .

een maximum gaat: de FET verzadigt. De **stroomverzadiging** zal optreden als de kanaalspanning  $U_{DS}$  boven de verzadigingsspanning is:

$$U_{DS} \geq U_s \quad \text{stroomverzadiging}$$

De grootte van de *verzadigingsstroom*  $I_s$  wordt bepaald door de precieze waarde van de geleiding (bij de verzadigingsspanning). Door de ingewikkelde vorm van het geleidende kanaal (zie fig. 3.24b) is die niet zo eenvoudig te geven. Door rekening te houden met de invloed van de spanningsval in het kanaal op de stroomdoorgang,<sup>1</sup> kan men aantonen dat de geleiding, die bij een volledig open kanaal  $G$  is, terugloopt tot  $\frac{1}{4}G$ . Bij  $U_{GS} = 0$  heeft  $I_s$  de maximale waarde  $I_{s0}$ , bepaald door:

$$I_{s0} \approx \frac{1}{4}GU_{s0}$$

De grootte van de verzadigingsstroom wordt ‘gestuurd’ met de stuurspanning  $U_{GS}$ . Een ‘hogere’ stuurspanning (meer negatief!) geeft een kleinere verzadigingsstroom door de verminderde geleiding. De verzadigingspunten: (verzadigingsstroom, verzadigingsspanning), blijken op een parabool te liggen:

$$\frac{I_s}{I_{s0}} \approx \left( \frac{U_s}{U_{s0}} \right)^2$$

- Opg 3.6.3 \*\*** Neem aan dat van een n-JFET de afknijpspanning, vermindert met de contactspanning, 3,0 V is. De geleiding van het kanaal is maximaal  $1 \mu S$ .
- a Benader de maximale verzadigingsstroom. [Antw.  $I_{s0} = 0,75 \mu A$ ]
- b Benader de verzadigingsstroom bij een stuurspanning van  $-1,9 V$ . [Antw.  $I_s = 0,13 \mu A$ ]

**Afknijpkanaal** Wat gebeurt er nu als de kanaalspanning  $U_{DS}$  nog verder wordt verhoogd? Bij verzadigde stroom zal de toenemende potentiaal  $V_D$  het kanaal niet verder versmallen, maar het *afknijppunt* zal

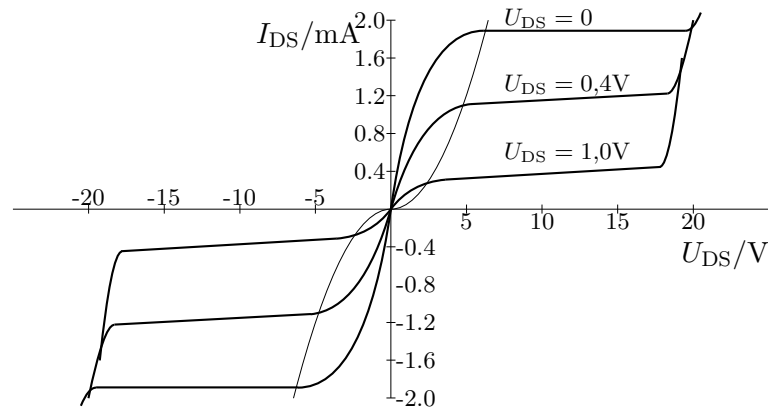
<sup>1</sup>De spanningstoename  $dV = IdR$  kan worden uitgedrukt in de  $U_n$ . Immers de deelweerstand  $dR$  is evenredig met de lengte  $dx$  en omgekeerd evenredig met de hoogte  $h - d$ , zodat  $dR/R = (dx/l)/((d - h)/h)$ . Met  $y = d/h$  en  $u = U_n/U_{af} = y^2$ , kan de vgl voor de spanningsval worden omgewerkt tot:

$$\frac{dx}{l} = \frac{GU_{af}}{I}(1 - y)(2ydy)$$

Deze DV kan worden opgelost door van 0 tot  $x$  te integreren:

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{3} \frac{GU_{af}}{I} (f - f_s)$$

met  $f = 3y^2 - 2y^3$  en  $f_s$  de waarde bij de source. Rond de verzadiging  $y = 1$ , of  $u = 1$ , wordt  $f$  benaderd door  $f \approx 1 - 3(1 - y)^2$ , of  $f \approx 1 - \frac{3}{4}(1 - u)^2$ . Merk op dat  $1 - u_s = U_s/U_{af}$ .



Figuur 3.25  $IU$ -karakteristiek van n-JFET: de verzadigingswaarde van de stroom neemt af met stijgende stuurspanning. Merk op, dat de verzadigingspunten van de kanaalspanning te vinden zijn op de ingetekende stippellijn: een kwadratische kromme.

van de drain naar de source schuiven (zie fig. 3.24b). Het gevolg is, dat vanaf de drain een gedeelte van het kanaal eenzelfde smalste doorgang zal hebben: het **afknijpkanaal** of '**pinched-off channel**', waarin de spanning tot de verzadigingswaarde kan dalen en waardoor de stroom min of meer constant blijft. Pas bij hoge kanaalspanning krijgen we de bekende doorslagverschijnselen waarmee het verarmingsgebied wordt afgebroken en de geleiding weer toeneemt.

**Stroom-spanning karakteristiek** In dezelfde parabolische benadering als tevoren, in de buurt van de verzadigde stroom  $I_s$ , geldt voor de niet-verzadigde stroom:

$$1 - \frac{I}{I_s} \approx \left(1 - \frac{U_{DS}}{U_s}\right)^2$$

Op grond van het bovenstaande komen we tot de  $IU$ -karakteristiek van figuur 3.25. Merk op dat de verzadigingsstroom afneemt met de stuurspanning  $-U_{GS}$ . In tegenstelling tot de stuurspanning, die negatief moet zijn, kan de kanaalspanning positieve en negatieve waarden hebben. In het laatste geval zijn 'S' en 'D' verwisseld van rol. Ook nu is weer de doorslag te zien bij te hoge kanaalspanning (waarom hangt de doorslagspanning af van de stuurspanning?)

**Opg 3.6.4** \* Een n-JFET heeft een afknijpspanning (inclusief contactspanning)  $U_{af} = 4V$ . De transistor is door de spanningen  $U_{GS} = -2V$  en  $U_{DS} = 3V$  ingesteld in het

- A ruimteladinggebied
- B lineaire gebied



- C verzadigingsgebied
- D doorslaggebied.

**Opg 3.6.5 \*** Men laat bij een n-JFET de gatespanning veranderen van  $-2$  naar  $-5$  Volt; de source is op  $0$  V. Dit kan tot gevolg hebben dat:

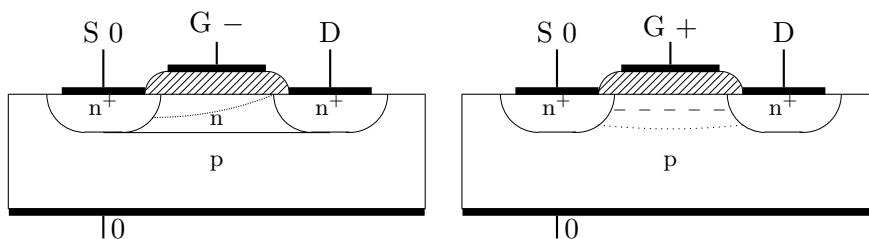
- A de verzadigingsstroom toeneemt.
- B het kanaal wordt dichtgeknepen aan de source-zijde
- C het kanaal wordt dichtgeknepen aan de drain-zijde

**Opg 3.6.6 \*\*** Bepaal uit de stroom-spanning karakteristiek hierboven ( $V_S = 0$ ) de waarde van de geleiding  $G$  op de volgende manieren:

- a uit de helling van de grafiek van de stroom in de buurt van de oorsprong bij stuurspanning  $0$  V. [Antw.  $G = 1,4$  mS.]
- b uit de maximale verzadigingsstroom bij de maximale verzadigingsspanning bij stuurspanning  $0$  V. [Antw.  $G = 1,5$  mS]
- c uit het differentiequotient van de *verandering* van de verzadigingsstroom als de stuurspanning van  $0$  naar  $-1,0$  V gaat. [Antw.  $G = 1,6$  mS]

### 3.6.3 MOSFET

**Opbouw MOSFET** Bij 'negatieve' stuurspanning  $U_{GS}$  (onder de 'drempelspanning') heeft het **verarmingstype MOSFET** met kanaal (fig. 3.26a) geheel dezelfde werking als de JFET. In beide gevallen ontstaat in de halfgeleiderlaag onder de gate een verarmingsgebied (verarmd aan geleidingselektronen!), dat een stroomkanaal overlaat en bij voldoende  $U_{DS}$  leidt tot afknijping en verzadiging. Ook hier dus een afknijpspanning enz. We bezien dus het **verrijkingstype MOSFET** zonder apart



a verarmingstype met versmald n-kanaal bij negatieve stuurspanning

b verrijkingstype met geleidingselektronen kanaal bij positieve of licht negatieve stuurspanning

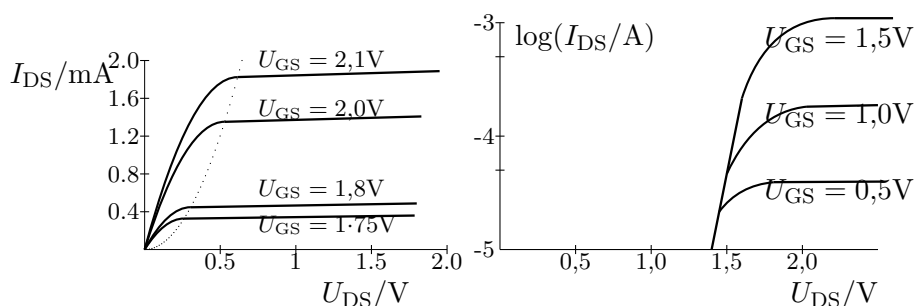
Figuur 3.26 n-MOSFET met p-substraat, in doorsnede. Let op de extra isolerende (siliciumoxyde-)laag onder de stuur-elektrode en het n-kanaal bij het verarmingstype.

kanaal. Daar fungeert een oxydelaag als elektrisch *isolerend* laagje tussen het kanaal en de stuur-elektrode. Ook hier is er een 'kanaal' tussen source en drain met aan de zijkant een gate-stuur-elektrode. De source-

en drain-elektroden worden uitgevoerd als extra verontreinigde  $n^+$  gebieden, die het kanaal van geleidingslektronen moeten voorzien. Praktisch wordt het n-stroomvoerende kanaal gevormd in het p-substraat.

**gatecapaciteit** Kenmerkend voor de MOSFET is de capacatieve werking die aan de gate ontstaat doordat de isolerende oxydelaag tussen stuur-elektrode en halfgeleider een hoge diëlektrische constante heeft, wat een hoge elektrische veldsterkte tot gevolg heeft. Weliswaar is deze laag niet geleidend, maar door het sterke veld zal een positieve gate een grote negatieve lading—in dit geval dus veel geleidingslektronen—in het n-kanaal kunnen ‘vasthouden’. Omgekeerd zal een negatieve gate veel elektronen kunnen afstoten en gaten aantrekken, zodat effectief een positieve lading aan de elektrode wordt ‘vastgehouden’. De capaciteit van de oxydelaag, de **gatecapaciteit**, bepaalt dus de lading. De precieze aantallen worden bepaald door de Boltzmannfactor: evenredig met  $\exp(-(-e)V/kT)$ .

**Inversiegebied** Het nieuwe aan het **verrijkingstype MOSFET** is, dat bij *positieve stuurspanning* tóch sturing mogelijk is omdat er direct onder de positieve stuur-elektrode een **verrijkinggebied** komt waarin *extra veel* negatieve geleidingslektronen worden aangetrokken. Het wordt daarom ook wel het **inversiegebied** genoemd (bekijk ook fig.3.26). De geleidingslektronen in het verrijkinggebied *verhogen* het aantal beweeglijke ladingsdragers en daarmee de geleidbaarheid tussen source en drain: het verrijkinggebied wordt het geleidende kanaal.



Figuur 3.27 n-MOSFET IU-karakteristiek. Let op de verzadiging van de stroom  $I_{DS}$ , bij positieve en negatieve stuurspanning  $U_{GS}$  en voldoende  $U_{DS}$  (drempelspanning 1,5V)

**Conclusie** Bij positieve, resp. negatieve, stuurspanning wordt in een n-MOSFET de stroom beïnvloed door vermeerdering, resp. vermindering, van het aantal ladingsdragers.

**Schakelaar-gedrag** Net zoals bij de bipolaire transistor kunnen we de MOSFET als *schakelaar* gebruiken. Stel dat de spanning tussen source en drain  $U_{DS}$  voldoende hoog is, zodat we een goed geleidend kanaal hebben. Door een hoge gate-potentiaal onderhouden we de ‘geleidende toestand’. Maken we de gate-potentiaal laag (dus:  $U_{GS} + U_c < 0$  of onder de drempelspanning  $U_d = -U_c$ ), dan zal de stroom sterk worden gedrukt, tot een zeer lage waarde. Die toestand kunnen we de ‘niet-geleidende’ toestand noemen. Schakelen bestaat uit het verhogen of verlagen van de gate. Merk op, dat dit schakelen even duurt, vanwege de hoge gatecapaciteit (grote RC-tijd). Daar staat tegenover dat de gate verder geen stroom trekt: het kost geen energie om de ‘schakelaar’ in zijn uit-stand te houden.

**Opg 3.6.7** \* De JFET en de MOSFET verschillen *principieel* in de gebruikte:

- A drain-elektrode
- B gate-elektrode
- C halfgeleider
- D source-elektrode

**Opg 3.6.8** \* De JFET en de MOSFET komen *principieel* overeen op het volgende punt:

- A Ze werken allebei alleen in n-materiaal
- B Ze werken zowel bij positieve als negatieve spanning tussen gate en source
- C Bij allebei kan de stroom gestuurd worden d.m.v. de stuurspanning
- D Bij allebei is een verarmingsgebied noodzakelijk voor een goede werking

**Opg 3.6.9** \*\*\* Op basis van *elektron-emissie* kan men verklaren:

- A De temperatuurafhankelijkheid van de halfgeleiderdiode
- B De temperatuurafhankelijkheid van de JFET
- C De grootte van de verzadigingsstroom van de MOSFET
- D De hoogte van het afknijpkanaal in de MOSFET

### 3.7 Bipolaire-transistor

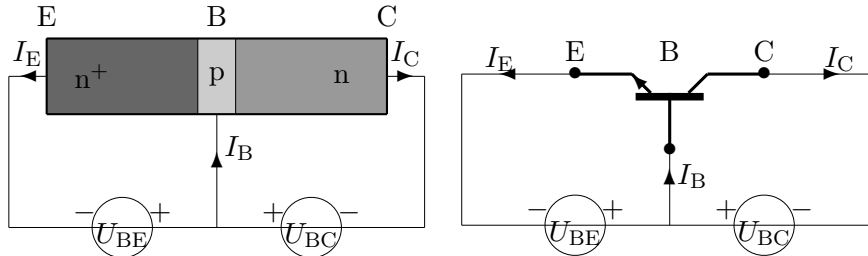
**Ontwikkeling bipolaire transistor** Last, but not least, de bipolaire transistor, beter bekend onder de gewone naam ‘transistor’. Voortbordurend op het idee van de pn-diode, werd in 1950 de eerste pnp-transistor—de vaste stof uitvoering van de triode—door Shockley ontwikkeld (feitelijk was het prototype een ‘*puntcontact-transistor*’). Analooq is de npn-transistor, die tegenwoordig meer wordt gebruikt, ontwikkeld, die op vergelijkbare wijze werkt. De *bipolaire-transistor*, de transistor ‘met twee polariteiten’, dankt zijn naam aan het feit dat voor de werking van de transistor *beide polariteiten* van ladingsdragers nodig zijn, d.w.z. èn geleidingslektronen èn gaten. Dat in tegenstelling tot de unipolaire transistor, zoals de FET, die al met één ladingstype kan werken.

**Basisprincipe** De uitstoot van lektronen bij een geleider wordt vergroot door die er met een *elektrisch veld* ‘uit te trekken’. Die **uitwendige veldemissie** veroorzaakt door de anodespanning ligt ten grondslag aan de werking van de (buis)triode (de Forest, 1906). Daarbij worden de door thermische emissie aan het kathodeoppervlak gekomen lektronen daar weggetrokken. Er zijn echter twee soorten emissie:

1. uitwendige lektronemissie: van kristal naar vacuüm;
2. inwendige lektronemissie: binnen het kristal;

De *bipolaire-transistor* werkt met **inwendige veldemissie**, in de ‘basis’ veroorzaakt door de collectorspanning. Daarbij worden de door inwendige veld-emissie vanuit de ‘emitter’ in de basis gekomen lektronen daar weggetrokken. Er zijn twee vergelijkbare uitvoeringen: de ‘**nnp-transistor**’ en de ‘*pnp-transistor*’. Hier behandelen we de npn-uitvoering; door ‘teknomkering’, het verwisselen van gaten en geleidingslektronen, en van hoge en lage spanningen, kan de pnp-transistor analoog worden begrepen.

**Opbouw npn-transistor** De *lektronenstroom* in een transistor loopt normaal, zoals aangeduid is in figuur 3.28 van de **emitter**, ‘uitzender’, door de **basis** naar de **collector**, ‘ontvanger’. De emitter bestaat uit een n-type geleidend gebied, evenals de collector; tussen beide n-gebieden is de basis die bestaat uit een dunne p-type laag. Omdat voor de stroomgeleiding èn geleidingslektronen (n) èn gaten (p) een rol spelen, noemt men dit een **bipolaire-transistor**; dit treedt in het bijzonder tegelijkertijd op in de basis, zoals we later zullen zien. De basis is zèer dun uitgevoerd, en *weinig gedoteerd* ( $p^-$ ) met verontreinigingen; de reden daarvoor zal nog worden gegeven. De emitter daarentegen wordt *extra gedoteerd* ( $n^+$ ), zodat een *hoge doorlaatstroom* wordt verkregen vanuit de emitter: dat verklaart de naam van dat gebied.



a Opbouw en tekenafspraken: v.l.n.r. b Symbool voor een npn-transistor; let door de transistor gaande hebben we op de emissie pijl van de basis af. een emitter, basis en collector.

Figuur 3.28 De npn-transistor.

**Tekenafspraken** Om consistent te zijn met de teken afspraken bij de diode, zullen we bij de *npn-transistor* uitgaan van de *twee dioden* die er in zijn ‘verwerkt’. Allereerst vormt de kring met basis en emitter, in die volgorde, een pn-diode: ‘*basis-emitter-diode*’. De daarbij horende *positieve spanning- en stroomrichting is door de basis naar de emitter*. De basisstroom gaat dus positief de basis in, en komt positief de emitter uit. Analoog bevat de kring met basis en collector, in die volgorde, een pn-diode: ‘*basis-collector-diode*’. Ook daar gaat de basisstroom positief de basis in, en komt positief de collector uit. Met de zojuist gegeven tekenafpraak zijn de contactspanningen  $U_{cE}$ , resp.  $U_{cC}$ , van de ‘basis-emitter-diode’, resp. ‘basis-collector-diode’, *negatief*. In de geleidende toestand van de npn-transistor worden de basisstroom en emitterstroom beide negatief, terwijl de collectorstroom dan negatief is. Kijken we echter naar de richting van de deeltjes, dan keren de tekens van de emitter en collector om—het zijn namelijk n-type, dus geleidingselektron geleiders.

**Geleidende-toestand** De transistor is geleidend als de ‘basis-emitter-diode’ geleidend is, en de ‘basis-collector-diode’ niet-geleidend; dat is als enerzijds  $U_{BE} + U_{cE} \geq 0$  en anderzijds  $U_{BC} + U_{cC} < 0$ . In de **geleidende toestand** is de basisspanning  $V_B$  tussen de emitterspanning en collectorspanning:

$$\boxed{V_E - U_{cE} \leq V_B < V_C - U_{cC} \quad \text{npn-transistor geleidend}}$$

De doorlaatstroom is de ‘basis-emitter’ diodestroom. De diodestroom behandelden we in paragraaf 3.5.4; in het bijzonder is  $I_E$  evenredig met de dotatie van de emitter. De *elektronen* doorlaatstroom komt vanuit de emitter in de basis. De basis echter is zo dun, dat bijna *ieder* elektron door de basis kan dringen: wordt **geïnjecteerd** in het verarmingsgebied

van de ‘basis-collector’ overgang. De dikte van de basis moet daartoe vergelijkbaar zijn met de diepte van het verarmingsgebied in de basis. Door de lage dotering van de basis, vergeleken met die in de collector, is het verarmingsgebied praktisch alleen in de basis.

**Veldemissie van basis naar collector** In het verarmingsgebied van de ‘basis-collector’ gekomen voelt het elektron het sterke elektrische veld, dat de geleidingselektronen *vanuit de collector* moet tegenhouden. Maar datzelfde veld zal de geleidingselektronen, vanuit de emitter, via de basis, in het verarmingsgebied doorgedrongen, naar de collector wegwerken: dat is de *‘inwendige’ veldemissie*. De doorlaatstroom van emitter naar basis wordt daardoor emissie-stroom van basis naar collector. Slechts een klein deel, de **recombinatiefactor**  $\beta_r$  geheten, van de emitterstroom  $I_E$  zal ‘afvloeien’, als gatenstroom, naar de basisaansluiting:

$$I_B = \beta_r I_E$$

Dat deel bestaat namelijk uit die geleidingselektronen die in de ‘basis’, op weg naar het verarmingsgebied, ‘in een gat vallen’: recombinatie met een gat. Dat verdwenen gat zal via ‘gewone’ *gatenstroom* weer worden aangevuld vanuit de basisaansluiting. In de geleidende toestand zal de basisstroom evenredig zijn met het aantal gaten dat een geleidings-elektron tegenkomt, dus met de acceptordotatie, en met de dikte van de basis.

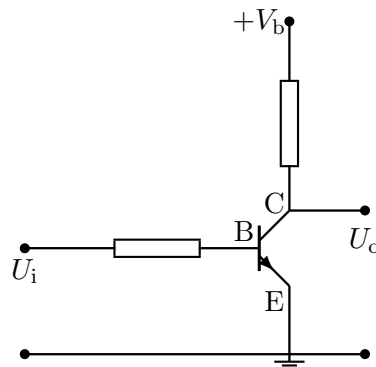
**Niet-geleidende toestand** We hebben gezien, dat de emitterstroom praktisch doorstroomt naar de collector zolang de ‘basis-emitter-diode’ in doorlaat is. Zodra de basisspanning te laag wordt, staat de ‘emitter-basis’ overgang in sper. Dus is de transistor in de **niet-geleidende toestand** als:

$$\boxed{V_B < V_E - U_{cE} < V_C - U_{cC} \quad \text{npn-transistor niet-geleidend}}$$

Dat is goed te zien in de figuren 3.30a en b. De *sperstroom* is praktisch een gatenstroom, dóór de basis naar de emitter, die nauwelijks tot de collector doordringt. Het overgaan van ‘geleidend’ naar ‘niet-geleidend’, of andersom, heet *schakelen*. De *schakelaar*-eigenschap ligt ten grondslag aan de—in logische schakelingen veel gebruikte—*‘flip-flop’* of *‘inverter’*; het ‘inverteren’ betreft het ‘verwisselen’ van hoge en lage spanning.

**Transistor als spannings-schakelaar**

We kunnen de transistor gebruiken als *schakelaar*. Om deze schakel eigenschap te kunnen verkrijgen wordt een npn-transistor als volgt gebruikt. De emitter wordt op aarde gezet, en de collector via een weerstand, aan een positieve bronspanning van bijvoorbeeld 10 V; de bronspanning zal daardoor verdeeld worden tussen weerstand en transistor. Dit is de **gemeenschappelijke emitterschakeling**. De basisspanning wordt gestuurd (via een weerstand) door de ingangsspanning aan de basis; de uitgangsspanning is de collectorspanning.



Figuur 3.29 npn-transistor schakeling voor het inverteren van 'hoog' en 'laag'; de ingang is aan basis en de uitgang aan collector, terwijl de emitter gemeenschappelijk is

Een lage ingangsspanning (basis) leidt tot een niet geleidende toestand, waarbij de bronspanning praktisch over het verarmingsgebied (*hoge weerstand*) komt te staan. Daardoor wordt de uitgangsspanning (collector) hoog, gelijk aan de bronspanning. Omgekeerd leidt een hoge ingangsspanning (basis) tot een geleidende toestand, waarbij er geen verarmingsgebied meer is (*lage weerstand*). Daardoor gaat door de weerstand stroom vloeien. Door de spanningsval over de weerstand daalt de collectorspanning, zodat de uitgang laag wordt.

**Conclusie** *de transistor kan schakelen met de basisspanning:*

- *Bij lage basisspanning geleidt de transistor niét (uit), en is de collectorspanning hoog;*
- *bij hoge basisspanning geleidt de transistor wél (aan), en is de collectorspanning laag;*

**Stroomversterking** De transistor kan ook versterken. Bij de **gemeenschappelijke basisschakeling** wordt de emitterstroom  $I_E$  als ingang gebruikt, en de collectorstroom  $I_C$  als uitgang. De **stroomversterking**  $\alpha$  is de verhouding tussen uitgang en ingang (bijna 1):

$$-I_C = \alpha I_E$$

In fig. 3.30a is de transistorkarakteristiek te zien van de gemeenschappelijke basisschakeling:  $I_C$  als functie van de 'collector-basis' spanning  $U_{CB}$ . Het toont het praktisch gelijk zijn van  $-I_C$  en  $I_E$ .

Bij de *gemeenschappelijke emitterschakeling* wordt de basisstroom  $I_B$  als ingang wordt gebruikt, en de collectorstroom  $I_C$  als uitgang. De

stroomversterking  $\alpha'$  is de grote, en bijna constante, verhouding tussen uitgang en ingang bij een bepaalde instelling  $U_{EC}$ :

$$-I_C = \alpha' I_B$$

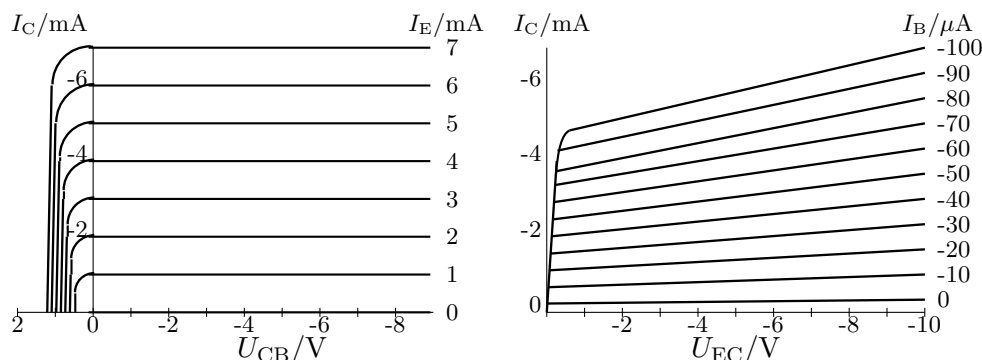
In fig. 3.30b is de transistorkarakteristiek te zien van de gemeenschappelijke emitterschakeling:  $I_C$  als functie van de 'emitter-collector' spanning  $U_{EC}$ . Het toont het praktisch constant zijn van  $I_C$ .

Gebruikmakend van de wet van Kirchhoff is  $-I_C = I_E - I_B$ . Dus kunnen stroomversterkingen  $\alpha$  en  $\alpha'$  worden uitgedrukt in de recombinatiefactor:

$$\alpha = 1 - \beta_r \quad \alpha' = \frac{1}{\beta_r} - 1 \quad \alpha' = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

- Opg 3.7.1** \* Voor de goede werking van een pnp transistor wordt één van de lagen zo smal mogelijk uitgevoerd; dat betreft:
- A de basis
  - B de emitter
  - C de collector
  - D geen van de lagen wordt smal uitgevoerd
- Opg 3.7.2** \* Het sturen van de stroom in een transistor gaat door het beïnvloeden van
1. het aantal beweeglijke ladingsdragers bij de MOSFET;
  2. de snelheid van de beweeglijke ladingsdragers bij de bipolaire transistor.
- A beide waar    B alleen I waar    C alleen II waar    D beide onwaar
- Opg 3.7.3** \*\* Van de stroom door de basis emitter overgang van een bipolaire transistor gaat slechts 1% door recombinatie via de basis. Hoe groot is dan de stroomversterking:  
| collectorstroom/basisstroom |?
- A 0,99
  - B 1,00
  - C 99
  - D 100
- Opg 3.7.4** \*\* Een npn-transistor, met contactspanningen  $U_{cE} = -0,6\text{V}$  en  $U_{cC} \approx 0\text{V}$ , heeft de volgende instelwaarden:  
 $V_E = 1,0\text{V}$ ,  $V_B = 1,6\text{V}$  en  $V_C = 2,2\text{V}$ .
- A de transistor is in de geleidende toestand.
  - B de transistor is in de niet-geleidende toestand.
  - C de transistor komt in de geleidende toestand als  $V_E = 3,1\text{V}$ .
  - D de contactspanningen behoren positief te zijn





a Gemeenschappelijke basisschakeling: collectorstroom  $I_C$  tegen collectorbasis spanning  $U_{CB}$  bij verschillende emitterstromen  $I_E$ . Merk op dat  $-I_C$  praktisch gelijk is aan  $I_E$ .

b Gemeenschappelijke emitterschakeling: collectorstroom  $I_C$  tegen emitter-collector spanning  $U_{EC}$  bij verschillende basisstromen. Merk op dat de verschillende  $I_C$ -lijnen uit één punt van de  $U_{EC}$ -as lijken te komen.

Figuur 3.30 Transistorkarakteristieken van een npn-transistor.

**Transistorkarakteristiek** De emitterstroom wordt bepaald door de spanning in de ‘basis-emitter’ kring, en is praktisch ongevoelig voor de spanning in de ‘basis-collector’ kring. Anders gezegd: de *emissiestroom* wordt ongeacht de collectorspanning naar de collector gewerkt *zolang het ‘basis-emitter’ contact maar in doorlaat staat*. De recombinatiefactor die de *stroomversterking* bepaalt is een constructieconstante, met een zéér grote waarde.

Bij hoge frequentie zal de hoge waarde van de dragerlevensduur in de basis een belemmering vormen voor de momentane werking. De laatste geïnjecteerde elektronen in de basis vormen tezamen een **ladingoverschot**  $\Delta Q$  van minderheidsladingen, de zogenaamde *diffusielading*. Deze elektronen kunnen niet snel genoeg recombineren, waardoor een faseverschuiving in het signaal ontstaat. Modelmatig kan dat worden beschreven door te veronderstellen dat het ladingoverschot aanleiding is tot een extra stroomterm:  $\Delta I = \Delta Q / \tau_T$ .

**Recombinatiefactor** We zullen iets nader ingaan op de *recombinatiefactor*. Deze factor wordt bepaald door het evenwicht tussen *recombinatie* (van geleidingselektron en gat) en *diffusie* (van het gat).<sup>2</sup> Het

<sup>2</sup>Het recombinatieproces wordt bepaald door de vergelijking:

$$n - \bar{n} \approx (\bar{n} + \bar{p})e^{-t/\tau_T}$$

en het diffusieproces door de vergelijkingen:

$$J = -D_n \frac{d\rho_n}{dx} \quad \frac{dJ}{dx} = -\frac{d\rho_n}{dt}$$

evenwicht wordt bepaald door de *diffusielengte*  $L$  (zie pag.116:

$$L^2 = D_n \tau_r$$

Inderdaad geldt voor de eenheden van het rechterlid:  $\text{m}^2/\text{s} \cdot \text{s} = \text{m}^2$ . Het verloop van de stroom wordt bepaald door de diffusielengte:

$$I \sim \cosh((b-x)/L) \approx 1 + \frac{1}{2}((b-x)/L)^2$$

De recombinatiefactor  $\beta_r$  is per definitie de verhouding tussen de ‘verdwenen’ stroom,  $I(0) - I(b)$ , en de oorspronkelijke  $I(0)$ . Daaruit volgt de recombinatiefactor:

$$\beta_r \approx \frac{1}{2}(b/L)^2$$

mits  $b/L \ll 1$ , m.a.w. als de diffusielengte  $L$  groot is vergeleken met de basisbreedte  $b$ . Merk op, dat de basisbreedte feitelijk afhangt van de diepte van het verarmingsgebied aan de collectorkant. Met toenemende collectorspanning  $V_C$  zal de diepte toenemen, dus de feitelijke basisbreedte afnemen. Daardoor zal de recombinatiefactor  $\beta_r$  afnemen en de stroomversterking  $\alpha'$  toenemen, zoals uit de karakteristiek van de gemeenschappelijke emitterschakeling (fig.3.30b) is af te leiden.

- Opg 3.7.5 \*\*** Van een npn-transistor staat de basis-emitter in doorlaat en de basis-collector in sper met een sperspanning van 5 V. De verarmingslaag is dan  $2 \mu\text{m}$  dik. *E?* Hoeveel seconden hebben de elektronen nodig om door de verarmingslaag heen de collector te bereiken? [Antw.  $t = 3 \text{ ps}$ ]
- Opg 3.7.6 \*\*** Een npn-transistor heeft een basis met een breedte van  $10 \mu\text{m}$ . In die basis is de diffusielengte  $0,1 \text{ mm}$ . Bepaal de verhouding tussen emitterstroom  $I_E$  en basisstroom  $I_B$  in de geleidende toestand. [Antw.  $I_E/I_B = 200$ ]
- Opg 3.7.7 \*\*\*** Een npn-transistor is in de geleidende toestand. De kans voor uit de emitter in de basis geschoten elektronen om over te steken naar de collector, dus niet te recombineren met gaten, is 99%. Vanuit de basis stromen gaten om de gerecombineerde gaten aan te vullen. De rest van de basisstroom bestaat uit gaten die het basis-emittercontact oversteken (gaten-doorlaatstroom). De verhouding tussen het aantal gaten dat de emitter oversteekt en het aantal elektronen dat de emitter oversteekt (per tijdseenheid) is 1 op 150. Bepaal de verhouding tussen emitterstroom  $I_E$  en basisstroom  $I_B$ . [Antw.  $I_E/I_B = 61$ ]

---

met  $\rho_n = -en$ . Op grond van deze drie vergelijking wordt de oplossing voor  $n$ :

$$(n - \bar{n}) \sim \sinh((b-x)/L)$$

De stroom volgt via:  $J \sim dn/dx$ .

**MEERKEUZEANTWOORDEN****Hoofdstuk 3 Kristalrand en elektron****3.2 Uittree-energie en voltapotentiaal**

3.2.3 D eigenlijk bij temperatuur 0 K

3.2.6 C

**3.3 Contactspanning**

3.3.3 B  $U_{\text{CuPb}} = \phi_{\text{Pb}} - \phi_{\text{Cu}}$

3.3.4 A

3.3.6 C elektronen lopen van zwaar naar licht gedoteerdgebied

3.3.7 B klein, omdat  $U_{\text{pn}}$  negatief is

3.3.8 C alleen doteringsverhouding is van belang; spanning negatief

**3.4 Verarmingsgebied-model**

3.4.3 A bij p altijd negatief

3.4.4 B

**3.5 Dioden**

3.5.2 C

3.5.8 D  $U \approx d \approx 1/\rho$

3.5.9 D *niet* als  $d^2$ , vanwege de  $\rho$ , *wel* als  $d$

3.5.10 C

3.5.11 D

3.5.12 B

**3.6 Veldeffect-transistor**

3.6.4 C

3.6.5 C

3.6.7 B

3.6.8 C bij MOSFET ook verrijkingsgebied

3.6.9 A Bij de JFET verandert de beweeglijkheid met  $T$

**3.7 Bipolaire-transistor**

3.7.1 A

3.7.2 B

3.7.3 C

3.7.4 A



André Marie  
Ampère  
(1775–1836)

*Alhoewel Ampère leefde in een politiek veelbewogen tijd, de tijd van de franse revolutie, ging zijn belangstelling uit naar onderwerpen als wiskunde, natuurkunde, filosofie, literatuur en muziek. Zo ontdekte hij in 1814 de ‘wet van Avogadro’—alle gassen hebben hetzelfde aantal moleculen per volumeenheid—welke echter, helaas voor hem, een jaar eerder door Avogadro was ontdekt. Hij werd op 25 jarige leeftijd leraar, eerst voor natuurkunde, later voor wiskunde en in 1809 hoogleraar mechanica aan de École Polytechnique te Parijs. Tijdens het bestuderen van de wisselwerking tussen elektrische en magnetische stromen ontdekte hij in de periode 1820–1826 de ‘wet van Ampère’, de wet die het verband aangeeft tussen een elektrische stroom door een geleider en het magneetveld dat om de geleider draait. Dat*

*werd de aanzet tot de elektro-mechanica, verder ontwikkeld door Kirchhoff (1848, dus 20 jaar later) en nog weer verder door Maxwell (1873, dus 45 jaar later). Ondanks zijn filosofische inslag kon hij heel praktisch zijn. Zo formuleerde hij wat nu de ‘regel van Ampère’ heet, om de richting aan te geven die een magneetnaald krijgt van een rechte stroomgeleider (dus de richting van het magneetveld dat door een stroom wordt opgewekt): “Plaats de rechterhand zo, dat de palm naar de magneet wijst en de stroom van de pols naar de vingers loopt. Dan draait de noordpool van de magneet in de richting van de gestrekte duim.” Voor zijn fundamentele bijdragen tot de elektromechanica is Ampère geëerd: de eenheid van stroomsterkte is naar hem genoemd (toentertijd waren er geen Nobelprijzen).*

## Hoofdstuk 4

# POLARISATIE EN MAGNETISATIE

### DOELSTELLINGEN

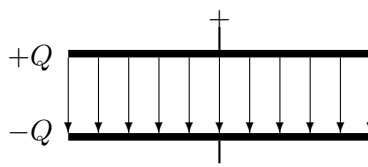
Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de volgende begrippen en verbanden zodanig hebben verwerkt, dat u die kan toepassen op eigenschappen van condensatoren, spoelen, transformatoren of vergelijkbare componenten.

- condensator: elektrische lading en elektrisch veld, capaciteit;
- elektrische lading en flux: wet van Gauss;
- permittiviteit, diëlektrische constante, elektrische gevoeligheid;
- elektrische veldenergie in condensator;
- tijdconstante van RC-kring;
- polarisatie, elektronen- en ionenpolarisatie, elektrisch dipoolmoment;
- oppervlaktelading en polarisatie;
- ferroelektrische en paraelektrische toestand;
- Curietemperatuur, polarisatie domeinen, hysteresis;
- spoel: elektrische stroom en magneetveld, zelfinductie;
- wet van Ampère: magnetische spanning, ampèrewikkelingen;
- (relatieve) magnetische permeabiliteit, magnetische gevoeligheid;
- magnetische veldenergie in spoel en bij ferromagneten;
- inductiespanning, in een spoel;
- tijdconstante van LR-kring;
- magnetische kring: magnetische veldkracht, magnetische weerstand;
- magnetisatie en magnetisch dipoolmoment: elektron(baan)spin;
- oppervlaktestroom en magnetisatie;
- ferromagnetische, paramagnetische en diamagnetische toestand;
- Curietemperatuur, magnetisatie domeinen, hysteresis;
- energieverlies bij hysteresis, oppervlak BH-kromme;

## 4.1 Condensator

**Inleiding** Er zijn meerdere soorten **condensatoren**, maar alle hebben ze gemeen dat ze de *capaciteit* hebben om lading vast te houden. Zoals we reeds eerder zagen betekent dat tegelijkertijd dat de condensatoren alle elektrisch veld vasthouden. Praktisch zit de lading op geleidende platen en het elektrische veld in de ruimte ertussenin.

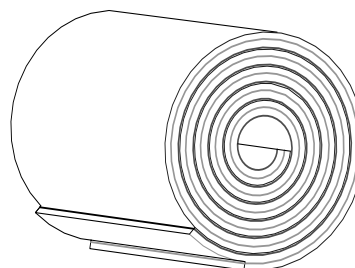
In figuur 4.2 is een schets gegeven van een plaatcondensator in de vorm van vlakke platen, en nog een in opgerolde vorm.



Figuur 4.1 Principe schakeling van een vlakke platen condensator; we nemen aan dat de tegengestelde ladingen aan de binnenkant van de platen zit, zodat er geen lekveld naar buiten ontsnapt.



a Een vlakke-plaatcondensator; aan weerszijden van een isolerende, diëlektrische, vlakke plaat zijn geleidende, metalen, folies aangebracht.



b Een opgerolde condensator; een plaatcondensator (als hiernaast, met extra diëlektrische isolatielaag) van flexibel materiaal gemaakt, is opgerold tot een compact geheel.

Figuur 4.2 Twee uitvoeringen van een plaatcondensator.

**Spanning over condensator** We nemen een ‘stuk’ *diëlektricum* (*niet* geleidende stof zoals ‘niets’, lucht, mica, PVC, in olie gedrenkt papier enz.) met lengte  $l$  en oppervlakte doorsnede  $A$ . In dit geval zullen we de lengte zeer kort houden (vergeleken waarmee?) om een homogeen veld te krijgen. Het diëlektricum zetten we tussen twee (geleidende) elektroden die we verbinden met een (ideale) spanningsbron  $U$ . Hierdoor komt een *elektrische spanning*  $U$  over het diëlektricum te staan. Er gaat een stroom van elektrische lading lopen van de elektrode 2 via de spanningsbron naar elektrode 1 tot er evenwicht ontstaat. Dan is

elektrode 1 geladen met elektrische **lading**  $+Q$  (eenheid Coulomb = C), elektrode 2 geladen met elektrische lading  $-Q$ . Tussen de elektroden loopt een elektrisch veld met *elektrische flux*  $\Psi$  (eenheid C) en de elektrische fluxdichtheid  $D$  (eenheid C/m<sup>2</sup>):

$$D = \Psi/A$$

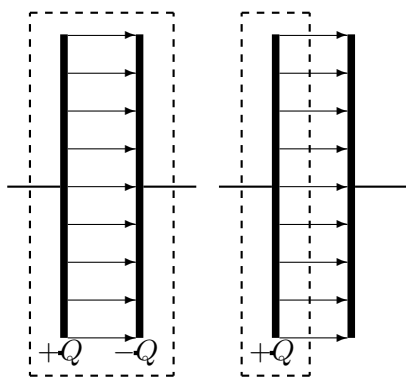
De elektrische fluxdichtheid  $D$  heet **diëlektrische verschuiving** (vandaar die  $D$ ). Tengevolge van de spanning  $U$  is er een elektrische veldsterkte  $E$  in het diëlektricum waarvoor geldt:

$$U = \int_1^2 \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

In dit geval is het veld homogeen en gaan de veldlijnen direct van plaat tot plaat. Voor de spanning over de platen en de veldsterkte tussen de platen van de ideale condensator geldt:

$$U = El$$

### Wet van Gauss



Figuur 4.3 Schematisch overzicht van de toepassing van de wet van Gauss op het veld uit de elektroden van een vlakkeplaten condensator. Het eerste volume omsluit de gehele condensator, waar geen veld uit komt, dus moeten de ladingen op de platen tegengesteld zijn. Daarnaast omsluit het volume alleen de linker plaat; het blijkt dat er flux uit komt, omdat er lading in is.

Er zijn nu twee wetten die ons het precieze verband tussen de verschillende grootheden als lading, spanning en veld kunnen geven. Allereerst zegt de **wet van Gauss** dat voor ieder deel van de ruimte ('volume') de *elektrische flux* die eruit gaat gelijk is aan de *lading* die erin is; anders gezegd: de positieve lading produceert flux, die als veldlijnen door de ruimte loopt, en wordt verzwolven door negatieve lading.

$$\Psi_{\text{uit}} = Q_{\text{in}}$$

We passen de wet toe op een volume dat de hele elektrode 1 omsluit en een deel van de tussenruimte. Daarvoor is de uitgaande flux gelijk aan 'de' flux in het diëlektricum:  $\Psi_{\text{uit}} = \Psi$ .

Verder is de lading in het volume gelijk is aan de lading op de elektrode 1:  $Q_{\text{in}} = Q$ . Op grond van de *wet van Gauss* moet dus de *elektrische flux* gelijk zijn aan de lading op de elektrode 1:

$$\Psi = Q$$

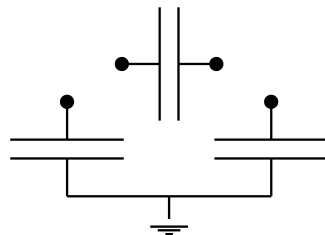
Daaruit zien we dat er kennelijk van iedere lading in elektrode 1 een elektrische fluxlijn loopt naar precies een even grote tegenovergestelde lading op elektrode 2. De flux loopt van  $+Q$  naar  $-Q$  (vergelijk bij de weerstand: de stroom  $I$  loopt van  $+U$  naar  $-U$ ). Omdat de *diëlektrische verschuiving*  $D$  de flux per vierkante meter is, kan ze in lading worden uitgedrukt:

$$D = Q/A$$

**Opg 4.1.1 \*** De wet van Gauss  $\Psi_{\text{uit}} = Q_{\text{in}}$

- A is slechts geldig als er sprake is van een, door een symmetrisch oppervlak rond een lading  $Q$ , gaande elektrische flux
- B is slechts geldig als er sprake is van een, door een symmetrisch oppervlak rond een puntlading  $Q$ , gaande elektrische flux
- C is algemeen geldig, als er sprake is van een, door een willekeurig oppervlak rond een netto lading  $Q$ , gaande elektrische flux
- D is algemeen geldig, ook als er geen sprake is van een netto elektrische flux door het oppervlak

**Opg 4.1.2 \*\*\***

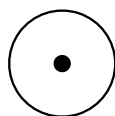


Gegeven 2 identieke vlakkeplaatcondensatoren, die geaard zijn als geschetst. Ze bevatten elk een lading van  $1 \text{ nC}$ . De plaatafstand is  $2 \text{ mm}$  en het plaatoppervlak is  $12 \text{ cm}^2$ . Men plaatst nu tussen de niet-geaarde platen van de twee condensatoren een derde, ongeladen condensator, die verder identiek is met de beide andere.

De lading op de derde condensator wordt:

- A  $\frac{2}{3} \text{ nC}$
- B  $1 \text{ nC}$
- C  $0 \text{ nC}$

**Opg 4.1.3 \*\*\***



Het veld van een bolcondensator, met straal  $a$ , wordt afgeschermd door een geleidende bolvormige plaat, concentrisch met straal  $b$ . De condensator heeft en lading  $Q$ . Hoeveel lading moet de afschermplaat hebben om het elektrische veld van de bol volledig af te schermen?

[Antw.  $Q_{\text{plaat}} = -Q$ ]



**Het diëlektrische materiaal** Er is een tweede wet die een verband tussen de elektrische flux en de spanning kan geven. Experimenteel hebben de meeste diëlektrische materialen ('diëlektrica') een *evenredig verband* tussen de fluxdichtheid  $D$  en de veldsterkte  $E$  met een evenredigheidsconstante genaamd de **permittiviteit**  $\epsilon$ :

$$D = \epsilon E$$

Ze is afhankelijk van allerlei omstandigheden, zoals het soort materiaal, temperatuur en frequentie. De eenheid van  $\epsilon$  is  $(\text{C}/\text{m}^2)/(\text{V}/\text{m}) = (\text{C}/\text{V})/\text{m} = \text{F}/\text{m}$  (Farad per meter). Ook in *vacuum* kan een veld lopen, heeft dus permittiviteit (van 'permittere', latijn, 'laten lopen'), die  $\epsilon_0$  wordt genoteerd; voor  $\epsilon_0$  geldt de bijzondere eigenschap (door Maxwell afgeleid):

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2 = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m/F}$$

$\epsilon_0$  is frequentie en temperatuur onafhankelijk—dus een constante in de ware zin van het woord. Voor het kunnen vergelijken van verschillende materialen voor wat betreft hun  $\epsilon$  waarden is het handig om de permittiviteit  $\epsilon$  uit te drukken in de *permittiviteit van vacuüm*  $\epsilon_0$ . De verhouding van de permittiviteit met de permittiviteit van vacuüm is de *relatieve permittiviteit*, of, **diëlektrische constante**  $\epsilon_r$  (zie tabel 4.1):

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$$

**Capaciteit** De lading op de condensatorplaat bleek evenredig met de elektrische flux in de condensator. De fluxdichtheid zelf bleek evenredig met de veldsterkte, en de veldsterkte is evenredig met de spanning tussen de platen. Daaruit zien we dat er ook een evenredigheid is tussen de **spanningsval**  $U_C$  over de condensator en de lading  $Q$  op de platen van de condensator. De evenredigheidsconstante wordt de **capaciteit** van de condensator  $C$  genoemd:

$$Q = CU_C \quad \text{of} \quad U_C = \frac{1}{C}Q$$

De eenheid van capaciteit is de Farad, genoteerd F, naar de engelse natuurkundige Faraday uit de 19<sup>e</sup> eeuw. Uit de definitie volgt:  $F = \text{C}/\text{V} = \text{As}/\text{V} = \text{s}/\Omega = \text{Ss}$ . Dat die evenredigheidsconstante er moet zijn volgt ook rechtstreeks uit het superpositie-beginsel voor ladingen en spanningen! Dat wil zeggen dat we ook voor ingewikkelde condensatoren een passende capaciteit kunnen bepalen die afhangt van de constructie.

<i>materiaal</i>	<i>diëlektrische constante <math>\epsilon_r</math></i>		
	$f = 0$	$f = 1 \text{ kHz}$	$f = 1 \text{ MHz}$
vacuum	1	1	1
lucht	1,0006	1,006	
water	80		
olie	3		
siliconglas	3,8		
mica	5		
polystyreen	2,5	2,5	2,6
plexiglas	3,1	3,1	2,8
PVC	4,6	4,6	3,3
nylon66	4,6	3,8	3,3
porselein			6 – 10
bariumtitanaat			12000

Tabel 4.1 Diëlektrische constante  $\epsilon_r$  voor verschillende stoffen en frequenties, bij kamertemperatuur en normale druk; merk op dat voor sommige stoffen  $\epsilon_r$  afneemt bij toenemende frequentie

**Ideale condensator** In het geval van de **ideale condensator**, een *vlakke platen condensator* met korte plaatafstand en groot plaatoppervlak, kunnen we de precieze formule bepalen voor de capaciteit. Bij verwaarlozing van de lekvelen aan de rand hebben we intern een homogeen veld:  $C = Q/U_C = DA/El$ . Daaruit volgt voor de ideale condensator:

$$C = \epsilon \frac{A}{l} \quad \text{of} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon} \frac{l}{A}$$

In de ideale condensator is  $l$ , de lengte van de veldlijn in de condensator, gelijk aan  $d$ , de plaatafstand. Traditioneel wordt in de formule de  $l$  vervangen door  $d$  (naar het engelse ‘distance’ = afstand).

- Opg 4.1.4 \*** De capaciteit van een vlakkeplaat condensator is een grootheid die afhangt van:
- A de lading op de platen
  - B de spanning tussen de platen
  - C het elektrische veld tussen de platen
  - D de afmetingen van de platen en hun afstand
- Opg 4.1.5 \*\*** Een ideale condensator bestaande uit twee evenwijdige platen heeft een capaciteit  $C$ . Hoeveel wordt de capaciteit als we een (geïsoleerde) metaalplaat tussen de condensatorplaten doen. Plaatafstand  $d$ ; plaatdikte  $\frac{1}{4}d$ . [Antw.  $1,33C$ ]
- Opg 4.1.6 \*\*** Door een condensator volledig te vullen met een diëlektricum is de capaciteit verdubbeld. Wat was de diëlektrische constante van de vulling? [Antw.  $\epsilon_r = 2$ ]

**Capaciteit en geleiding** Vergelijk de uitdrukking voor de capaciteit van de vlakke platencondensator:  $C = \epsilon A/l$ , met de uitdrukkingen voor de geleiding van een cilindervormig weerstand:  $G = \gamma A/l$ . We zien dezelfde afhankelijkheid van lengte en oppervlak. Dientengevolge is de diëlektrische constante  $\epsilon$  op te vatten als de soortelijke geleiding voor de elektrische flux  $\Psi$ . Evenzo is de uitdrukking voor de lading op de platen:  $Q = CU$  vergelijkbaar met de wet van Ohm:  $I = GU$ . Deze analogie tussen capaciteit en geleiding, lading en stroom, kunnen we benutten bij het oplossen van problemen bij het schakelen van condensatoren (serie of parallel). Zo is bijvoorbeeld een serie schakeling van capaciteiten vergelijkbaar met een parallelschakeling van weerstanden. Omdat de laatste een stroomverdeler is naar de geleidbaarheden, is analoog de eerste een spanningsdeler naar de capaciteiten. Daardoor krijgen we de bekende **vervangingscapaciteit**  $C_s$  voor serie resp.  $C_p$  voor parallelschakeling:

$$\begin{aligned} 1/C_s &= 1/C_1 + 1/C_2 \\ C_p &= C_1 + C_2 \end{aligned}$$

**Voorbeeld Plaatcondensator** Het diëlektricum van een plaatcondensator bestaat uit twee lagen polystyreen ( $\epsilon_r = 2,5$ ) met een oliehoudende papierlaag ( $\epsilon_r = 3$ ) van de halve dikte ertussen. Wat is de totale vervangende  $\epsilon_r$

De condensator kan worden gezien als een serie schakeling van drie condensatoren; twee met dikte  $\frac{1}{4}l$  en  $\epsilon_r = 2,5$ , en één met dikte  $\frac{1}{2}l$  en  $\epsilon_r = 3$ . Voor de totale capaciteit geldt dus:

$$l/\epsilon_r A = 2 \cdot \frac{1}{4}l/2,5A + \frac{1}{2}l/3A$$

waaruit we oplossen:  $\epsilon_r = 2 \cdot 3 \cdot 2,5 / (2,5 + 3) = 15/5,5 = 2,73$ . Natuurlijk ligt de waarde 2,73 tussen 2,5 en 3 (ter vergelijking: het gemiddelde is 2,75).

**Opg 4.1.7 \*** De diëlektrische constante van een medium

- A is op te vatten als een soort weerstand voor elektrische flux door het materiaal
- B is op te vatten als een soort geleiding voor elektrische flux door het materiaal
- C is een grootheid die in principe kan variëren tussen 0 en zeer groot
- D heeft de dimensie  $Nm/C^2$

**Opg 4.1.8 \*\*** Over twee condensatoren van 2 F resp. 6 F die in serie staan, staat een spanning van 200 V. Bereken de spanning over ieder van de condensatoren, en de lading van elk. [Antw.  $U_2 = 150$  V,  $U_6 = 50$  V,  $Q = 300$  C]

## Opg 4.1.9 \*\*

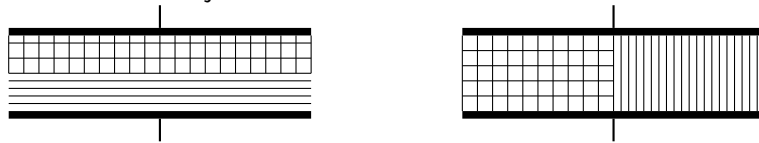


Een afstemcondensator bestaat uit 2 stelsels van parallelle platen met een tussen afstand  $2d$  die precies om en om in elkaar worden geschoven. Het overlappend oppervlak is  $A$ , variabel, door het verdraaien van een der stelsels.

Hoe groot is de capaciteit?

[Antw.  $C = 6\epsilon A/d$ ]

Opg 4.1.10 \*\*\* Een lege plaatcondensator met capaciteit  $C$  kan op twee manieren gevuld worden met twee gelijke stukken materiaal, waarvan de diëlektrische constanten 2 en 3 zijn.



Bereken de totale capaciteit als de materialen:

a parallel aan de platen staan.

[Antw.  $C_t = 2,4 C$ ]

b naast elkaar tegen de platen staan.

[Antw.  $C_t = 2,5 C$ ]

Opg 4.1.11 \*\* Twee niet gevulde condensatoren met capaciteit  $C$  staan parallel geschakeld en worden opgeladen met een spanning van  $5 V$ . Na het opladen, als de spanningsbron is weggehaald maar de platen verbonden blijven, wordt een der condensatoren gevuld met een diëlektricum met  $\epsilon_r = 4$ .

a Bereken de spanning die nu over de condensatoren komt.

[Antw.  $U = 2 V$ ]

b Bereken ook hoeveel lading van de ene naar de andere condensator zal stromen.

[Antw.  $dQ = 3 C$ ]

**Berekening capaciteit** Bij de *weerstand* wordt de weerstand bepaald door de manier waarop de elektrische stroom door het materiaal gaat. Bij een gegeven stroomdichtheid bepaalt de soortelijke geleiding de elektrische veldsterkte (wet van Ohm). En de veldsterkte bepaalt de spanning over de weerstand. Analoog zien we bij de *capaciteit* dat de manier waarop de elektrische flux (die uit de lading komt) door het materiaal gaat de waarde van de capaciteit bepaalt. Via de diëlektrische constante bepaalt de fluxdichtheid de elektrische veldsterkte, dus ook de spanning tussen de platen. We leren daaruit dat de waarde van de capaciteit bepaald wordt door het verloop van het veld in de condensator.

**Voorbeeld Bolcondensator** Bepaal de capaciteit van een bolcondensator, een geladen bolvormige geleider met straal  $R$ , die geïsoleerd is van aarde

Stel de condensator is met behulp van een spanning  $U$  (tussen de geleider en aarde) opgeladen met een lading  $Q$  (op het boloppervlak). De potentiaal  $V(r)$  op afstand  $r$  van het middelpunt van een bollading met lading  $Q$  is

$$V(r) = Q/4\pi\epsilon r$$

Op de bol zelf is  $r = R$  en  $V(R) = U$ , zodat de capaciteit van de bolcondensator wordt:

$$C = Q/U = Q/(Q/4\pi\epsilon R) = 4\pi\epsilon R$$

N.B. vullen we domweg in de formule van de *plaat*condensator in  $d = R$ , en  $A = 4\pi R^2$  dan vinden we dezelfde formule(!?).

Om in te zien dat de potentiaal verloopt als aangegeven, bedenk dat de veldlijnen vanaf het oppervlak straalvormig naar buiten lopen, naar 'aarde' (ver weg). Volgens Gauss is de flux  $\Psi$  van het veld gelijk aan de lading  $Q$  op de bol,  $\Psi = Q$ . Op een afstand  $r$  van het bolmiddenpunt is het oppervlak waardoor de flux gaat een boloppervlak  $A = 4\pi r^2$ . Volgt voor de fluxdichtheid:

$$D = \Psi/A = Q/(4\pi r^2)$$

Op die zelfde afstand is de veldsterkte:

$$E = D/\epsilon = Q/(4\pi\epsilon r^2)$$

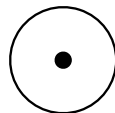
Omdat de veldsterkte van de afstand afhangt, moet de potentiaal ter plekke van  $r$ —in het bijzonder natuurlijk op de bol met  $r = R$ —worden berekend door integratie:

$$\begin{aligned} V(r) - V(\infty) &= \int_r^\infty E(r) dr = \int_r^\infty Q/(4\pi\epsilon r^2) \\ &= Q/(4\pi\epsilon) \int_r^\infty dr/r^2 = Q/(4\pi\epsilon) [-1/r]_r^\infty \\ &= Q/(4\pi\epsilon) (-1/\infty + 1/r) = Q/(4\pi\epsilon r) \end{aligned}$$

**Opg 4.1.12 \*\*** Bepaal de capaciteit van de aarde. Beschouw het (grond)watervlak als een geleidende bol met omtrek van 40.000 km.

- a Ten opzichte van het heelal. [Antw.  $C = 0,707$  mF]  
 b Ten opzichte van het wolkendeck. Beschouw het wolkendeck als een geleidende plaat op 10 km hoogte. [Antw.  $C = 4,50$  F]

**Opg 4.1.13 \*\*\*\***



Een coaxiale kabel heeft een cilindervormig kern, met een straal van 1 mm, en een cilindervormig concentrische omhulling, met een diëlektricum met constante 4. Om het geheel zit een metalen gaas, voor de elektrische afscherming, met een diameter van 6 mm en een dunne kunststof omhulling.

Bereken de capaciteit van deze kabel per meter lengte als volgt. Neem aan dat de lading per meter kabel gelijk is aan 1 C (op kern en gaas).

- a Bepaal de veldsterkte tussen gaas en kern als functie van de straal.  
 b Bepaal de spanning tussen gaas en kern.  
 c Bereken de capaciteit per meter kabel uit lading en spanning.

[Antw.  $C/l = 203$  pF/m]

- Opg 4.1.14 \*\*\*** Een bol (straal  $a$ ) is geladen met lading  $+Q$ . Om deze lading af te schermen is de bol omgeven door een metalen boloppervlak (binnenstraal  $b$ , buitenstraal  $c$ ), zonder netto lading. De bolschil heeft precies hetzelfde middelpunt als de eerstgenoemde bol. We voeren drie handelingen uit:
1. De buitenkant van de bolschil wordt verbonden met aarde via het sluiten van een schakelaar  $S$ .
- A Voor het sluiten van  $S$  bevindt zich een elektrisch veld in de bolschil (tussen straal  $b$  en straal  $c$ )
- B direct na het sluiten van  $S$  loopt er een elektrische stroom van het aardpunt via  $S$  naar de bolschil
2. Na het bereiken van evenwicht bij gesloten  $S$ , wordt  $S$  opnieuw geopend.
- C Buiten de bolschil is nu een elektrisch veld meetbaar
3. Tussen  $S$  (open) en aarde plaatst men nu een batterij, met de  $+$ kant aan  $S$  en de  $-$ kant aan aarde.  $S$  wordt nu gesloten.
- D De elektrische veldsterkte tussen de bol en de bolschil verandert hierdoor niet

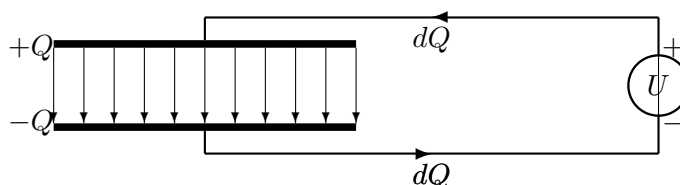
## 4.2 Elektrische veldenergie

**Inleiding** Enerzijds is de capaciteit op te vatten als het vermogen om *lading* vast te houden *op de elektroden*. De capaciteit is dan de evenredigheidsconstante tussen de elektrische spanning over de condensator en de lading op de platen. Anderzijds is capaciteit het vermogen om *elektrisch veld* vast te houden *in de condensator*. Zo gezien is de condensator een *opslagruimte* van elektrisch veld in de ruimte tussen de platen. De capaciteit is dan evenzeer een evenredigheidsconstante, maar dan voor de elektrische energie, zoals we zullen laten zien.

**Energie in de condensator** Het vullen van de condensator met een elektrische flux zal arbeid vergen. Stel dat we het veld opbouwen door de spanningsbron in gedeelten  $dU$  op te voeren tot  $U_C = U$ . De lading van de condensator met capaciteit  $C$  is dan:

$$Q = CU$$

Als de spanning toeneemt met  $dU$ , dan neemt de lading toe met  $dQ = CdU$ . Feitelijk zal die lading als stroom van de ene naar de andere plaat vloeien (zie fig. 4.4). Daartoe levert de spanningsbron een energie ‘lading



Figuur 4.4 De spanningsbron  $U$  transporteert lading van de ene plaat naar de andere in deelladingen  $dQ$ . De daartoe door de bron geleverde arbeid  $dQ \cdot U$  wordt omgezet in veldenergie in de condensator.

maal spanning’:  $dW = dQU = CU dU$ . Bedenk daarbij, dat de spanning eigenlijk varieert: het is het gemiddelde tussen de oorspronkelijke  $U$  en de toegenomen  $U + dU$ . De totale geleverde elektrische energie  $W$  wordt zo:

$$W = \int dW = C \int_0^U U dU = \frac{1}{2}CU^2$$

Nu is de energie uitgedrukt in de spanning tussen de platen van de condensator, maar door gebruik te maken van  $Q = CU$  kan ze ook worden uitgedrukt in de lading op de platen. Samengevat: de (elektrische) **condensatorenergie**  $W$  kan worden uitgedrukt in de spanning  $U_C$  over de condensator of de lading  $Q$  op de platen:

$$W = \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}QU_C = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2$$

- Opg 4.2.1 \*\*** Een plaatcondensator wordt opgeladen tot een spanning  $U_1$ . Daarna wordt de plaatafstand verdubbeld. Hoeveel energie is er dan in de condensator? Waar komt de energietoename vandaan? [Antw.  $W_2 = 2W_1$ , het verdubbelen van de afstand kost arbeid, die in veldenergie is omgezet]
- Opg 4.2.2 \*\*** Een plaatcondensator wordt opgeladen tot een spanning  $U_1$ . Daarna wordt de ruimte tussen de platen gevuld met een stof waarvan de diëlektrische constante 2 is. Hoe groot wordt daardoor de spanning  $U_2$ ? Hoeveel energie is er dan in de condensator? Waar is het verschil gebleven? [Antw.  $U_2 = \frac{1}{2}U_1$ ,  $W_2 = \frac{1}{2}W_1$ , die uit het veld komende energie is gebruikt om het diëlektricum tussen de platen te trekken.]
- Opg 4.2.3 \*\*** Veronderstel nu, dat we de condensator ook na het opladen met de voedingsspanning verbonden houden. De spanning blijft dan gelijk maar de lading verandert. Hoe groot wordt de lading  $Q_2$  na het opvullen? Hoeveel energie bevat de condensator dan? Waar is het verschil gebleven? [Antw.  $Q_2 = 2Q_1$ ,  $W_2 = 2W_1$ , het diëlektricum moet met kracht tussen de platen worden gebracht ]
- Opg 4.2.4** Twee condensatoren worden parallel geschakeld. In de beginsituatie is alleen de eerste condensator geladen met een lading  $Q$ . Daarna worden de platen doorverbonden. De capaciteiten van de condensatoren zijn  $C_1$  en  $C_2$  resp.
- a \*\*\*\* Laat zien dat in evenwicht de lading van de eerste condensator wordt:

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q$$

- b \*\* Bepaal de totale energie die in evenwicht in deze condensator zit, en laat zien dat de energie is verminderd met:

$$W_1 - W_2 = \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} Q^2$$

**Elektrische veldenergie** De condensator is op te vatten als een opslagruimte voor *elektrische veldenergie*. De *condensatorenergie* blijkt geheel in het elektrische veld *binnen in* de condensator te zitten. Daarom kunnen we condensatorenergie ook zien als *elektrische veldenergie*, uitgedrukt in eigenschappen van het veld: de fluxdichtheid  $D$  (en/of de veldsterkte  $E$ ). Zoals we eerder zagen komt er uit de lading  $Q$  op de platen een veld met een diëlektrische verschuiving (fluxdichtheid)  $D$ . Volgens Gauss is  $Q = DA$  ( $A$  is oppervlakte van de platen), zodat de toename van de lading  $dQ$  direct samenhangt met de toename van de fluxdichtheid

$$dQ = A dD$$

Het aanbrengen van die deellading kost een deelarheid  $dW = dQU$ . De spanning  $U$  tussen de platen hangt direct samen met de veldsterkte  $E$ ; tegen de veldlijn in is  $dU = Edl$  (daarin is  $dl$  een deelafstand langs de



veldlijn tussen de platen). De arbeid wordt omgezet in veldenergie  $dW$  die langs de veldlijn kan worden opgedeeld in delen  $ddW$

$$ddW = dQ dU = A dD E dl = Adl E dD$$

Het totale veld heeft dan de energietoename  $dW$ :

$$dW = Al E dD$$

Nu is  $Al$  gelijk het volume  $V$ ol tussen de platen, dus het volume van het veld. Dientengevolge is de toename van de veldenergie—dus ook de veldenergie zelf—evenredig met het veldvolume. Dat is natuurlijk te verwachten bij een *homogeen* veld. Merk op, dat dit net zo is als bij de warmte-energie van de weerstand, die ook toeneemt met het volume van de materie waarin het veld is.

**Elektrische veldenergiedichtheid** Omdat veldenergie evenredig is met het veldvolume, dat we nu maar weer gewoon  $V$  zullen noteren, is de evenredigheidsfactor **elektrische veldenergiedichtheid**  $w$  van belang:

$$w = \frac{dW}{dV}$$

De toename van de veldenergiedichtheid volgt uit bovenstaande:

$$dw = E dD$$

Voor de meeste materialen zijn de fluxdichtheid  $D$  en de veldsterkte  $E$  evenredig, met de materiaal afhankelijke evenredigheidsconstante  $\epsilon$ :  $D = \epsilon E$ . De *elektrische veldenergiedichtheid*  $w$  kan onder die omstandigheden ook in  $D$  en/of  $E$  worden uitgedrukt:

$$w = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon}D^2$$

**Opg 4.2.5 \*\*\*** De elektrische veldenergie in een ideale condensator

- A is onafhankelijk van het volume van de condensator
- B is afhankelijk van de tijd
- C is rechtevenredig met het kwadraat van de elektrische veldsterkte
- D is omgekeerd evenredig met het kwadraat van de elektrische veldsterkte

**Opg 4.2.6 \*\*** Een bol met een straal van 0,2 m wordt tot 30 kV opgeladen.

- a Hoe groot is de elektrische veldenergie? [Antw.  $W = 10$  mJ]
- b Verbindt nu deze bol met een identieke, maar ongeladen, bol die op verre afstand is. Hoeveel energie zit er in het veld van beide bollen wanneer de lading zich heeft verdeeld? [Antw.  $W = 5$  mJ, het ladingstransport heeft energie gekost (warme draad)]

## Opg 4.2.7 \*\*\*\*

- a \*\* Bepaal de elektrische veldenergie van een bolcondensator, met straal  $R$ , die een lading  $Q$  heeft. [Antw.  $W = 4,5 \cdot 10^9 Q^2/R$ ]  
 b \*\*\*\* Binnen welke afstand is juist de helft van de veldenergie geconcentreerd? [Antw. binnen  $2R$  vanaf middelpunt bol]

**Tijdconstante RC-kring** De *condensatorenergie* die in de condensator is opgeslagen kan weglekken; we zien dan dat de lading weglekt als *lekstroom*  $I$  door een *lekweerstand*  $R$ . Bekijk de principeschakeling in figuur 4.5, met de kringrichting rechtson, in overeenstemming met de condensatorpolariteit. De lekstroom  $I$  en de lading op de platen  $Q$  hangen rechtstreeks samen doordat de stroom gelijk is aan de *ladingstoename* per seconde:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Let erop dat de lading *afneemt*, dus dat de lekstroom negatief is. De stroom veroorzaakt een *spanningsval*  $U_R$  over de lekweerstand die tegengesteld is aan de spanning  $U_C$  over de condensator:

$$U_R = -U_C$$

Voor een ideale weerstand geldt de wet van Ohm:

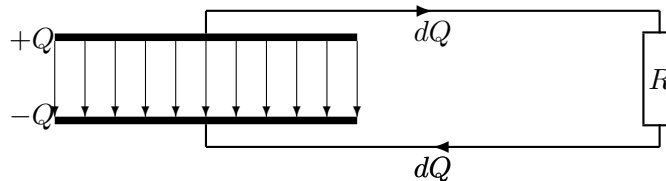
$$U_R = RI$$

waarmee de spanning  $U = U_C$  voldoet aan de vergelijking:

$$U = -R \frac{dQ}{dt}$$

De lading kan ook worden uitgedrukt in de spanning:  $Q = CU_C = CU$ , waardoor:

$$U = -RC \frac{dU}{dt}$$



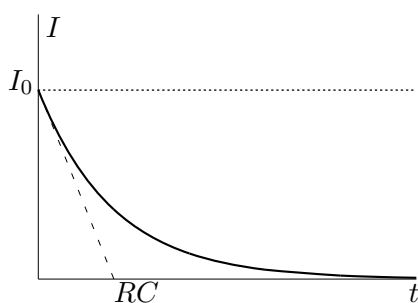
Figuur 4.5 De spanning  $U$  op de elektroden transporteert leklading  $dQ$ , via een *lekweerstand*  $R$ . De daartoe door het veld in de condensator geleverde arbeid  $UdQ$  wordt omgezet in 'transportwarmte' in draden en weerstand.

Deze *differentiaal-vergelijking* (er zijn immers differentialen  $d$  in de vergelijking) lossen we op door de onbekende  $U$  naar links en de bekenden naar rechts te brengen,

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{RC}$$

en te integreren vanaf het ‘begin’, met  $t = 0$  en  $U = U(0)$ , tot ‘nu’, met  $t$  en  $U$ :

$$\begin{aligned} \int_{U(0)}^U \frac{dU}{U} &= - \int_0^t \frac{dt}{RC} \\ [\ln |U|]_{U(0)}^U &= - \left[ \frac{t}{RC} \right]_0^t \\ (\ln |U| - \ln |U(0)|) &= - \frac{t-0}{RC} \\ \ln (U/U(0)) &= -t/RC \\ U/U(0) &= e^{-t/RC} \end{aligned}$$



Figuur 4.6 Het leeglopen van een condensator wordt gekenmerkt door exponentieel verval met een karakteristieke tijdconstante. De tijdconstante is te vinden door de oorspronkelijk ingezette lijn naar de tijdas door te trekken.

Merk op, dat het teken van de spanning er niet toe doet: het deelt weg. De oplossing heeft *exponentieel verval*: de spanning eb langzaam weg. Na de tijd gelijk aan de *tijdconstante*  $\tau$  is de spanning, dus ook de stroom, met een factor  $e$  afgenomen:

$$\tau = RC$$

Praktisch is na 3, 5 of 7 tijdconstanten slechts 5 procent, 1 procent of 1 promille van het signaal overgebleven.

**Opg 4.2.8 \*\*** Bereken welke capaciteitswaarde nodig is, in serie met een weerstand van  $1 \text{ k}\Omega$ , om een tijdconstante van  $1 \text{ ms}$  te bereiken.

[Antw.  $C = 1 \mu\text{F}$ ]

**Opg 4.2.9 \*\*** Een condensator wordt over een weerstand geladen; de tijdconstante is  $1 \text{ s}$ . Bereken na hoeveel tijd precies (4 significante cijfers) de condensator is ‘gevuld’:

a op 5% na.

[Antw.  $t = 2,996 \text{ s}$ ]

b op 1% na.

[Antw.  $t = 4,605 \text{ s}$ ]

c op 1‰ na.

[Antw.  $t = 6,908 \text{ s}$ ]

### 4.3 Polarisatie en diëlektrica

We zullen nu ingaan op de atomeigenschappen die de *diëlektrische constante* bepalen. Waarom is de elektrische *permittiviteit* in papier verschillend van die in vacuüm? Het zal verder nodig zijn om te begrijpen waarom er temperatuurinvloed is, en, voor hoogfrequent-toepassingen, waarom er een invloed is van de signaalfrequentie op de diëlektrische constante en energieverliezen in de materie.

#### 4.3.1 Elektrisch veld en polarisatie

**Beweeglijke lading** Welke uitwerking heeft een elektrisch veld op materie? Zijn er *vrij beweeglijke ladingen*, zoals in geleiders en in mindere mate in halfgeleiders, dan verplaatsen die ladingen bij het aanzetten van het veld naar het oppervlakte. Die oppervlaktelading zal bij geleiders het veld naar binnen toe volledig afschermen—het ‘kooi van Faraday’ effect—omdat alle veldlijnen door de oppervlaktelading wordt opgevangen, ongeacht de sterkte van het veld. Bij halfgeleiders zal dat in mindere mate het geval zijn, omdat er slechts een beperkt aantal beweeglijke ladingen is: bij halfgeleiders kan er slechts een zeer kleine afscherming optreden.

**Gebonden lading** In *niet-geleiders* zijn er echter alleen *gebonden* ladingen, gebonden in atomen of ionen. In atomen of ionen is die gebonden lading de lading van de elektronwolk tezamen met de lading van de kern. Bij atomen is die lading totaal neutraal, bij ionen is de totale lading gelijk aan de ionlading—natuurlijk is de som van de ionladingen van bij elkaar gelegen ionen wèl weer neutraal. Een elektrisch veld zal in een niet-geleider globaal gezien géén ladingen kunnen verplaatsen, zodat er geen afscherming aan het oppervlak is. Wel kunnen de tegengestelde ladingen *in de atomen* verplaatsen ten opzichte van elkaar; evenzo kunnen tegengestelde ionen verplaatsen ten opzichte van elkaar. Het verschuiven van de ladingen wordt *polarisatie* genoemd.

**Soorten polarisatie en diëlektrica** Naar aanleiding van de genoemde effecten onderscheiden we twee *soorten polarisatie* naar de aard van het ontstaan:

- elektronenpolarisatie t.g.v. elektronwolkdeformatie;
- ionenpolarisatie t.g.v. ionverplaatsing;

We kunnen polarisatie ook onderscheiden naar het effect dat het elektrische veld heeft op de verschillende materialen. Sommige materialen zijn veel gevoeliger voor elektrische velden dan andere, en zullen veel sterker gepolariseerd worden. We kunnen onderscheiden naar de grootte

van de gevoeligheid. Andere materialen blijken zelfs negatief te reageren. Naar aanleiding van de grootte en het teken van de gevoeligheid van materie voor elektrische velden onderscheiden we een aantal *soorten polariseerbare materie*, de **diëlektrica** (enkelvoud: diëlektricum):

- **ferroelektricum** met hoge gevoeligheid;
- **paraelektricum** met lage gevoeligheid;
- **diaelektricum** met negatieve gevoeligheid;

**Polarisatie** Hoe komt het, dat de elektrische veldsterkte  $E$  in de materie verschilt van die in vacuüm? Een elektrische veldsterkte  $E$  is *in vacuüm* gekoppeld aan de fluxdichtheid  $D$  volgens

$$D = \epsilon_0 E$$

met de vacuüm permittiviteit als evenredigheidsconstante. *In materie* blijkt er meestal een kleinere veldsterkte te zijn dan in vacuüm doordat de permittiviteit er groter is. Omgekeerd geldt dat een zelfde veldsterkte als in vacuüm gepaard gaat met een grotere fluxdichtheid dan verwacht mocht worden. De extra fluxdichtheid t.g.v. materie noemen we de **polarisatie**  $P$ ; de eenheid van polarisatie  $P$  is daarmee dezelfde als die van fluxdichtheid  $D$ , dat is  $C/m^2$ . Volgens de definitie van polarisatie geldt altijd

$$P = D - \epsilon_0 E$$

zodat in vacuüm geen polarisatie is, dus  $P_0 = 0$ . Doel van deze paragraaf is nu om meer te weten te komen over welke factoren de polarisatie bepalen.

**Permittiviteit** Al eerder hebben we kennis gemaakt met een experimenteel verband tussen de fluxdichtheid  $D$  en de veldsterkte  $E$ . Voor veel materialen bleek dat een evenredig verband te zijn, met als evenredigheidsconstante de *permittiviteit*  $\epsilon$ :

$$D = \epsilon E$$

Ook al zal vaak  $\epsilon$  constant zijn, er zijn materialen of omstandigheden waarbij we niet zonder meer van een evenredigheid kunnen spreken. Soms is er een niet-evenredig verband—in dat geval kunnen we ons redden met het ‘ter plekke’ geldende evenredige verband tussen de *veranderingen* van de grootheden:  $\epsilon = dD/dE$ . Soms is de zaak niet meer te redden omdat er ‘geheugen effecten’ zijn: hysteresis verschijnselen.

**Elektrische gevoeligheid** We kunnen nu de twee verbanden tussen fluxdichtheid  $D$  en veldsterkte  $E$  combineren. Bijgevolg kunnen we de polarisatie uitdrukken in de veldsterkte. Substitueer in de definitie van de polarisatie de fluxdichtheid uitgedrukt in de veldsterkte:

$$P = \epsilon E - \epsilon_0 E = (\epsilon - \epsilon_0)E$$

Door gebruik te maken van de diëlektrische constante  $\epsilon_r$ , vereenvoudigt dat tot:

$$P = (\epsilon_r \epsilon_0 - \epsilon_0)E = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E$$

De evenredigheidsconstante tussen polarisatie en veldsterkte is  $\chi_e \epsilon_0$ , waarbij we invoeren de **elektrische gevoeligheid**, of **elektrische susceptibiliteit**,  $\chi_e$ :

$$\boxed{\chi_e = \epsilon_r - 1} \quad \boxed{\epsilon_r = 1 + \chi_e}$$

De gevoeligheid is daarmee het materie afhankelijke deel van  $\epsilon_r$ , omdat de gevoeligheid van vacuüm uiteraard 1 is. Samenvattend: de polarisatie is evenredig met de veldsterkte volgens

$$\boxed{P = \chi_e \epsilon_0 E}$$

**Polarisatie en fluxdichtheid** Het is ook mogelijk om de polarisatie uit te drukken in de fluxdichtheid. Uitdrukken in de fluxdichtheid is fundamenteleler dan het uitdrukken in de veldsterkte, omdat de veldsterkte zelf natuurlijk sterk bepaald is door de materie, terwijl de fluxdichtheid wordt bepaald door de lading die aanwezig is, of er nu materie is of niet. Om het evenredige verband tussen  $P$  en  $D$  te vinden moeten we de  $E$  waarde elimineren; substitueren we  $\epsilon_0 E = D/\epsilon_r$  en  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  dan krijgen we

$$P = \chi_e \frac{D}{\epsilon_r} = \frac{1}{\chi_e^{-1} + 1} D$$

Merk op, dat de polarisatie maximaal gelijk aan  $D$  wordt, namelijk als er een extreme hoge elektrische gevoeligheid is. Dan treedt er verzadiging op in de materie waardoor de polarisatie niet verder kan toenemen.

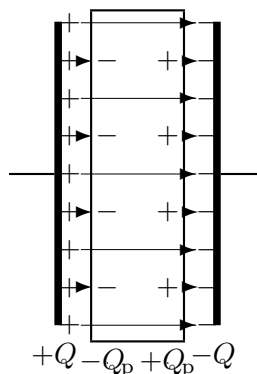
**Polarisatielading** Hoe de polarisatie op te vatten? Vroeger verkeerde men in de veronderstelling, dat polarisatie het gevolg was van **polarisatielading**, aan het oppervlak van de materie ontstaan door influentie. Bekijk bijvoorbeeld een stuk materie in een vlakkeplaatcondensator met

de lading  $Q$  op en spanning  $U$  tussen de platen. Die lading verschilt van de lading  $Q_0$  die er zonder de materie is. Dan is er een veld  $E$ —alleen door  $U$  bepaald—met fluxdichtheid  $D_0 = \epsilon_0 E$ . Volgens Gauss geldt voor de lading zonder materie:

$$Q_0 = D_0 A = \epsilon_0 EA$$

Tengevolge van de influentie van het veld op de materie is er tegenover de positieve plaat een polarisatielading  $-Q_p$  op het materieoppervlak ontstaan. Volgens de wet van Gauss moeten de veldlijnen die op  $-Q_p$  uitkomen, zijn vertrokken van  $+Q_p$  op de positieve plaat. De totale lading op de positieve plaat is onder invloed van de materie gegroeid:

$$Q = Q_0 + Q_p$$



Figuur 4.7 Het veld van de lading  $Q$  op de platen induceert enige polarisatielading  $Q_p$  op het oppervlak van het diëlektricum, waardoor de veldlijnen binnen het medium verdwijnt. De polarisatie  $P$  in het medium is het dipoolmoment van de polarisatielading per  $m^3$ .

Doordat de lading is veranderd, is de fluxdichtheid ook veranderd. Volgens Gauss geldt daarvoor  $Q = DA$ . Vullen we de vergelijking voor de ladingen  $Q$  en  $Q_0$  in de somvergelijking in, dan blijkt voor de fluxdichtheid:

$$Q = DA = \epsilon_0 EA + Q_p$$

Na uitdelen van  $A$  vinden we de vergelijking voor de fluxdichtheid waarin invloed van de polarisatielading is verwerkt:

$$D = \epsilon_0 E + \sigma_p,$$

met de **polarisatie-ladingsdichtheid** op het materie oppervlak:

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{A}$$

Vergelijken met de algemeen geldige uitdrukking  $D = \epsilon_0 E + P$  levert op, dat *de polarisatie gelijk is aan de polarisatieladingsdichtheid*:

$$P = \sigma_p$$

Natuurlijk is de eenheid van polarisatie  $C/m^2$  gelijk aan die van de fluxdichtheid.

**Conclusie** *Het fluxveld in de condensator, en de lading op de platen ervan, krijgt door de elektrische gevoeligheid  $\chi_e$  van de vulling een waarde die verschilt van die van de onge vulde condensator met dezelfde spanning.*

$$\begin{aligned} D &= \epsilon_0 E + P \\ P = Q_p/A & \quad Q_p = Q - Q_0 \\ \chi_e &= \epsilon_r - 1 \end{aligned}$$

*De polarisatie  $P$  kan worden opgevat als een oppervlakteladingsdichtheid van de polarisatielading; de polarisatielading als de extra lading tengevolge van de vulling.*

- Opg 4.3.1** Een papier-condensator ( $\chi_e = 1,1$ ) heeft  $1 \mu\text{F}$  capaciteit. Als de spanning erover  $100 \text{ V}$  is, bereken dan
- a \*\* de lading  $Q$ . [Antw.  $Q = 10^{-4} \text{ C}$ ]
  - b \*\* de polarisatielading  $Q_p$  in het diëlektricum. [Antw.  $Q_p = 5,24 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ ]
  - c \*\* de veldenergie [Antw.  $W = 5 \text{ mJ}$ ]
  - d \*\*\*\* de polarisatiearbeid [Antw.  $W_{\text{pol}} = 2,62 \text{ mJ}$ ]

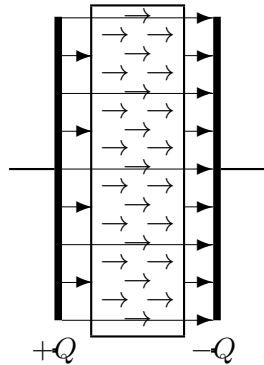
### 4.3.2 Polarisatie en dipoolmoment

**Dipoolmomenten** In werkelijkheid zal de polarisatie niet alléén op het oppervlak maar in de *hele* materie worden veroorzaakt (zie ook fig. 4.8 en 4.9). Laten we daarom anders tegen de polarisatie-ladingsdichtheid aankijken om een aanwijzing te zoeken betreffende de werkelijke betekenis van de *polarisatie*:

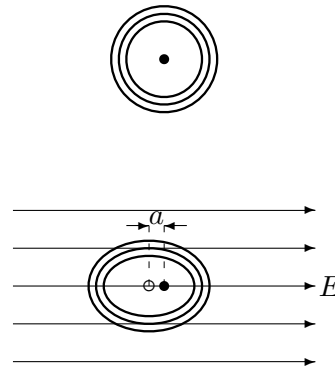
$$P = \sigma_p = \frac{Q_p}{A} = \frac{lQ_p}{lA} = \frac{lQ_p}{V}$$

We hebben teller en noemer vermenigvuldigd met de plaatafstand  $l$ , die relatief klein is. De beide polarisatieladingen  $-Q_p$  en  $+Q_p$ , op het oppervlak van de materie maar op afstand  $l$  van elkaar, vormen tezamen een door influentie ontstane *dipool* met **elektrisch dipoolmoment**  $lQ_p$ . Daardoor kunnen we de laatste vergelijking interpreteren als: *De polarisatie is gelijk aan het dipoolmoment per volumeenheid.* In het licht van onze kennis over de atomen in de materie begrijpen we, dat er in werkelijkheid niet één grote dipool ontstaat, maar dat *ieder atoom* een elektrische dipool wordt. Er blijken twee soorten atomaire dipolen te zijn, die tengevolge van elektronenpolarisatie en die t.g.v. ionenpolarisatie.





Figuur 4.8 In het diëlektricum worden onder invloed van de lading op de platen (atomaire) dipolen geïnduceerd. Dit gebeurt overal in het medium, en niet alleen bij het oppervlak; het netto effect is als van oppervlaktelading.



Figuur 4.9 Boven elkaar zijn atomen geschetst die resp. niet en wel in een elektrisch veld zijn; let op de vervorming van de *elektronenwolk* in het veld, zodat een atomaire dipoolmoment ontstaat door elektronenpolarisatie.

**Opg 4.3.2 \*\*\*** Een condensator heeft een capaciteit van 2 nF. Voor de elektrische gevoeligheid van het diëlektrikum van de vulling geldt  $\chi_e = 3,5$ . Als de spanning over de condensator  $U = 24$  Volt, dan is de *totale* polarisatielading in het diëlektrikum:

- A 28,8 nC
- B 37,3 nC
- C 48 nC
- D 0 nC

**Elektronenpolarisatie** Laat een atomaire *dipool* een dipoolmoment  $p$  hebben. Is de atoombichtheid gelijk aan  $n$ , dan is het totale dipoolmoment per  $\text{m}^3$ , dus de polarisatie:

$$P = np$$

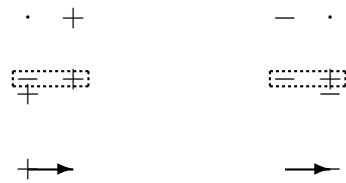
Hoe groot is nu het atomaire dipoolmoment  $p$ ? Dat hangt af van de soort polarisatie. Eerst bezien we het geval van *elektronenpolarisatie* t.g.v. van een elektrisch veld. Als de elektronwolk van een ion zodanig uit elkaar wordt getrokken, dat het ‘zwaartepunt’ van de wolk niet meer samen valt met de kern, dan ontstaat een elektrisch dipoolmoment. Is die afstand  $a$ , van het negatieve wolkcentrum naar de positieve kern met *kernlading*  $Ze$ , dan is het dipoolmoment

$$p = aZe$$

**Voorbeeld Si-elektronenpolarisatie** Stel dat de diëlektrische constante  $\epsilon_r = 12$  veroorzaakt wordt door een veld  $E = 100 \text{ V/m}$ . Hoe groot is de verschuiving van de elektronwolk?

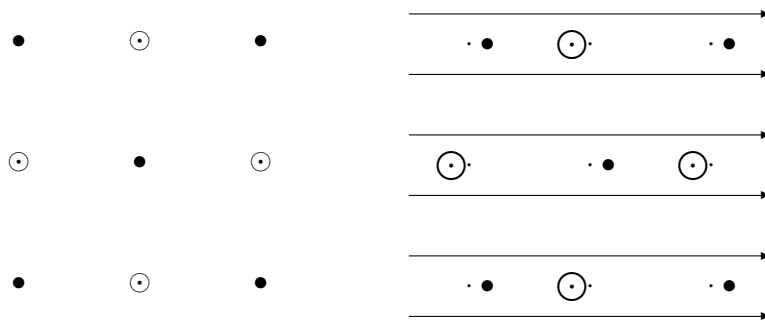
De elektrische gevoeligheid van Si is  $\chi_e = \epsilon_r - 1 = 12 - 1 = 11$ . De polarisatie is daarmee  $P = \chi_e \epsilon_0 E = 11 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 = 9,74 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$ . We berekenen het dipoolmoment van een atoom door te delen door de atoomdichtheid. Voor Si berekenen we uit massadichtheid en atoommassa een dichtheid  $n_{\text{Si}} = 5 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$ . Daarmee volgt een atomair dipoolmoment  $p = P/n = 1,95 \cdot 10^{-37} \text{ Cm}$ . Aangezien het atoomgetal  $Z$  van Si 14 is, vinden we hieruit de verschuiving  $a$  van het zwaartepunt van de elektronwolk:  $a = p/Ze = 1,95 \cdot 10^{-37} / 14 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 8,7 \cdot 10^{-13} \text{ m}$ . Vergelijk de gevonden afstand met de Si atoomstraal van  $1,17 \cdot 10^{-10}$ .

### Ionenpolarisatie



Figuur 4.11 Links is getoond hoe de verplaatsing van een  $+$ -lading naar rechts te zien is als superpositie van de oorspronkelijke lading met een dipool naar rechts. Rechts is analoog getoond hoe de verplaatsing van een  $-$ -lading naar links evenzo een superpositie met een dipool naar rechts is.

In een ionenkristal kan het elektrische veld tot *ionenpolarisatie* leiden. Daarbij worden de positieve ionen in de richting van het veld verplaatst over een afstand  $a$ , en de negatieve ionen tegen het veld in over een andere afstand  $a$  (zie fig. 4.10). Nu is een verplaatsing van een  $+$ -lading te zien als de superpositie van de oorspronkelijke toestand met een extra



a Zonder een elektrisch veld zitten de zwaartepunten van de ionen op een kubisch rooster.

b In een elektrisch veld van links naar rechts: de positieve ionen gaan met veld mee, de negatieve er tegenin.

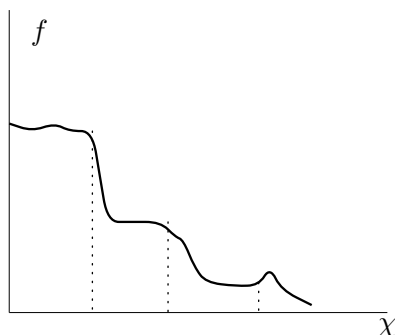
Figuur 4.10 Rangschikking van positieve ionen (•) en negatieve ionen (⊙) in een ionenkristal zonder en met beïnvloeding door een elektrisch veld.

dipool (zie ook fig. 4.11). Die bestaat uit twee ladingen die tegengesteld zijn: een  $-$ lading op de oorspronkelijke plaats (deze neutraliseert de oorspronkelijke lading) en een  $+$ lading op een afstand  $a$  (de verplaatste lading). De superpositie-dipool heeft een *dipoolmoment*  $p = Qa$ , wijzend van de  $-$  naar de  $+$ . Op analoge wijze kan de verplaatsing van een negatieve lading evenzo gezien worden als het gevolg van een extra dipool, gelijkgericht met die van de positieve lading.

**Voorbeeld Bariumtitaanaat** Bariumtitaanaat  $\text{BaTiO}_3$  heeft een relatieve diëlektrische constante 6000. Bereken de polarisatie, dipoolmoment en titaanverplaatsing (als  $\text{Ti}^{++++}$  t.o.v. de rest verplaatst) bij een veldsterkte  $10 \text{ kV/m}$ .

Uit  $\epsilon_r = 6000$  volgt  $\chi_e = \epsilon_r - 1 = 5999$ ; daarmee wordt de polarisatie  $P = \chi_e \epsilon_0 E = 5999 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 = 5,31 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$ . Voor het bepalen van de atomaire dipool  $p$  is nodig het aantal titaanatomen/ $\text{m}^3$ . In iedere elementaire  $\text{BaTiO}_3$  cel is één  $\text{Ti}^{++++}$ -ion. De massa van een cel is de som van de atoommassas van Ti, Ba en 3 O atomen: celmassa =  $(137,3 + 47,9 + 3 \cdot 16) \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,87 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ . Aantal cellen per  $\text{m}^3$   $N = \text{massadichtheid/celmasse} = 6017 / 3,87 \cdot 10^{-25} = 1,55 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$ . Uit polarisatie en deeltjesdichtheid volgt dan het dipoolmoment:  $p = P/N = 5,31 \cdot 10^{-4} / 1,55 \cdot 10^{28} = 3,4 \cdot 10^{-32} \text{ Cm}$ . Als alleen de zwaar geladen titaan ionen  $\text{Ti}^{++++}$  zijn verplaatst, is de verschuifafstand  $a = p/4e = 3,4 \cdot 10^{-32} / 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Cm/C} = 5,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ . Vergelijk deze verplaatsing met de atoomafstand  $4,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

**Opg 4.3.3 \*\*** Een plaatcondensator, met  $A = 1 \text{ dm}^2$  en  $l = 1 \text{ cm}$ , wordt met germanium gevuld. Als de spanning  $10 \text{ kV}$  is, bereken dan  
 a de polarisatie. [Antw.  $P = 1,33 \cdot 10^{-4} \text{ C/m}^2$  ]  
 b het atomaire dipoolmoment. [Antw.  $p = 3,02 \cdot 10^{-33} \text{ Cm}$  ]

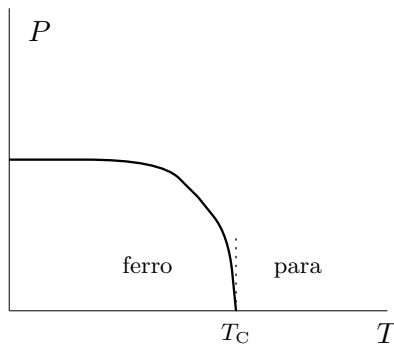


Figuur 4.12 De *elektrische gevoeligheid* van een diëlektrikum als functie van de frequentie; atoompolarisatie en gevoeligheid nemen af met de frequentie.

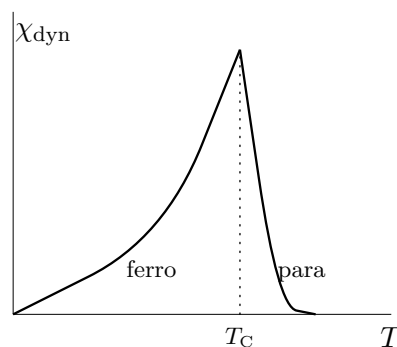
**Frequentiegevoeligheid** De gevoeligheid van de polarisatie voor de *frequentie* is eenvoudig te begrijpen met behulp van het nu geschetste model van het ontstaan van de polarisatie. Onder invloed van een elektrisch veld zullen ladingen gaan verschuiven. Bij lage frequenties zullen deze verschuivingen de orientatiewisselingen van het veld nog wel kunnen volgen. Naarmate de frequentie hoger wordt zullen de zwaardere ionen het veld niet meer

kunnen volgen en niet meer bijdragen tot de polarisatie. Bij hogere frequenties vallen ook de lichtere ionen af. Pas bij de zeer hoge frequenties, b.v.  $10^{16}$  Hz, zullen tenslotte ook de elektronwolken het veld niet meer kunnen volgen: er is dan geen enkele polarisatie meer over.

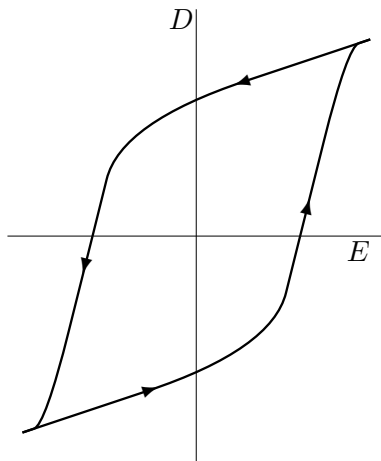
**Ferroelektrica, domeinen en Curietemperatuur** Wanneer een stof heel gemakkelijk polariseerbaar is, zoals bariumtitaanaat, is het mogelijk dat het ‘spontaan’ polariseert. Omdat dit precies zo gaat als bij de magnetische polarisatie spreekt men over *ferroelektricum* en de **ferroelektrische toestand**. Kenmerkend voor de ferroelektrische fase is, dat er *spontaan* gepolariseerde gebieden ontstaan, de zogenaamde **domeinen**, met de grootte van vele duizenden atoomafstanden. Onder invloed van sterke velden kunnen die worden ‘gelijkgericht’ waardoor de domeinen tot het hele kristal kunnen uitbreiden. De temperatuur-beweging is ook hier een versturende factor, die de atomaire dipolen desoriënteert (een hoge frequentie heeft hetzelfde effect), en de domeinen kleiner maakt. Boven de *Curietemperatuur*  $T_C$  zijn er geen grote domeinen meer, zodat de polarisatie *netto* nul wordt; de verschillende domeinen zelf blijven echter wel gepolariseerd. Men zegt dan dat het diëlektrikum in de **paraelektrische toestand** is. De afhankelijkheid van de polarisatie van het elektrische veld (de gevoeligheid) is ver van  $T_C$  klein: òf alles is al gepolariseerd, òf de domeinen zijn te klein geworden.



Figuur 4.13 Polarisatie  $P$  van een ferroelektricum als functie van de (absolute) temperatuur  $T$ ; beneden de Curietemperatuur  $T_C$  is de stof ferroelektrisch, met polarisatie en gerichte domeinen, erboven paraelektrisch met ongerichte domeinen.



Figuur 4.14 De (dynamische) gevoeligheid  $dP/dE$  als functie van de temperatuur  $T$ ; bij lage  $T$  zijn alle atomen volledig gepolariseerd, bij hoge  $T$  zijn de domeinen klein—in beide gevallen heeft het elektrische veld weinig invloed.



Figuur 4.15 Hysteresiskromme van een ferroelektrische stof; merk op, dat er geen gewone permittiviteit is (dan zou  $(D,E)$  een rechte lijn door de oorsprong zijn), doch slechts een 'dynamische'. De pijl geeft de richting van het doorlopen aan.

**Hysteresis** Een ander gevolg van de domeinen is het 'geheugeneffect': de **hysteresis** (of 'hysteresis'). Precies als bij magneten zal de polarisatie gedeeltelijk remanent zijn. De  $D$ - $E$  kromme zal een hysteresislus laten zien, waarvan het oppervlak gelijk is aan de energie die nodig is om alle domeinen in een  $m^3$  te richten. We zullen dat voor het belangrijkere magnetische geval nader uitwerken als we de ferromagnetische materialen behandelen. De resultaten daar, zoals het hysteresisenergieverlies, kunnen eenvoudig worden 'vertaald' naar de ferroelektrische toestand.

**Conclusie** Voor de goede werking van een diëlektricum moet het in de ferroelektrische toestand zijn met de temperatuur ver onder de Curie temperatuur  $T_C$ , waar de polarisatie verzadigd is. Boven  $T_C$ , in de paraelektrische toestand, verdwijnt de polarisatie. Rond  $T_C$  is de elektrische gevoeligheid het hoogst. In wisselvelden treden energieverliezen op door hysteresis.

**Opg 4.3.4** \* Een ferroelektricum

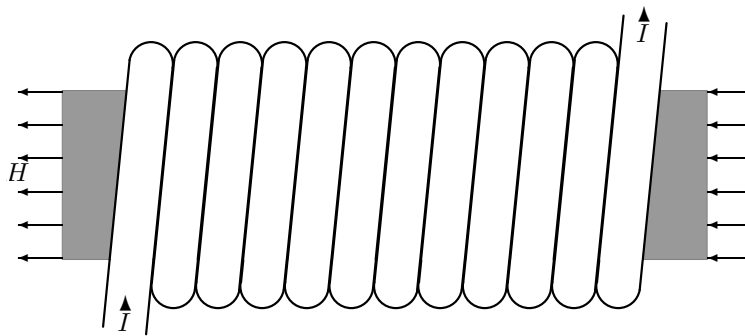
- A kan boven de Curie-temperatuur niet bestaan
- B kan onder de Curie-temperatuur niet bestaan
- C ontstaat onder invloed van een uitwendig magnetisch veld
- D bevat domeinen die gelijkgericht worden door de temperatuurbeweging

**Opg 4.3.5** \* De polarisatie van een medium;

- A is gelijk aan het elektrische dipoolmoment van het stuk medium
- B neemt toe met stijgende temperatuur
- C neemt toe met stijgende elektrische veldsterkte
- D tengevolge van elektronenwolkdeformatie, is gevoelig voor bestraling met licht dat een golflengte heeft groter dan die van ultra-violet licht

## 4.4 Spoelen

**Inleiding** Neem wat magnetiseerbaar materiaal (b.v. weekijzer, lucht, niets, ...) met doorsnede  $A$ , en wikkel daar ‘recht’standig omheen ideaal stroomdraad, zodat er  $N$  wikkelingen op de lengte  $l$  zijn: de **spoel** (zie fig. 4.16). Neem de lengte  $l$  groot genoeg ten opzichte van de doorsnede  $A$  om een homogeen veld te krijgen. De wikkeling wordt aangesloten op een ‘ideale’ stroombron  $I$  (eenheid Ampère = A). Hierdoor ontstaat na enige tijd een **magnetische flux**  $\Phi$  (eenheid Weber Wb) door de spoel (die buitenom weer terugloopt) met **magnetische fluxdichtheid**  $B = \Phi/A$  (eenheid Tesla T = Wb/m<sup>2</sup> = N/Am). Magnetische fluxdichtheid wordt ook genoemd **magnetische inductie**.



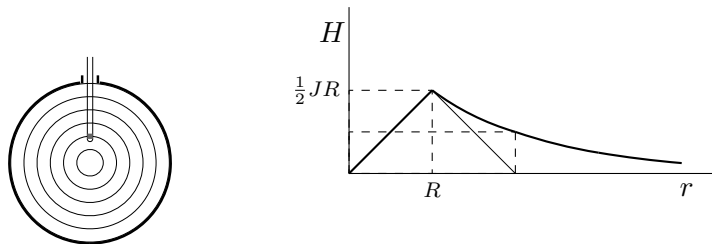
Figuur 4.16 Het principe van een spoel is dat de stroom  $I$  door de wikkelingen rond een magnetiseerbaar materiaal, een magnetische flux  $\Phi$  door de spoel opwekt. Merk op, dat bij een ideale spoel het magneetveld loodrecht staat op het elektrische veld in de stroomwikkelingen, dat de stroom drijft.

**Wet van Ampère** Een elektrische stroom  $I$  (eenheid Ampère A) is verbonden met een **magnetische veldsterkte**  $H$  (eenheid A/m). Bij iedere stroom-eenheid hoort een magnetisch veld dat om de stroom heen ‘circuleert’. De richting van de stroomsterkte bepaalt de circulatierichting van het veld met de schroefregel of kurketrekkerregel (zie fig. 4.16). De sterkte van het veld is evenredig met de stroomsterkte. Noemen we  $U_{\text{m rond}}$  de **magnetische spanning** rond de kring:  $U_{\text{m rond}} = \oint \underline{H} \cdot d\underline{l}$ . De magnetische spanning is op te vatten als de magnetische arbeid per magnetische eenheidslading om de kring rond te gaan (met als eenheid Ampère A). Daarbij telt voor de arbeid alleen de veldsterkte in de richting van de kring. Experimenteel geldt de **wet van Ampère**: de magnetische spanning rond de kring is gelijk aan de elektrische stroom die door de kring wordt omvat:

$$U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$$

- Opg 4.4.1** \* De wet van Ampère:  $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$ , geldt alleen  
 I voor magnetische veldlijnen die in een kring lopen  
 II met de schroefregel-tekenafspraken m.b.t. de omlooprichting en de oppervlakterichting van de kring.  
 A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar
- Opg 4.4.2** \*\* Drie lange evenwijdige draden a, b en c voeren stromen van resp. 6 A, 16 A en  $-12$  A. Bepaal de magnetische spanning:  
 a in een kring die a omsluit. [Antw.  $U_{\text{m rond}} = 6$  A]  
 b in een kring die a en b omsluit. [Antw.  $U_{\text{m rond}} = 22$  A]  
 c in een achtvormige kring die a en b omsluit. [Antw.  $U_{\text{m rond}} = 10$  A]  
 d in een kring die a, b en c omsluit, waarbij tweemaal rond a. [Antw.  $U_{\text{m rond}} = 16$  A]

**Voorbeeld Magnetisch veld rond stroom** Een stroom loopt homogeen, met stroomdichtheid  $J$ , door een cilindervormige vloeistof met straal  $R$  (zie fig. 4.17a). Bepaal het magnetische veld, zowel binnen als buiten de vloeistof



- a Dwarsdoorsnede van een met een vloeibare geleider gevulde cilinder. De (ionen)stroom erdoor veroorzaakt een circulerend magnetisch veld, dat kan worden gemeten door een, verticaal beweegbare, sensor.
- b De magnetische veldsterkte rond de as van een cilindervormige stroom als functie van de afstand  $r$  tot de as; de straal van de cilinder is  $R$ :

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} Jr & r < R \\ H &= I/2\pi r & r > R \end{aligned}$$

Figuur 4.17 Toepassing wet van Ampère bij stroom door vloeistof.

Om de veldsterkte op een punt op afstand  $r$  van de as te vinden passen we  $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$  toe op de veldlijn door dat punt. In alle gevallen is  $U_{\text{m rond}} = Hl$  ('arbeid = kracht maal weg'). De straal van de kring is  $r$ , de kringlengte  $l = 2\pi r$  en het kringoppervlak  $A = \pi r^2$ . De magnetische flux door een veldlijn in de vloeistof is verschillend: in de vloeistof is  $I_{\text{door}} = JA$ , buiten de vloeistof is  $I_{\text{door}} = I$ . Door de lengte  $l$  en het oppervlak  $A$  in te vullen vinden we het verband tussen magnetische veldsterkte  $H$  en de afstand tot het midden  $r$ :

$$H = \frac{1}{2} Jr \quad r < R$$

$$H = I/2\pi r \quad r > R$$

In het midden is dus geen veld; naar de vloeistofrand neemt de veldsterkte evenredig met de straal toe (tot aan de rand; zie fig. 4.17b). De veldsterkte is maximaal aan het vloeistofoppervlak. Daarbuiten neemt het veld weer af (omgekeerd evenredig met de straal).

**Opg 4.4.3 \*\*\*\*** Door een stroomdraad met cirkelvormige doorsnede gaat een stroom met stroomdichtheid  $J$ . Bepaal de magnetische veldsterkte  $H$  als functie van de afstand  $r$  tot het hart van de draad:

a voor  $r < a$ .

$$[\text{Antw. } H = \frac{1}{2} Jr]$$

b voor  $r > a$ .

$$[\text{Antw. } H = \frac{1}{2} Ja^2/r]$$

**Opg 4.4.4 \*\*\*\*** Een coaxiaal kabel voert door de kern, straal  $a$ , een stroom  $I$ . Door de mantel, binnenstraal  $b$  en buitenstraal  $c$ , gaat de keerstroom  $-I$ . Bepaal de magnetische veldsterkte als functie van de afstand  $r$  tot het hart van de kabel voor punten:

a in de kern.

$$[\text{Antw. } H = Ir/2\pi a^2]$$

b tussen kern en mantel.

$$[\text{Antw. } H = I/2\pi r]$$

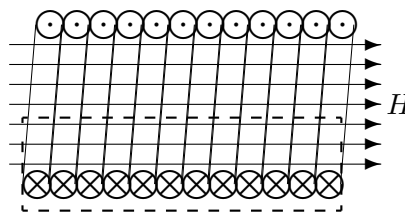
c buiten de mantel.

$$[\text{Antw. } H = 0]$$

**Veldsterkte in ideale spoel** We bepalen het magnetische veld in de *spoel* met behulp van de wet van Ampère. We nemen gemakshalve een *ideale spoel* aan, zodat de veldsterkte  $H$  buiten het magnetiseerbare materiaal verwaarloosbaar is en er binnen in een homogeen magneetveld heerst (er is dus nauwelijks fluxverlies aan de uiteinden van de spoel).

Bezie nu een veldlijn door de spoel die we buitenom op de een of andere manier laten teruglopen. Daarvoor hebben we:  $U_{\text{m rond}} = Hl$ , omdat er alléén veld binnen de spoel is, en  $I_{\text{door}} = NI$ , omdat iedere wikkeling één keer door deze kring gaat (zie bijgaande figuur). Uit de wet van Ampère volgt de *magnetische veldsterkte* in een ideale spoel:

$$Hl = NI \quad \text{of} \quad H = NI/l$$



Figuur 4.18 Doorsnede van een spoel loodrecht op de magnetische flux; we mogen aannemen dat het magnetische veld buiten de spoel verwaarloosbaar is, en erbinnen homogeen.

**Opg 4.4.5 \*\*** Een spoel met een lengte van 1 m draagt 400 windingen. Bereken de magnetische veldsterkte als de stroomsterkte 6 A is.

$$[\text{Antw. } H = 2400 \text{ A/m}]$$



**Opg 4.4.6 \*\*** Een ringvormige solenoïde draagt 400 windingen. Bereken de magnetische veldsterkte op de hartlijn, waarvan de diameter 32 cm is, als de stroomsterkte 8 A is. [Antw.  $H = 3180 \text{ A/m}$ ]

**Permeabiliteit** Experimenteel blijkt voor de meeste materialen dat er een evenredigheid is tussen de ‘veld hoeveelheid’, bepaald door de *magnetische fluxdichtheid*  $B$ , en de ‘veld sterkte’, bepaald door de magnetische veldsterkte  $H$ :

$$B = \mu H$$

De evenredigheidsconstante  $\mu$  heet **permeabiliteit** (de griekse ‘mu’ staat voor het latijnse (per-)‘meabilis’, ‘doordringbaar’) De eenheid van  $\mu$  is  $\text{N/A}^2 = \Omega\text{s/m} = \text{H/m}$ ; op de ‘Henry-eenheid’ komen we terug. De permeabiliteit wordt meestal vergeleken met de waarde in vacuüm. Maxwell heeft aangetoond dat de **permeabiliteit in vacuüm**  $\mu_0$  de waarde kan worden gegeven:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

Deze waarde is grotendeels het gevolg van de gekozen eenheid voor stroom A (of, zo je wilt, van de gekozen eenheid voor lading C).

**Relatieve permeabiliteit en gevoeligheid** De **relatieve permeabiliteit** van een materiaal  $\mu_r$  is de verhouding met die van vacuüm:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

De verhouding  $\mu_r$  is natuurlijk eenheidsloos. Het is praktisch om alleen de bijdrage van het materiaal te geven, dus de vacuumbijdrage tot  $\mu_r$  eraf

<i>materiaal</i>	$\chi_m$	<i>materiaal</i>	$\chi_m$
		Al	$+0,7 \cdot 10^{-6}$
super-malloy	$8 \cdot 10^5$	Cu	$-0,1 \cdot 10^{-6}$
ferro-metaal	$1 \cdot 10^5$	Ag	$-0,2 \cdot 10^{-6}$
weekijzer	$6 \cdot 10^3$	water	$-0,7 \cdot 10^{-6}$
Ni	$3 \cdot 10^2$	olie	$-0,1 \cdot 10^{-6}$
Co	$2 \cdot 10^2$	lucht	$+29 \cdot 10^{-6}$
		Si	$-0,1 \cdot 10^{-6}$
		Ge	$-1,1 \cdot 10^{-6}$

Tabel 4.2 Magnetische gevoeligheid  $\chi_m = \mu_r - 1$  voor verschillende soorten materialen bij kamertemperatuur en niet te hoge frequenties; links de *ferromagneten* met hoge, maar frequentieafhankelijke, gevoeligheid, rechts para- en diamagneet met geringe gevoeligheid.

te trekken. In vacuüm is, per definitie,  $\mu_r = 1$ , dus is de materiaalfhankelijke **magnetische gevoeligheid**  $\chi_m$  of magnetische susceptibiliteit ('gevoeligheid' in het latijn) gelijk aan:

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

De magnetische gevoeligheid is sterk temperatuurafhankelijk en gevoelig voor de frequentie van de stroom in de spoel (zie tabel 4.2). Bijzonder is, dat voor sommige materialen ook de 'voorbehandeling' van het materiaal van invloed is. Dat heeft hysteresis effect bij de ferromagneet ten gevolge, waarop we terug komen.

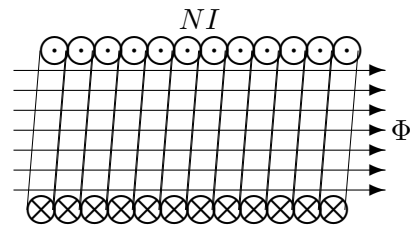
- Opg 4.4.7** \*\* Een zeer lange rechte solenoïde ( $\mu_r = 1$ ) draagt 6 windingen per cm. De diameter der windingen is 6 cm. Hoe sterk moet de stroom in deze windingen zijn opdat de totale magnetische flux door de solenoïde  $8 \cdot 10^{-6}$  Weber zal bedragen? [Antw.  $I = 3,76$  A]

**Zelfinductie** Uit de wet van Ampère volgt dat de magnetische flux  $\Phi$  in de spoel en de elektrische stroom  $I$  door de wikkelingen evenredig moeten zijn. In verband met later te beschrijven inductieverschijnselen zullen we liever de som van alle fluxen door iedere wikkeling beschouwen; dus voor de *ideale spoel* met  $N$  wikkelingen is de totale flux  $N\Phi$ . De totale *magnetische flux* is evenredig met de stroom, met als evenredigheidsconstante de **zelfinductie**  $L$ ; voor de *ideale spoel*:

$$N\Phi = LI$$

De materiaalfhankelijke  $L$  heeft als eenheid 'Henry'  $H = J/A^2 = \Omega s$ . De evenredigheid tussen flux en stroom is natuurlijk een rechtstreeks gevolg van het superpositie beginsel voor stromen en magnetische velden!

- Opg 4.4.8** \*\* Een spoel heeft 400 wikkelingen. Als men er een stroom van 6A doorzendt, dan is de omsloten flux  $2,4 \cdot 10^{-5}$  Wb. Bereken de zelfinductie. [Antw.  $L = 1,60$  mH]



Figuur 4.19 De stroom  $I$  in de kring veroorzaakt een magnetische flux  $\Phi$ , door zijn eigen oppervlak, die met  $I$  evenredig is; de richting van het veld is door de kurkentrekkerregel bepaald.

- Opg 4.4.9 \*\*** De zelfinductie van een spoel is 10 mH. De spoel bestaat uit 100, dicht op elkaar gewonden, windingen. Bereken de magnetische flux door de spoel bij een stroom van 0,5 mA. [Antw.  $\Phi = 50 \text{ nWb}$ ]

**Zelfinductie ideale spoel** Eerder hebben we gezien welke waarde het veld in een *ideale spoel* heeft. Door invullen daarvan kunnen we de zelfinductie *van de ideale spoel* uitdrukken in de permeabiliteit  $\mu$  van het gebruikte vulmateriaal, de doorsnee  $A$  en lengte  $l$  van de ruimte en het aantal wikkelingen  $N$  rondom:

$$L = \mu \frac{A}{l} N^2 \quad \text{ideale spoel}$$

Vergelijk dit met de uitdrukking voor geleidbaarheid en capaciteit in de geometrische vergelijkbare gevallen: we zien dezelfde soort vergelijking, afgezien van het aantal wikkelingen. De permeabiliteit is dus op te vatten als de soortelijke geleidbaarheid = doordringbaarheid voor de magnetische flux. Echter: een inductie *in een schakeling* gedraagt zich als een *weerstand*, zoals we later zullen zien.

Praktisch is bij een spoel van belang de *spoel*  $N/l$ ; de zelfinductie kan daarin als volgt worden uitgedrukt:

$$L = \mu(N/l)^2 V$$

met  $V = Al =$  het volume van de spoel. In tegenstelling tot bijvoorbeeld bij de capaciteit zien we dat de zelfinductie evenredig is met het *volume* van de spoel. Daaruit kunnen we aanvoelen dat de zelfinductie is op te vatten als het vermogen van een spoel om magnetische flux op te nemen. We komen hierop terug.

- Opg 4.4.10 \*** De zelfinductie is op te vatten als het magnetisch analogon van:
- A capaciteit
  - B polarisatie
  - C weerstand
- Opg 4.4.11 \*\*** Bereken de zelfinductie van een ijzervrije spoel met 400 windingen van 5 cm diameter, als het aantal windingen 7/cm bedraagt. [Antw.  $L = 0,691 \text{ mH}$ ]
- Opg 4.4.12 \*\*\*\*** Een spoel met een zelfinductie van 0,005 H heeft een diameter van 4 cm en een lengte van 50 cm. Hoe groot is de magnetische inductie in die spoel, als er een stroom van 8 A doorgaat? [Antw.  $B = 25,3 \text{ mT}$ ]

- Opg 4.4.13** \*\* Een spoel bestaat uit 1000 windingen rond een 10 cm lange ijzeren ( $\mu_r = 1000$ ) staaf met een diameter van 1,13 cm. De zelfinductie is:
- A  $1,26 \cdot 10^{-6}$  H
  - B  $1,00 \cdot 10^{-4}$  H
  - C 1,26 H
  - D 100 H
- Opg 4.4.14** \*\*\*\* Om een zeer lange ijzeren pin, met relatieve permeabiliteit van 1000, wordt een koperdraad met een diameter van 1 mm en een lengte van 1000 cm stijf gewonden, zodat er precies 1000 windingen ontstaan.
- a bereken de lengte van de spoel. [Antw.  $l = 1$  m]
  - b bereken de (flux)diameter van de spoel. [Antw.  $d = 2,18$  mm]
  - c bereken de zelfinductie. [Antw.  $L = 4,69$  mH]

## 4.5 Magnetische veldenergie

### 4.5.1 Inductiespanning

**Wet van Lenz** Het vullen van de spoel met een magnetisch veld zal elektrische energie kosten. We moeten immers de stroom door de wikkelingen van de spoel tot de gewenste sterkte opvoeren teneinde het magnetische veld in de spoel aan te brengen. Nu lijkt dat gemakkelijk te gaan, want meestal mogen we de weerstand van de wikkelingen verwaarlozen. Maar in werkelijkheid ontstaat er een tegenwerkende ‘kracht’ die wordt beschreven door de **wet van Lenz**: iedere *verandering* van stroom zal een *tégenwerkende inductiespanning* opwekken. De *wet van Faraday* gaat een stap verder door de grootte aan te geven: de opgewekte inductiespanning (in een kring) is gelijk aan de afname per seconde van de *magnetische flux* (door die kring).

**Inductiespanning in een spoel** Stel dat we de stroom door de spoel in stapjes  $dI$  opvoeren. Bij een ideale spoel wordt de magnetische flux  $\Phi = \Phi_{\text{door}}$  door de wikkelingen bepaald door de zelfinductie  $L$  volgens:  $N\Phi = LI$ . De stroomverandering  $dI$  heeft een bijpassende verandering van flux  $d\Phi$  door de spoel tot gevolg; per seconde geldt in de ideale spoel:

$$N \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

Volgens de wet van Faraday is er in *iedere* wikkeling van de stroomdraad een inductiespanning  $-d\Phi/dt$ ; al die  $N$  inductiespanningen staan in serie, zodat de totale **inductiespanning**  $U$  over de spoel gelijk is aan het linkerlid van bovenstaande vergelijking. Voor de inductiespanning in een *ideale spoel* geldt dus:

$$U = -L \frac{dI}{dt}$$

Dit is de voor de elektrotechniek zo belangrijke vergelijking die het verband tussen stroom en spanning in een spoel aangeeft.

**Spanningsval over een spoel** Vergelijk het verband tussen stroom en inductiespanning bij de spoel met die bij een weerstand, de wet van Ohm  $U = RI$ . Maar pas op: bij de weerstand betekent  $U$  *niet* inductiespanning, maar *spanningsval* over de weerstand, in de stroomrichting gemeten. De door inductiespanning in de stroomwikkelingen veroorzaakte *spanningsval* over de spoel wordt aangegeven met  $U_L$ ; dus is  $U = -U_L$ . Voor de **spanningsval**  $U_L$  over de ideale spoel geldt:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

**Voorbeeld Stroomcommutatie spoel** De stroom van 1 A door een spoel met 2 mH inductie wordt gecommuteerd (van richting gewisseld) in 0,1 s. Welke spanningsval ontstaat over de spoel?

Volgens de wet van Faraday geldt  $U_L = LdI/dt$ . In dit geval is in de tijd  $dt = 0,1$  s de stroomtoename  $dI = (-1 - (+1)) = -2$  A. De spanningsval over de spoel wordt:

$$U_L = 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{-2}{0,1} = 40 \text{ mV}$$

- Opg 4.5.1** \* Hoe kan je 50 V spanningsval krijgen over een inductantie van 2 H, ondanks dat die een verwaarloosbare weerstand heeft?
- Opg 4.5.2** \* In 'een' diktaat staat over inductiespanning: ' $V_{\text{ind}} = LdI/dt$ '. Kennelijk geldt dat:
- A de stroom toenemend is
  - B de stroom afnemend is
  - C de stroom en de spanning in dezelfde richting positief zijn
  - D de stroom en de spanning in tegengestelde richting positief zijn
- Opg 4.5.3** \*\* Een spoel heeft een lengte van 30 cm en een diameter van 3 cm; als men de stroom in die in 0,01 s met 2 A verandert, dan treedt een gemiddelde inductiespanning van 1,5 V op. Hoeveel windingen heeft die spoel als  $\mu = 900$ ? [Antw.  $N = 53$ ]
- Opg 4.5.4** \*\* Een solenoïde met een lengte van 30 cm en een oppervlakte van elke winding van  $6 \text{ cm}^2$  bestaat tussen de punten P en Q uit 100 windingen, en 50 tussen Q en R. De solenoïde is gelijkmatig rechtsom gewikkeld. De solenoïde bevat een gelamelleerde weekijzeren kern ( $\mu_r = 1000$ ); verwaarloos hysteresis-effecten. De stroomsterkte van P naar R bedraagt 2 A, waarbij Q is geaard. Verwaarloos de weerstand van de windingen.
- a Bereken de totale zelfinductie. [Antw.  $L = 56,5 \text{ mH}$ ]
  - b Indien de stroomsterkte in  $1/50$  s tot de waarde nul daalt, hoe groot zijn dan gedurende deze periode de gemiddelde potentialen van P en R? [Antw.  $V_P = -3,77 \text{ V}$ ;  $V_R = +1,88 \text{ V}$ ]
  - c Als in  $1/50$  sec de stroom volledig wordt gecommuteerd i.p.v. uitgeschakeld, hoe groot zijn dán de gemiddelde potentialen van P en R?

**Magnetische veldenergie spoel** De *spoelenergie* is gelijk aan de elektrische arbeid die het heeft gekost om de stroom in de spoel daadwerkelijk te laten *toenemen*. De batterij die de stroom toename levert is een 'spanningsbron' die de door de stroomtoename opgewekte inductiespanning  $U = -LdI/dt$  in de stroomkring moet opheffen. De (tegen) spanningsbron ter grootte  $-U = LdI/dt$  laat dan alle stroom  $I$ , inclusief de toename die de inductiespanning veroorzaakte, door de spoel gaan. Daarbij is het aan de spoel *geleverde* vermogen  $P$ :

$$P = (-U)I = L \frac{dI}{dt} I = LI \frac{dI}{dt}$$

Kijk nu niet per seconde, maar let alleen op de verandering; gebruik verder dat per definitie  $dP = dW/dt$ . Dan geldt voor de totale geleverde extra energie  $dW$ :

$$dW = LI dI$$

De totale geleverde energie  $W$  vanaf de stroom nul situatie kan eenvoudig worden gekregen door alle bijdragen  $dW$  op te tellen; wiskundig betekent dat 'te integreren naar  $I$ '. In de veronderstelling dat  $L$  constant is:

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

De door de spanningsbron geleverde elektrische energie is geheel omgezet in **magnetische veldenergie** van het magnetische veld in de spoel. De spoel is dus op te vatten als een opslagruimte voor magnetische veldenergie.

**Opg 4.5.5 \*\*** Een grote elektromagneet heeft een inductie van 5 H.

- Hoeveel magnetische energie is er in de spoel van de magneet opgeslagen wanneer daar 10 A stroom door wordt gevoerd? [Antw.  $W = 250$  J]
- Bij een stroomonderbreking valt de stroom in 0,05 s terug tot 1 A. Bereken de inductiespanning die dan wordt opgewekt.

[Antw.  $U = 900$  V]

**Magnetische veldenergiedichtheid** Dat de spoel inderdaad een opslagmedium is voor magnetische veldenergie wordt nog duidelijker door te beseffen dat de opgeslagen veldenergie evenredig is met het volume van de spoel  $V = Al$ . Immers, bij een ideale spoel is de zelfinductie  $L$  evenredig met het volume  $V$  van de spoel (zie pagina 227). Voor de ideale spoel met  $N$  wikkelingen, spoellengte  $l$ , doorsnede oppervlak  $A$  en permeabiliteit  $\mu$  is de zelfinductie  $L = \mu(N/l)^2V$ . De **magnetische veldenergiedichtheid**  $w$ , de veldenergie per volume, van de ideale spoel wordt  $w = W/V = \frac{1}{2}(L/V)I^2 = \frac{1}{2}\mu(N/l)^2I^2 = \frac{1}{2}\mu(NI/l)^2$ . In de ideale spoel is de veldsterkte bepaald door  $NI = Hl$ , zodat  $NI/l = H$ . We mogen concluderen dat alleen de veldsterkte  $H$  van een magnetisch veld de **magnetische veldenergiedichtheid**  $w = dW/dV$  bepaalt:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

Let op de overeenkomst met andere soorten energie zoals 'bewegingsenergie  $\frac{1}{2}mv^2$ ', 'draaiingsenergie  $\frac{1}{2}J\omega^2$ ' en niet te vergeten het elektrische veld met 'veldenergiedichtheid  $w = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ '.

Bovenstaande energiedichtheid is afgeleid voor materialen met een evenredig verband tussen  $B$  en  $H$ . Is die evenredigheid er niet, zoals bij magnetische materialen, dan moeten de betrekkingen worden aangepast: er

is immers geen  $\mu$  waarde in die gevallen. We zullen dat bijzondere geval in de volgende paragraaf behandelen.

**Conclusie** *In een spoel met inductie  $L$  is een hoeveelheid magnetische energie opgeslagen met magnetische energiedichtheid:*

$$w = dW/dV = \frac{1}{2}\mu H^2$$

*De totale energie kan worden uitgedrukt in de stroomsterkte  $I$  als*

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

*De energie van de spoel zorgt bij stroomverandering voor een spanningsval  $U_L$  over de spoel ter grootte:*

$$U_L = LdI/dt$$

**Opg 4.5.6 \*\*\*\*** De zelfinductie van een spoel kan ook als volgt worden berekend:

De energie van het veld in de spoel is gelijk te stellen aan  $\frac{1}{2}LI^2$ .

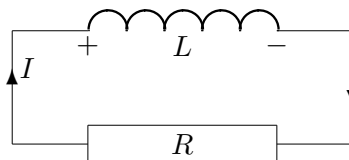
Bepaal op die manier de zelfinductie van de toroïde spoel met een gemiddelde lengte  $l$ , een oppervlak doorsnede  $A$ , met  $N$  windingen en een stroom  $I$  voerend.

**Opg 4.5.7 \*\*\*\*** Een spoel bestaat uit 1000 windingen, waarvan 500 heen gewonden en 500 terug, rond een lange kunststof ( $\mu_r = 1$ ) staaf met een diameter van 4 cm en een lengte van 40 cm. Als door de spoel een stroom van 5 A gaat, dan is de magnetische veldenergiedichtheid in de spoel: (in J/m<sup>3</sup>)

- A 0
- B  $4,9 \cdot 10^{-2}$
- C  $9,8 \cdot 10^1$
- D  $7,8 \cdot 10^7$

**Tijdconstante LR-kring** De in een spoel opgeslagen magnetische energie kan wegebben over een weerstand, die de gedaante kan hebben van een lekweerstand  $R$ . Omdat *spoel* en weerstand in serie staan, en er geen andere bronspanningen zijn dan de inductiespanning, moet de spanning(sval) over de lekweerstand  $U_R = RI$  tegengesteld zijn aan de spanning(sval) over de spoel  $U_L = LdI/dt$ . De stroom moet dus voldoen aan:

$$RI = -L \frac{dI}{dt}$$



Figuur 4.20 Principe schakeling voor de tijdconstante van een spoel met zelfinductie  $L$  en lekweerstand  $R$ : de magnetische veldenergie uit de spoel wordt door de lekstroom in de weerstand omgezet in warmte. De karakteristieke tijd daarvan is  $L/R$ .



met zelfinductie  $L$ . Deze *differentiaalvergelijking* voor de onbekende stroom  $I$  met als variabele de tijd  $t$  heeft precies dezelfde vorm als die voor de lading op de condensator die over een weerstand weglekt. De oplossing gaat dus op dezelfde manier:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \rightarrow I = I(0)e^{-\frac{t}{L/R}}$$

Na de tijd gelijk aan de *tijdconstante*  $\tau$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

is de stroom met een factor  $e$  afgenomen; na 5 ( $7$ ) is de stroom afgenomen tot 1 procent (promille) van de oorspronkelijke waarde. Merk op, dat het weglekken met exponentieel verval nogal snel zal gaan, aangezien meestal de zelfinductie klein en de weerstand nogal groot is.

- Opg 4.5.8 \*\*** Een ijzervrije spoel bestaat uit 500 windingen (één laag) van 8 cm diameter. De draaddikte is 1,5 mm, de dikte van de isolerende laag om de draad is 0,25 mm. De soortelijke weerstand van het koper is  $1/60 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$ .
- Bereken uit de lengte en de doorsnede van de draad de weerstand  $R$  van de draad. [Antw.  $R = 1,18 \Omega$ ]
  - Bereken uit de lengte en de doorsnede van de spoel de zelfinductie  $L$  van de spoel. [Antw.  $L = 1,57 \text{ mH}$ ]
  - Bereken de tijdconstante  $\tau$  van deze spoel. [Antw.  $\tau = 1,33 \text{ ms}$ ]

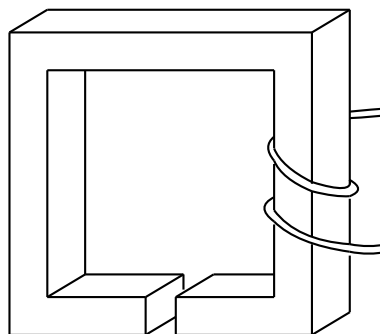
- Opg 4.5.9 \*\*** Een spoel heeft een te bepalen zelfinductie  $L$  en een weerstandswaarde  $R$  van  $0,1 \text{ m}\Omega$ . De spoel is met een magnetisch veld gevuld door een stroom van  $2,71 \text{ A}$ . 10 s nadat ze is kortgesloten blijkt de stroom te zijn teruggelopen tot een waarde van  $1 \text{ A}$ . De waarde van  $L$  in  $\mu\text{H}$  is:
- 1
  - 10
  - 100
  - 1000

- Opg 4.5.10 \*\*\*** Een zelfgemaakte spoel bestaat uit een koperdraad die stijf om een spijker is gewonden. Neem aan dat de tijdconstante van deze spoel hoofdzakelijk wordt bepaald door de zelfinductie en de weerstand van de draadwindingen. Als het aantal windingen wordt verdubbeld, dan zal de tijdconstante:
- verviervoudigen
  - verdubbelen
  - gelijk blijven
  - halveren

### 4.5.2 Magnetische veldkracht

#### Ideale magnetische kring

Neem een staaf ijzer en buig die zo, dat de uiteinden elkaar bijna raken. Als we om de staaf een koperdraad wikkelen en daardoor stroom voeren, dan ontstaat daar een magnetisch veld. Dat veld zal grotendeels beperkt blijven tot het ijzer, de **kern**, behalve daar waar de flux ‘tijdelijk’ de **luchtspleet** oversteekt. We constateren dat het ijzer een elektromagneet wordt met de uiteinden als **polen**. Dat het veld beperkt blijft tot het magnetiseerbare materiaal, komt doordat het veel liever door ijzer loopt dan door lucht.



Figuur 4.21 Magnetische kring: de stroom door de windingen rond een magnetiseerbaar materiaal wekt daarin een magnetische flux op; zo ontstaat een sterk magnetisch veld in de luchtspleet.

In een *magnetische kring* loopt een constante magnetische flux  $\Phi$ . Verder wordt verondersteld dat de flux *homogeen* over de doorsnee van de kern en luchtspleet wordt verdeeld. De luchtspleet houden we daartoe zó smal, dat het veld daar nauwelijks zal uitwaaieren; (de homogeniteit daar is natuurlijk wat minder realistisch dan in de kern, maar vanwege de eenvoud gedaan). Voor de magnetische fluxdichtheid  $B$  door een doorsnee  $A$  geldt dan:

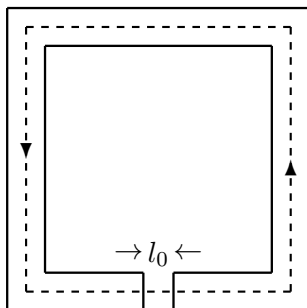
$$\Phi = BA$$

De fluxdichtheid bij de polen in kern of luchtspleet zijn gelijk. De *magnetische fluxdichtheid* in de kern kan vergroot worden door een insnoering te maken: de polen van magneten worden niet voor niets zo klein mogelijk gehouden.

**Ampèrewikkelingen** De stroom bepaalt de magnetische flux. De ‘bronwet’ van Ampère leert ons dat  $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$  voor een willekeurige kring. We passen dat toe op een heel voor de hand liggende kring: de gemiddelde veldlijn (door het midden). De stroom door de kring bestaat eenvoudig uit alle windingen één keer:  $I_{\text{door}} = NI$ . Men noemt het produkt van windingen en stroomsterkte  $NI$  wel het aantal **ampèrewikkelingen**. Voor de kring geldt:

$$U_{\text{m rond}} = NI$$

**Magnetische weerstand** Voor een ‘ideale magnetische geleider’ is de evenredigheidsconstante tussen de *magnetische spanning*  $U_{\text{m rond}}$  in de kring en de magnetische ‘stroom’  $\Phi$  door de kring de **magnetische weerstand**  $R_{\text{m}}$  van de kring:



Figuur 4.22 De gemiddelde veldlijn door ijzer,  $l_1$ , en lucht,  $l_0$ , bij een magnetische kring; let erop dat het *aantal* veldlijnen niets zegt over de sterkte van het veld in de luchtspleet.

$$R_{\text{m}} = \frac{U_{\text{m rond}}}{\Phi}$$

Immers, de magnetische spanning  $U_{\text{m rond}} = NI$  drijft de flux  $\Phi$  door de kring en de flux wordt bepaald door de zelfinductie  $L$ :  $N\Phi = LI$ . Daaruit volgt onafhankelijk van de stroom het verband tussen magnetische weerstand en zelfinductie:

$$R_{\text{m}} = N^2/L$$

De eenheid van magnetische weerstand is  $\text{A/Wb} = \text{A/Vs} = 1/\Omega\text{s} = 1/\text{H}$ : de magnetische weerstand is een omgekeerde inductie. In onze kring bestaat de veldlijn uit twee delen, het deel met lengte  $l_0$  door de lucht, en het deel met lengte  $l_1$  door het ijzer. Dus geldt:

$$U_{\text{m rond}} = H_0 l_0 + H_1 l_1$$

De veldsterkte is evenredig met de fluxdichtheid—en bij constante doorsnede dus ook met de flux. Substitutie van  $H = B/\mu$  en  $B = \Phi/A$  geeft:

$$\begin{aligned} U_{\text{m rond}} &= \frac{\Phi}{\mu_0 A_0} l_0 + \frac{\Phi}{\mu_1 A_1} l_1 \\ &= \left( \frac{l_0}{\mu_0 A_0} + \frac{l_1}{\mu_1 A_1} \right) \Phi; \end{aligned}$$

de *magnetische weerstand* van de magnetische kring bestaat uit twee ideale magnetische weerstanden in serie. Voor de **ideale magnetische weerstand** geldt:

$$R_{\text{m}} = \frac{1}{\mu} \frac{l}{A}$$

De magnetische weerstand is evenredig met de lengte  $l$ , omgekeerd evenredig met de doorsnede  $A$  en de permeabiliteit  $\mu$ , zoals te verwachten was naar analogie met de ‘gewone’ ideale weerstanden en condensatoren.

## Opg 4.5.11 \*\*

De getekende elektromagneet heeft een ijzeren kern met relatieve permeabiliteit  $\mu_r = 800$  en een vierkante doorsnede  $100 \text{ cm}^2$ . De gemiddelde veldlijn is  $2 \text{ m}$  lang, inclusief de spleet van  $2 \text{ cm}$ .

- a \*\* Als in de spleet een veld van  $B_0 = 0,5 \text{ T}$  heerst, hoe groot is  $B$  dan in het ijzer?

[Antw.  $B = 0,5 \text{ T}$ ]

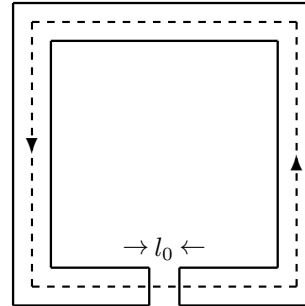
- b \*\* Welke waarden hebben de veldsterkten  $H_0$  in de spleet resp.  $H$  in het ijzer?

[Antw.  $H_0 = 379,9 \text{ kA/m}$ ;

$H = 0,497 \text{ kA/m}$ ]

- c \*\*\*\* Hoeveel ampere windingen ( $= NI$ ) zijn nodig om dat veld te maken?

[Antw.  $NI = 8,952 \text{ kA}$ ]



Opg 4.5.12 \*\* Een weekijzeren ring met cirkelvormige doorsnede van  $4 \text{ cm}^2$  en een gemiddelde lengte van  $30 \text{ cm}$  is op een plek omwikkeld met  $50$  windingen. De relatieve permeabiliteit is  $\mu_r = 1250$ .

- a Hoeveel stroom is nodig om een flux van een  $0,5 \text{ mWb}$  te krijgen?

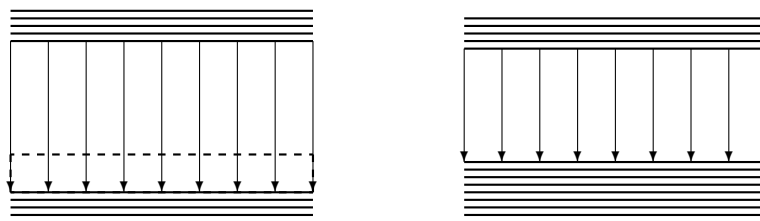
[Antw.  $I = 4,77 \text{ A}$ ]

- b Als nu uit de ring een schijfje van  $1 \text{ mm}$  wordt gezaagd, hoeveel stroom is er dán nodig?

[Antw.  $I = 24,7 \text{ A}$ ]

Opg 4.5.13 \*\* Een variabele inductantie wordt verkregen door een variabele luchtspleet te maken in de kern van een spoel. De kern is  $30 \text{ cm}$  lang, en heeft een  $\mu_r = 1000$ . Zonder spleet is de zelfinductie  $2 \text{ H}$ ; hoe groot zal de spleet zijn als de zelfinductie is teruggelopen tot  $1 \text{ H}$ ? [Antw.  $l_0 = 0,3 \text{ mm}$ ]

**Magnetische aantrekking** We zullen nu bepalen welke kracht een magnetisch veld kan uitoefenen op een ander stuk magnetiseerbaar materiaal dat in de buurt is. Denk aan het aantrekken van ijzer door een magneet op korte afstand. Duidelijk heeft dat met de veldsterkte  $H$  van het veld in de lucht te maken. Maar hoe, en welke rol speelt de magnetiseerbaarheid van het materiaal? Papier wordt immers niet aangetrokken. Het blijkt heel eenvoudig deze vraag te beantwoorden als we kijken naar de veldenergie. Stel dat de magneet een magnetische kracht  $F$  uitoefent op het materiaal (die kracht is natuurlijk wederzijds(!), maar we denken de magneet in een *gefixeerde* positie). Dan zal bijvoorbeeld het materiaal een afstand  $dx$  dichterbij komen door de magnetische arbeid  $dW = Fdx$ . Die magnetische energie is afkomstig van de magnetische veldenergie uit het volume  $dV = Adx$ , oorspronkelijk ‘bezet’ door de lucht ‘0’, later door het materiaal ‘1’. En in lucht is een ander veld dan in het materiaal.



a De ruimte tussen een magneet en een magnetiseerbaar materiaal '1' met permeabiliteit  $\mu_1$  wordt door het veld gevuld.

b Door de magnetische aantrekkingskracht is een deel van het 'magnetische veld in lucht' vervangen door het 'magnetische veld in magnetisch materiaal'.

Figuur 4.23 Het verband tussen de magnetische aantrekking en de energie van het magnetische veld.

**Magnetische kracht** We bepalen nu de magnetische kracht met het aangegeven principe. In het 'luchtvolume' zat een hoeveelheid magnetische veldenergie  $dW_0$ , zeg, terwijl daar na de aantrekking een veld met veldenergie  $dW_1$  is gekomen. Uit de energieomzetting volgt:

$$Fdx = dW_0 - dW_1 \rightarrow F = \frac{dW_0}{dx} - \frac{dW_1}{dx}$$

Gebruiken we de energiedichtheid  $w = dW/dV = \frac{1}{2}B^2/\mu$ , dan is wordt de veldenergie van het deelvolumen

$$dW = wdV = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} A dx \rightarrow \frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} A$$

De **magnetische kracht** per oppervlakte wordt:

$$F/A = \frac{1}{2} \left( \frac{B_0^2}{\mu_0} - \frac{B_1^2}{\mu_1} \right)$$

In de meeste gevallen zal de magnetische flux loodrecht op het oppervlak staan, zodat de fluxdichtheid constant blijft; de kracht van een *magnetische flux loodrecht op het oppervlak*:

$$F/A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_1} \right) B^2$$

Merk op, dat bij magnetische materialen de waarde van  $\mu_1 \gg \mu_0$ , zodat  $1/\mu_1$  verwaarloosbaar is t.o.v.  $1/\mu_0$ . We concluderen dat bij goed magnetiseerbare materialen de kracht maximaal wordt, bepaald door lucht. Bij zwak magnetiseerbaar materiaal wordt de kracht echter bepaald door de magnetische gevoeligheid, omdat het verschil telt.

- Opg 4.5.14** \*\* Bereken de magnetische kracht die een magneet met een pooloppervlak van  $2 \text{ cm}^2$ , waaruit een magnetische flux komt met een dichtheid van  $0,1 \text{ T}$ , uitoefent op een stuk ijzer vlak erbij. [Antw.  $F = 0,80 \text{ N}$ ]
- Opg 4.5.15** \*\* Bereken de magnetische kracht die de twee polen bij de luchtspleet van opgave 4.5.12b op elkaar uitoefenen. [Antw.  $F = 0,20 \text{ kN}$  (!)]
- Opg 4.5.16** \*\* Om beide polen van een hoefijzermagneet, met  $\mu_r = 900$ , zijn stroomwikkelingen aangebracht, in totaal tot  $600$  Amprewindingen. Het doorsnedeoppervlak van de magneet is  $4 \text{ cm}^2$ . De magneet is als trekhaak te gebruiken; daartoe wordt een last bevestigd aan een sluitstuk, dat het veld van de polen kortsluit. De sluitstuk is van hetzelfde materiaal gemaakt als de magneet, en heeft evenzo een doorsnede van  $4 \text{ cm}^2$ . De totale lengte van de magnetische veldlijnen is  $25 \text{ cm}$ . Bereken de maximale trekkracht van de magneet (dus de kracht waarmee het sluitstuk wordt aangetrokken door de magneet). [Antw.  $F = 2,34 \text{ kN}$ ]

## 4.6 Magnetisatie en ferromagneten

**Inleiding** We zagen eerder hoe bij het elektrische veld de elektrische gevoeligheid van de materie werd veroorzaakt door de manier waarop de atomen (of ionen) reageerden op het elektrische veld. In het bijzonder vonden we een verband tussen de elektrische polarisatie en het totale elektrische dipoolmoment per  $\text{m}^3$ . Evenzo zullen we hier onderzoeken hoe de magnetische eigenschappen worden bepaald of beïnvloed door het magnetische veld. In het bijzonder zullen we zien dat de magnetisatie wordt bepaald door het totale magnetische dipoolmoment van de atomen (of ionen) per  $\text{m}^3$ . In dat kader bespreken we de temperatuur en frequentie afhankelijkheid van de magnetische eigenschappen, en in het verlengde daarvan die van de zelfinductie.

Voor de toepassingen bij transformatoren en motoren is tenslotte niet onbelangrijk dat er hysteresis effecten zijn; in het bijzonder bespreken we de hysteresisverliezen—uitvoeriger dan we bij de elektrische hysteresis deden.

**Soorten magnetisme** In tegenstelling tot het elektrische geval kent het magnetische veld van nature geen magnetische ladingen of monopolen. Wel zijn er van nature magnetische dipolen: de magnetische ‘spin’ van elektronen of neutronen, die te begrijpen is als het tollen van de elektrische ladingsbol, en de magnetische dipolen veroorzaakt door het draaien van elektronen rond de kern, de ‘baanspin’. Op grond van de mate waarin de spins van verschillende atomen of ionen invloed op elkaar hebben onderscheiden we meerdere *soorten magnetisme*; onder andere:

**ferromagnetisme** met sterk gelijk gerichte spins;

**paramagnetisme** met zwak gelijk gerichte spins;

**diamagnetisme** met tegen het veld gerichte spins;

Aangezien ‘sterk’ en ‘zwak’ relatieve begrippen zijn, moeten we de magnetische energie vergelijken met een andere energie: de warmteenergie. Daaruit komt voort, dat eenzelfde stof bij de ene temperatuur ferromagnetisch kan zijn en bij de andere temperatuur paramagnetisch. Anders ligt dat bij diamagnetisme. We merken nog op, dat er nog meer soorten magnetisme zijn, die we echter niet zullen bespreken.

**Magnetisatie** We hebben gezien dat in vacuüm een bepaalde fluxdichtheid verbonden is met een bepaalde veldsterkte:  $B = \mu_0 H$  met een vacuümpermeabiliteit  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ . In de materie is in het algemeen de permeabiliteit toegenomen; dat wil zeggen dat er bij een zelfde veldsterkte een grotere fluxdichtheid is ontstaan. Het lijkt wel alsof er een extra veldsterkte door de materie is bijgekomen: de *magnetisatie*.

Meer precies geldt voor de **magnetisatie**  $M$  van een soort materie:

$$\boxed{B = \mu_0(H + M)}$$

De eenheid van magnetisatie is gelijk aan die van de veldsterkte, dus A/m. Vergelijken we de definitie van *magnetisatie* met die van *polarisatie*, dan zien we een verschil: polarisatie is een ladings- of *fluxdichtheid*, terwijl magnetisatie een *veldsterkte* is. Dat komt omdat een elektrische lading een flux bepaalt, terwijl een elektrische stroom geen flux maar juist een veldsterkte bepaalt.

**Magnetisatie en magnetische gevoeligheid** Voor vele stoffen geldt onder bepaalde omstandigheden een evenredig verband tussen veldhoeveelheid en veldsterkte:  $B = \mu H$ , met de *permeabiliteit*  $\mu$ . Deze permeabiliteit bevat altijd een deel dat ook in vacuüm al aanwezig is. We bekijken daarom liever de *relatieve permeabiliteit*  $\mu_r = \mu/\mu_0$ . In vacuüm is de relatieve permeabiliteit 1; het materie afhankelijke deel van de relatieve permeabiliteit is de **magnetische gevoeligheid**  $\chi_m$ :

$$\boxed{\chi_m = \mu_r - 1}$$

De magnetische gevoeligheid is uiteraard dimensieloos: het komt uit een verhouding voort. Hoe groter  $\chi_m$ , hoe ‘magnetischer’ de stof is. Nu geldt, volgens de definitie, voor de magnetisatie:  $M = B/\mu_0 - H$ . Dan blijkt *experimenteel* onder veel omstandigheden de fluxdichtheid evenredig met de veldsterkte te zijn:  $B = \mu H$ ; de *magnetisatie*  $M$  blijkt evenredig te zijn met de veldsterkte  $H$  met als evenredigheidsfactor de magnetische gevoeligheid  $\chi_m$ . Immers  $M = \mu H/\mu_0 - H = \mu_r H - H = (\mu_r - 1)H$ ; samengevat:

$$\boxed{M = \chi_m H}$$

Let eens op de eenheden: beide, magnetisatie  $M$  en veldsterkte  $H$ , hebben de eenheid A/m, en  $\chi_m$  is dimensieloos.

**Verzadigingsmagnetisatie** Bij grote gevoeligheid verzadigt de magnetisatie. Om dat in te kunnen zien drukken we de magnetisatie in de fluxdichtheid uit. Daartoe elimineren we de veldsterkte uit de vergelijking voor de magnetisatie. Substitueren we  $H = B/\mu$ ,  $\mu = \mu_r \mu_0$  en  $\mu_r = 1 + \chi_m$  in de vergelijking voor  $M$ , dan krijgen we:

$$M = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{1}{1 + 1/\chi_m} \right) B$$



Daaruit concluderen we dat een grote gevoeligheid, zeg  $\chi_m > 100$ , leidt tot de maximale magnetisatie, de **verzadigingsmagnetisatie**  $M_s$ :

$$M_s = \frac{B}{\mu_0}$$

We voegen hier nog aan toe, dat  $M = B/\mu_0 - H = (1/\mu_0 - 1/\mu)B$ , waarmee de evenredigheidsfactor is  $(1/\mu_0 - 1/\mu)$ . Welnu, bij de magnetische aantrekking komt precies dezelfde factor naar voren! Daaruit volgt voor de *magnetische kracht* per oppervlak de eenvoudige vergelijking:

$$F/A = \frac{1}{2}BM$$

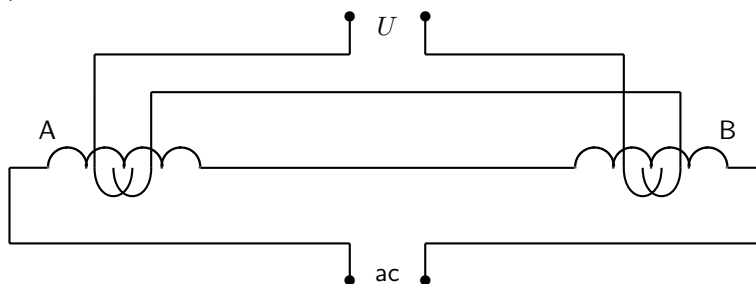
**Opg 4.6.1 \*\*** Om een toroïdaal gevormd magnetisch materiaal met susceptibiliteit  $\chi_m = 0,02$  liggen 1000 windingen waardoor een stroom van 2 A gaat. De lengte van de veldlijn is gemiddeld 15 cm. Bereken:

- a \*\* de magnetische veldsterkte  $H$ ; [Antw.  $H = 13,33$  kA/m]  
 b \*\* de magnetische permeabiliteit  $\mu$ ; [Antw.  $\mu = 1,282 \cdot 10^{-6}$  Tm/A]  
 c \*\* de magnetisatie  $M$ ; [Antw.  $M = 266,7$  A/m]  
 d \*\* de magnetische inductie  $B$  m.b.v.  $M$  resp. m.b.v.  $H$ ; [Antw.  $B = 17,09$  mT]

**Opg 4.6.2 \*\*** Een ijzeren ring heeft een doorsnede van  $2 \text{ cm}^2$  en een lengte bepaald door de gemiddelde straal van 5 cm. De permeabiliteit van het ijzer is 1000. Om de ring zijn 1500 windingen die een stroom van 5 A voeren. Bereken:

- a \*\* de zelfinductie  $L$ ; [Antw.  $L = 1,80$  H]  
 b \*\* de magnetische veldsterkte  $H$  in de ring; [Antw.  $H = 23,87$  kA/m]  
 c \*\* de magnetisatie  $M$ ; [Antw.  $M = 23,85 \cdot 10^6$  A/m]  
 d \*\* de magnetische veldenergie  $W$ . [Antw.  $W = 22,5$  J]

**Opg 4.6.3 \*\*\***



Getekend is de schakeling van twee paren spoelen waarmee de magnetische gevoeligheid van materiaal kan worden onderzocht. In het paar B is geen materie. Als in A ook geen materie is, dan is er geen uitgangsspanning. Als in A daarentegen wel materie is, dan krijgen we wel een uitgangsspanning. Verklaar, dat de uitgangsspanning evenredig is met  $\chi_m$ .

**Oppervlaktestromen** *Vroeger* werd magnetisatie, naar het idee van Ampère, als volgt opgevat. Het veld in de materie bestaat uit twee delen:

$$H = H_i + M$$

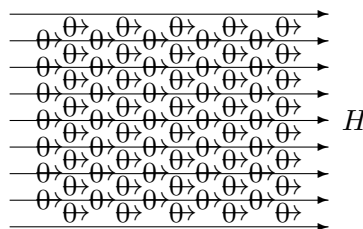
Bekijk bijvoorbeeld het veld in een spoel die is gevuld met materie. De stroom  $I$  door de spoel maakt een veldsterkte  $H_i$  in de spoel. Aan het oppervlak van de materie lopen kringstromen, veroorzaakt door de wisselwerking van het magnetische veld met het materiaal. De magnetisatie  $M$  is alleen daardoor ontstaan. Uit de wet van Ampere volgen de waarden van  $H_i$  en  $M$ . Neem een kring die de as van de spoel bevat. Daarvoor geldt m.b.t. de stroom  $H_i l = NI$ . Voor die kring geldt m.b.t. de oppervlaktestroom  $Ml = I_m$ , waarbij  $I_m$  de oppervlaktestroom over de hele lengte van de spoel is. Volgt dat het interne veld  $H_i = NI/l$  gelijk is aan de ‘stroombichtheid van de spoel’. Analoog volgt dat de ‘**oppervlaktestroomdichtheid**’  $J_m = I_m/l$  gelijk is aan de magnetisatie:

$$M = J_m$$

### Magnetische dipolen

*Tegenwoordig* vatten we de magnetisatie op als het totale effect van de velden van alle magnetische dipolen, de spins. Om dat in te kunnen zien bezien we de stroomdichtheid opnieuw. Een kringstroom  $I_m$  rond het kringoppervlak  $A$  heeft volgens de theorie, die we in een volgend hoofdstuk zullen toelichten, een **magnetisch dipoolmoment**  $p_m = I_m A$ . Daaruit zien we dat  $M = J_m = I_m/l = I_m A/Al = p_m/V$ , met het volume van de spoel  $V$ . Dus blijkt *magnetisatie* gelijk te zijn aan het **magnetisch dipoolmoment per volume**. In werkelijkheid zijn er geen oppervlaktestromen, maar worden de dipolen gevormd door de spins die de atomen of ionen van nature hebben, of door inductie verkrijgen. Wanneer de spindichtheid  $n_s$  is, en de grootte van het dipoolmoment van de spin  $p_m$ , dan kunnen we voor de magnetisatie schrijven:

$$M = n_s p_m$$



Figuur 4.24 Elektronen die draaien in een baan rond de kern zijn enerzijds op te vatten als kringstromen, anderzijds als magnetische dipolen ( $\rightarrow$ ). Gelijkgelichte magnetische dipolen bepalen de magnetisatie.

**Atomaire spins** Hoe groot is het dipoolmoment  $p_m$  van een spin? We hebben gezien, bij de behandeling van het atoom, dat de elektronen een spinquantumgetal  $s$  hadden, dat  $\frac{1}{2}$  of  $-\frac{1}{2}$  kon zijn, dat is: linksom of rechtsom draaiend. Voor de baanspins geldt, dat het magnetische quantumgetal  $m$  gehele waarden kan hebben. Totaal kan een atoom een *netto spinquantumgetal* hebben, doordat niet alle elektronen resp. baanspins ‘gepaard’ (plus en min) zijn. Zo heeft ijzer in de M-schil vier ongepaarde elektronen in banen met  $m = 1, 0, -1$  en  $-2$ . De netto spin kan tussen 0 en 4 komen, afhankelijk van de combinaties. Vermenigvuldigen we het netto magnetische quantumgetal met het elementaire magnetische dipoolmoment, dan verkrijgen we het atomaire magnetische dipoolmoment.

**Voorbeeld Atomaire spin van Fe** Bepaal de atomaire spin in ijzer uit de verzadigingsmagnetisatie  $M_s = 1,75 \cdot 10^6$  A/m in een veld van 1870 A/m.

Uit de verzadigingsmagnetisatie volgen gevoeligheid  $\chi_m = M/H = 935$ , relatieve permeabiliteit  $\mu_r = 1 + \chi_m = 936$  en permeabiliteit  $\mu = \mu_r \mu_0 = 1,18 \cdot 10^{-3}$ . De fluxdichtheid  $B = \mu H = 2,20$  T is dus nogal groot!

Uit de atoomdichtheid van ijzer:  $n = 7,87 \times 10^3 / 55,8 \times amu = 8,49 \cdot 10^{28}$  berekenen we het magnetische dipoolmoment per atoom. We nemen aan dat ieder atoom  $n$  spin heeft,  $n_s = n$ , zodat

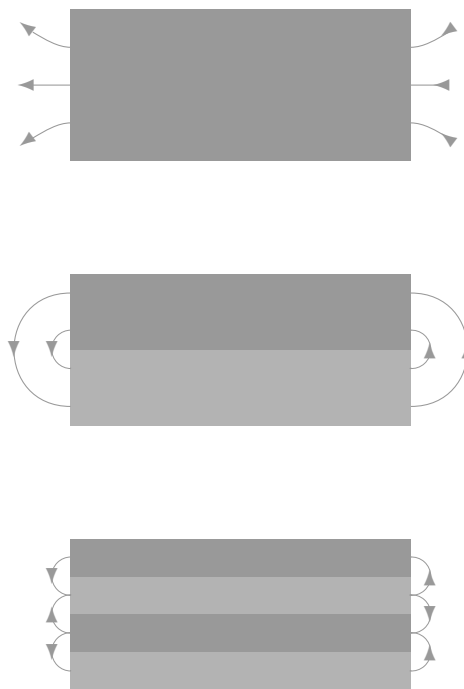
$$p_m = \frac{M}{n} = \frac{1,75 \cdot 10^6}{8,49 \cdot 10^{28}} = 2,06 \cdot 10^{-23}$$

Deze waarde kan worden vergeleken met de waarde van het de elementaire dipool, het Bohrmagneton. We vinden dan dat het *gemiddelde* ijzeratoom een spin 2,22 heeft; vergelijk dat met de spin  $\frac{1}{2}$  van een elektron (ruim viermaal zoveel) om te begrijpen waarom ijzer zo magnetisch is.

Overigens hangen de waarden van het veld, magnetisatie en gevoeligheid waarbij verzadiging optreedt sterk af van het soort ijzer en de voorbehandeling. Ga zelf na, dat er in de BINAS tabel weer andere getalwaarden zijn te vinden.

**Magnetische domeinen** Hier gaan we wat uitvoeriger in op de manier waarop, in de *ferromagnetische toestand*, magnetische spins samenwerken en elkaar in de veldrichting richten. Het blijkt namelijk, dat onder de invloed van de spin-wisselwerking in een kristal gebieden ontstaan waarin ‘alle’ spins eenzelfde richting hebben: *domeinen*. De grootte van domeinen, variërend met de temperatuur en de sterkte van een richtend veld, is tussen de duizend atoomafstanden en het hele kristal. Het domein is op te vatten als een *collectieve spin*, die in een kristalrichting staat. Verschillende domeinen hebben natuurlijk verschillende spinrichtingen (waarom?) zodat de totale magnetisatie nul *lijkt*. In opvallend licht zien de domeinen er door lichtpolarisatie verschillend uit.

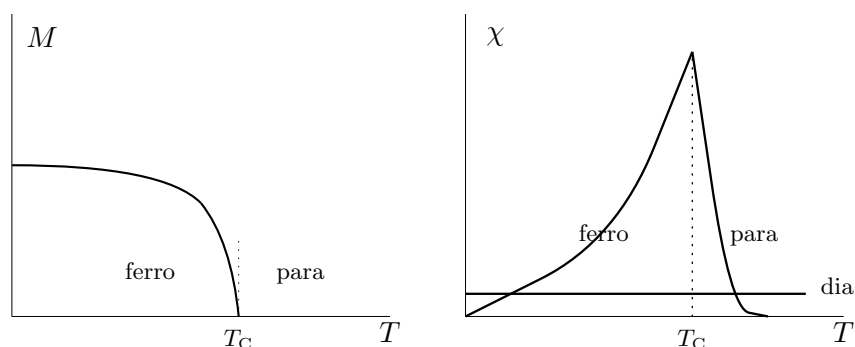
Door een sterk uitwendig veld kunnen de spins worden ‘omgeklapt’ en ontstaan er grotere domeinen. Zoals altijd kan de warmte beweging het effect van het richten teniet doen. Er is competitie tussen de richtenergie, zeg  $Jp_m^2$  en de thermische energie  $kT$ . Het gevolg is, dat de richtenergie groot genoeg is om tot **ferromagnetisme** te leiden bij temperaturen beneden de **Curietemperatuur**  $T_C$ . Boven de Curietemperatuur krijgen we **paramagnetisme**: wel zijn er domeinen, maar die zijn slechts klein, en wat belangrijker is, de domeinen staan in willekeurige richtingen.



**Conclusie** *Magnetisatie komt bij ferromagneten slechts onder de Curietemperatuur  $T_C$  voor; boven  $T_C$  verdwijnt de magnetisatie in de paramagnetische toestand. De gevoeligheid is dicht bij  $T_C$  het grootst.*

Figuur 4.25 De hokken met een pijl stellen een domein voor met de spin in de getekende richting; van boven naar beneden is het aantal domeinen 1, 2 en 4. Alleen bij één domein is er magnetisatie

**Soorten magnetisatie** Aan de hand van bovenstaande zullen we de temperatuur- en frequentiegevoeligheid van materialen bespreken. We zagen dat ferromagnetisme slechts voorkomt onder de Curietemperatuur. In figuur 4.26 is de magnetisatie van een stof getekend die bij lagere temperatuur ferromagnetisch is. Boven de curietemperatuur hebben we paramagnetisme zonder *netto* magnetisme. Bij de ferromagneet neemt de gevoeligheid toe als we dicht bij de Curietemperatuur komen. Daarboven, in het paramagnetische, neemt de gevoeligheid met de temperatuur af, omdat het steeds moeilijker wordt de thermische energie te overwinnen. Bij *diamagnetisatie* daarentegen hebben we te maken met de rookt van de baanspin op het magnetische veld. Zo een klein ‘stroompje’ rond de kern zal op veldveranderingen inductief reageren met tegengestelde velden, dus negatieve magnetisatie. Die effecten zijn echter zeer klein: de *diamagneten* hebben een gevoeligheid in de orde



a Magnetisatie onder de Curietemperatuur  $T_C$  in de ferromagnetische toestand, daarboven geen magnetisatie in de paramagnetische toestand.

b Magnetische gevoeligheid van dezelfde stof (maximaal rond  $T_C$ ), en ter vergelijking de magnetische gevoeligheid van een diamagnetische stof.

Figuur 4.26 Magnetisatie en magnetische gevoeligheid van een ferromagnetische stof als functie van de temperatuur.

van een miljoenste negatief ( $-10^{-6}$ ). Deze inductie is in het geheel niet temperatuurgevoelig, dus is ook diamagnetisme niet temperatuurgevoelig.

Tenslotte kunnen we opmerken dat ook ferromagneten frequentieafhankelijk zullen zijn. Immers, in een hoog frequent magnetisch veld zullen de spins de veld wisselingen niet meer kunnen volgen. Het valt te begrijpen dat, hoe groter de domeinen zijn, hoe trager de spins reageren. Aan de andere kant zijn de spins zelf gekoppeld aan elektronen die zeer licht zijn. De verkleining van magnetische gevoeligheid zal in het algemeen slechts bij zeer hoge frequentie optreden.

**Remanentie en coërcitiefkracht** Een bijzonder gevolg van de domeinen is, dat magnetisatie geheugen effect heeft (wat zouden onze computers zijn zonder dat effect!). Wanneer een uitwendig veld de magneet heeft verzadigd (tot één domein gemaakt), en we laten de veldsterkte weer tot nul teruglopen, dan zal de magnetisatie niet tot nul teruglopen. Er is namelijk energie nodig om de domeinen kleiner te maken. Deze **remanentie** (magnetisatie) is natuurlijk precies het verschijnsel dat een ferromagneet typeert. Anders gezegd: er is een tegengestelde veldsterkte nodig, de **coërcitiefkracht**, om de magnetisatie ongedaan te maken. Uitdrukkelijk merken we op, dat er in geval van dit soort effecten natuurlijk geen sprake meer is van 'een' verband tussen  $B$  en  $H$ ; laat staan dat er een 'evenredig' verband zou zijn. Bij ferromagneten kunnen we zulke begrippen als permeabiliteit en gevoeligheid dus alleen met de uiterste zorgvuldigheid gebruiken willen we niet met onzinnige

dingen bezig zijn.

**Magnetische veldenergiedichtheid algemeen** Ook voor die materialen, waarbij er tussen de veldfluxdichtheid  $B$  en de veldsterkte  $H$  géén evenredig verband is, kunnen we echter een uitdrukking voor de veldenergiedichtheid vinden! Daartoe gaan we terug naar de basiswetten die het gedrag van de spoel bepalen: de inductiewet van Faraday:  $U_{\text{m rond}} = -d\Phi/dt$  en de bronwet van Ampere:  $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$ , beide toegepast per wikkeling. In het geval van de spoel wordt dat omgezet in de vergelijkingen  $U = -NAdB/dt$  en  $Hl = NI$ . Gaan we de afleiding van de veldenergie nog eens precies na, dan vinden we nu een geleverd vermogen:

$$P = I(-U) = INA \frac{dB}{dt}$$

$$dW = A(NI)dB = A(Hl)dB = (Al) HdB$$

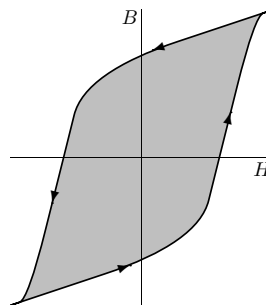
Opnieuw een volume ( $Al = V$ ) effect dus; voor de *energiedichtheid* van de veldenergie in de spoel geldt:

$$dW/V = HdB$$

De energiedichtheid kan nu niet ‘zomaar’ worden geïntegreerd, omdat we niet weten hoe  $H$  en  $B$  zich in de loop van de tijd gedragen. Dat moet experimenteel bepaald worden door  $H$  en  $B$  tegelijkertijd te meten.

### Hysteresislus

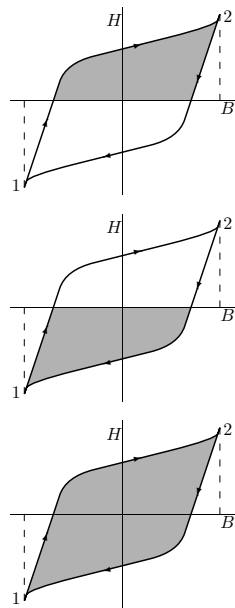
Denk aan een situatie waarbij de spoel wordt gevoed met wisselstroom. Wanneer de stroom een gehele ‘cyclus’ doorloopt van positieve en negatieve waarden ontstaat de zogenaamde hysteresislus in de  $MH$ - of  $BH$ - grafiek. Bij het toenemen van de veldsterkte  $H$  zullen de  $M$  en  $B$  waarde lager zijn dan bij het afnemen van  $H$ . Omgekeerd: om  $B$  te laten toenemen is een hogere  $H$  nodig dan om  $B$  te laten afnemen. De energie die *per m<sup>3</sup> materiaal* nodig is om  $B$  met  $dB$  te laten toenemen is  $dW/V = HdB$ , met de ‘hoge top’  $H$ -waarden  $H_t$ .



Figuur 4.27 Een complete hysteresislus bij een met ijzer gevulde spoel als een stationaire toestand is bereikt (dus niet bij aanzetten of uitzetten van de stroom)

Dus is de energie nodig om de magnetisatie om te klappen:

$$\int_1^2 \frac{dW}{V} = \int_1^2 H_t dB$$



Figuur 4.28 Bij de gespiegelde hysteresislus kromme is te zien welke arbeid  $\int HdB$  nodig is voor magnetiseren en ontmagnetiseren: de oppervlakken tussen de as en de top resp dal grafiek

Het maakt natuurlijk niet uit af dit oppervlak wordt gevonden door de gespiegelde of de oorspronkelijke hysteresislus te nemen:

$$\oint \frac{dW}{V} = \int_1^2 (B_t - B_d) dH$$

maar dan heeft de integratie niet de betekenis van gesommeerde arbeid.

**Opg 4.6.4** \* Op een beeldscherm is de hysteresislus van een in gebruik zijnde transformator. We hebben een andere transformator in een kleinere uitvoering. Als daarvan de hysteresislus wordt opgenomen (zelfde cyclus voor  $H$ ) en we vergelijken met de eerste:

- A die van de kleinere trafo is kleiner geworden
- B die van de kleinere trafo is dezelfde gebleven
- C die van de kleinere trafo is groter geworden

In de  $HB$ -grafiek is dat het oppervlak tussen de top- $H$  waarde en de  $B$ -as. Analooog is de energie die vrijkomt om het omgekeerde te doen bepaald door de 'lage dal'  $H$ -waarde  $H_d$ . Het oppervlak tussen de lage waarde van  $H$  en de  $B$ -as is de energie die per  $m^3$  materiaal 'vrij' komt bij de ontmagnetisatie:

$$\int_2^1 \frac{dW}{V} = \int_2^1 H_d dB$$

Het verschil tussen de energie van magnetisatie en ontmagnetisatie in een cyclus is gelijk aan het *hysteresisenergieverlies* per  $m^3$  materiaal bij het éénmaal doorlopen van de hysteresislus:

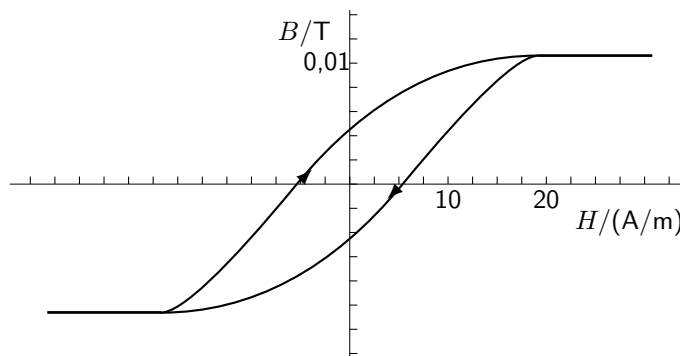
$$\oint \frac{dW}{V} = \int_1^2 (H_t - H_d) dB,$$

het oppervlak van de hysteresislus in de  $BH$ -grafiek.

**Opg 4.6.5 \*\*** Van het juk van een weekijzeren transformator, massa 5 kg, wordt een hysteresislus opgenomen. Onder de gegeven stroomomstandigheden blijkt het oppervlak van de  $BH$ -lus  $0,1 \text{ J/m}^3$  te zijn. Bepaal voor deze transformator het hysteresisenergieverlies/s in het weekijzer:

- a bij een wisselfrequentie van 50 Hz. [Antw.  $P = 3,18 \text{ mW}$ ]  
 b bij een wisselfrequentie van 10 kHz. [Antw.  $P = 0,64 \text{ W}$ ]

**Opg 4.6.6 \*\***



Een induct-

antie bestaat uit 100 windingen rond een rechthoekige ijzeren kern van 20 cm lengte en  $1 \text{ cm}^2$  doorsnede. Door de spoel gaat een wisselstroom met frequentie  $60 \text{ /s}$ . De magnetisatie in het ijzer gaat dus iedere periode juist een keer rond de hysteresislus als getekend.

- a \*\* Bepaal het hysteresisenergieverlies van deze spoel per seconde. [Antw.  $P = -0,24 \text{ mW}$ ]  
 b \*\* Gebruik de wet van Ampere om de piekwaarde van de stroom uit de  $BH$  kromme te bepalen. [Antw.  $I = 0,04 \text{ A}$ ]  
 c \*\* Wat is de zelfinductie gemiddeld over een periode? [Antw.  $L = 2,5 \text{ mH}$ ]  
 d \*\*\*\* Wat gebeurt er, ruwweg, met de zelfinductie als de stroom wordt verdubbeld)? [Antw. ruwweg  $2/3$  van eerste waarde]



**MEERKEUZEANTWOORDEN****Hoofdstuk 4 Polarisatie en magnetisatie****4.1 Condensator**

- 4.1.1 D
- 4.1.2 C de lading wordt in de condensatoren vastgehouden
- 4.1.4 D
- 4.1.7 B
- 4.1.14 D bij B: de stroom loopt naar de aarde

**4.2 Elektrische veldenergie**

- 4.2.5 C

**4.3 Polarisatie en diëlektrica**

- 4.3.2 D
- 4.3.4 A
- 4.3.5 C

**4.4 Spoelen**

- 4.4.1 C
- 4.4.10 A
- 4.4.13 C

**4.5 Magnetische veldenergie**

- 4.5.2 D
- 4.5.7 C
- 4.5.9 D
- 4.5.10 C  $L$  en  $R$  zullen beide verdubbelen

**4.6 Magnetisatie en ferromagneten**

- 4.6.4 B alleen het soort materiaal telt voor de hysteresis

## Index

Bij een trefwoord is het paginanummer aangegeven waar de definitie staat, of, bij meerdere nummers, waar het trefwoord op een karakteristieke manier wordt gebruikt: definitie **scheef vet**; gebruik *cursief*.

### Symbolen

<b>A</b>		$I_s$ .....	183
doorsnede .....	227	$J$ .....	<b>90</b>
massagetal .....	58, 60	$J_d$ .....	111
Richardson-constante .....	143	$J_e$ .....	111
<b>A</b>		$J_s$ .....	<b>143</b>
doorsnede .....	222	<b>L</b>	
Richardson-constante .....	176	diffusielengte .....	116
$A_H$ .....	103	impulsmoment .....	23, 31
<b>B</b> .....	<b>222, 225</b>	zelfinductie .....	<b>226</b>
<b>C</b> .....	201	<b>L</b>	
$C_d$ .....	<b>162</b>	impulsmoment .....	36, 47
$C_d$ .....	162	spoel .....	233
$C_p$ .....	<b>203</b>	$L_z$ .....	42, 47
$C_s$ .....	<b>203</b>	$M$ .....	240, <b>240</b>
<b>D</b>		$N$ .....	<b>222, 226, 227</b>
diffusie-coëfficiënt .....	112	$P$ .....	<b>213, 215, 216</b>
<b>D</b>		$Q$ .....	199
diëlektrische verschuiving ..	199	$Q_o$ .....	<b>158</b>
diffusie-coëfficiënt .....	115	$R$ .....	163, 232
<b>E</b>		Rydbergconstante .....	25
deeltje-energie .....	36, 37	<b>R</b>	
elektrische veldsterkte .....	199	weerstand .....	210
elektronenergie .....	47	$R_H$ .....	103, 104
foton-energie .....	21	$T_C$ .....	220, <b>244, 245</b>
$E_0$ .....	<b>33</b>	$U$ .....	198, 199
$E_i$ .....	136	$U_{BA}$ .....	<b>147</b>
$E_F$ .....	123, 125, <b>136</b>	$U_C$ .....	<b>201</b>
$E_H$ .....	<b>99, 101</b>	$U_{DS}$ .....	<b>179</b>
$E_c$ .....	123	$U_{GS}$ .....	<b>180</b>
$E_g$ .....	123	$U_H$ .....	<b>99</b>
$E_k$ .....	<b>29</b>	$U_L$ .....	229
$E_o$ .....	<b>158</b>	$U_Z$ .....	<b>166, 167</b>
$E_p$ .....	<b>29</b>	$U_{af}$ .....	<b>181</b>
$E_{rot}$ .....	<b>29</b>	$U_c$ .....	<b>152, 153, 176</b>
$E_v$ .....	123	$U_{m\text{ rond}}$ .....	<b>222, 235</b>
$F_{C_H}$ .....	101	$U_{pn}$ .....	153, <b>166</b>
$F_L$ .....	101	$U_s$ .....	<b>182</b>
$F_C$ .....	<b>27</b>	$W$ .....	207
$F_f$ .....	<b>89</b>	$Z$ .....	<b>15, 58</b>
$H$ .....	<b>222</b>	$\Delta E_F$ .....	<b>151</b>
$I$ .....	<b>90, 210</b>	$\Delta Q$ .....	193
		$\Phi$	

- magnetische flux ..... **222**  
 uittree-energie ..... **136**
- $\Phi$   
 uittree-energie ..... 137, 138
- $\Psi$  ..... 199, 205
- $\alpha$   
 straling ..... 14, **53**  
 stroomversterking ... **191**, 192
- $\alpha$ -deeltje ..... 13–15
- $\alpha$   
 straling ..... 13, 54
- $\alpha'$   
 stroomversterking ... 192, **192**
- $\beta$ -straling ..... **53**, 54, 60
- $\beta^+$ -straling ..... **60**
- $\beta_r$  ..... **190**
- $\chi_e$  ..... **214**, 216
- $\chi_m$  ..... **226**, **240**
- $\epsilon$  ..... **201**
- $\epsilon_0$  ..... 201
- $\epsilon_r$  ..... 201, 214
- $\gamma$   
 geleidbaarheid ..... **91**, 103  
 straling ..... **53**
- $\gamma$   
 straling ..... 54
- $\hbar$  ..... **23**, 31
- $\lambda$   
 golflengte ..... 21, 36
- $\mu$   
 beweeglijkheid ..... **90**  
 chemische energie ..... 118  
 permeabiliteit ... **225**, 227, 231
- $\mu$   
 beweeglijkheid ... 99, 102, 115  
 chemische energie ..... 114  
 permeabiliteit ..... 235
- $\mu_0$  ..... 225
- $\mu_n$  ..... **90**
- $\mu_p$  ..... **90**
- $\mu_r$  ..... **225**
- $\phi$   
 draaiperiode ..... **38**  
 voltapotentiaal ..... 120
- $\phi$   
 voltapotentiaal ..... 140
- $\phi_a$  ..... **151**, 153
- $\phi_d$  ..... **150**, 153
- $\rho$  ..... **90**, 99, 103  
 ladingsdichtheid ..... 113
- $\rho_{bpos}$  ..... **142**
- $\rho_b$  ..... **142**
- $\rho_n$  ..... **78**
- $\rho_o$  ..... **156**
- $\sigma$  ..... **15**
- $\tau$   
 drift ..... **106**, 108
- $\tau$   
 drift ..... 107  
 LR-kring ..... 233  
 RC-kring ..... 211
- $\tau_d$  ..... **163**, 169
- $\tau_d$   
 diëlektrisch ..... 172
- $\tau_r$  ..... 109, 110
- $a_{cp}$  ..... **27**
- $c$  ..... **21**
- $c_d$  ..... **150**
- $c_i$  ..... **150**
- $d$  ..... 156
- $e$  ..... **14**
- $e^+$  ..... **58**
- $f$  ..... **89**  
 fractie bezet ..... 118
- $f$   
 bezettingskans ..... 114  
 frequentie ..... 21, 36
- $h$  ..... **21**
- $k$  ..... **114**
- $l$   
 impulsmomentkwantumgetal **44**  
 lengte ..... 227
- $l$   
 impulsmomentkwantumgetal **47**  
 lengte ..... 222
- $m$   
 magnetischkwantumgetal ... **43**
- $m$ -voudige draaias ..... **39**
- $m$   
 magnetischkwantumgetal ... **47**  
 massa ..... 36
- $m^*$  ..... 77
- $m_n$  ..... **77**
- $n$   
 deeltjesdichtheid ..... **90**, 217  
 geleidingselektron ..... **78**, 127

geleidingselektron ..... 152  
 hoofd-kwantumgetal ..... 32

*n*  
 geleidingselektron ..... 148  
 hoofd-kwantumgetal ... 25, 33  
 hoofdkwantumgetal .... 42, 47

$n_i$  ..... 127, 148  
 $n_i$  ..... 152  
 $n_a$  ..... 151  
 $n_d$  ..... 87, 151

*p* ..... 37  
 gaten-dichtheid ..... 81  
 gaten-dichtheid ..... 152  
 impuls ..... 23

*p*  
 dipoolmoment ..... 217  
 gaten-dichtheid . 127, 148, 151  
 impuls ..... 28, 36, 37

$r_0$  ..... 32

*s* ..... 45, 47

*v* ..... 21, 27, 28, 29

$v_{dr}$  ..... 89, 101

$v_\phi$  ..... 27

*w* ..... 209, 231

$\underline{L}$  ..... 28

**A**  
 aangeslagen ..... 25, 33, 62  
 elektron ..... 23, 32, 63  
 toestand ..... 25

aangeslagen  
 atoom ..... 21  
 elektron ..... 18

aanslaan ..... 19

absorptie-spectrum ..... 20

acceptor ..... 83, 83, 84, 85, 124

acceptor-voltapotential . 151, 153

acceptordichtheid ..... 151, 153

acceptordotatie ..... 190

acceptor dotering ..... 85

acceptorion ..... 86, 160, 169, 171

afknijpkanaal ..... 184

afknijpspanning .....  
 .... 181, 181, 182, 184, 185

alfastraling ..... 53

amorf ..... 71, 75

ampèrewikkelingen ..... 234

anodespanning ..... 54

anti-neutrino ..... 60

antideeltje ..... 60

atoom ..... 12, 15, 18, 20, 22,  
 23, 27, 31–33, 55, 59–61,  
 65, 70, 71, 73, 108, 122, 123

aangeslagen ..... 21

elektronwolk ..... 47

impulsmoment ..... 44

magnetische as ..... 43

atoom  
 bolvorm ..... 43  
 interstitieel ..... 75  
 vacature ..... 75

atoomafstand ..... 71, 107

atoomdiameter ..... 59, 70

atoomdichtheid ..... 78, 87

atoomenergie ..... 42

atoomkern ..... 13, 15, 58

atoommassa ..... 78

atoommodel ..... 53

atoommodel van Bohr . 27, 39, 42

**B**

bandafstand ... 123, 127, 139, 177

bandenmodel ..... 124

basis ..... 188, 188, 189, 192

basis-collector-diode ..... 189

basis-emitter-diode ..... 189, 190

behoudswet ..... 16, 28

betastraling ..... 53

beweglijke lading .....  
 ..... 76, 76, 86, 89, 90, 93

beweglijkheid 90, 99, 102, 103, 115

bewegingsconstante ..... 28, 29

bewegingsenergie ..... 29

bewegingsenergiebehoud ..... 16

bezettingskans ..... 114, 115

bindingsband .....  
 .... 123, 124, 126, 127, 139

bindingselektron 73, 73, 74, 75,  
 76, 80, 80, 81–83, 85, 100,  
 108, 111, 112, 116, 123, 127

bipolaire-transistor ..... 188, 188

Bohrstraal ..... 32

bolcondensator . 200, 204, 205, 210

Boltzmann-factor ..... 114

Boltzmann-verdeling ..... 125

bosonen ..... 47

- buistriode ..... 135  
 buuratomen ..... 81
- C**  
 C<sup>14</sup>-methode ..... 59  
 capaciteit 147, 162, 198, **201**, 204  
 centrale botsing ..... 16  
 centripetale kracht ..... **27**  
 centripetale versnelling ..... **27**  
 channel ..... *zie* kanaal  
 chemische energie ..... 114, **118**  
 chip ..... 135  
 CO<sub>2</sub>-laser ..... **61**  
 coërcitiefkracht ..... **245**  
 coherente fotonen ..... **64**  
 collector ..... **188**  
 condensator 147, 198, **198**, 199,  
 201–204, 207, 208, 208,  
 210, 211, 216, 217, 233, 235  
 condensatorenergie . **207**, 208, 210  
 constante van Boltzmann .... **114**  
 constante van Planck .... **21**, 104  
 contactspanning . 134, 142, 146,  
**147**, 148, 152, 153, 154,  
 155, 156, 157, 164, 165,  
 166–170, 172, 174, 177, 180  
 continue laser ..... 61  
 continue spectrum ..... 23, **54**  
 Coulombkracht ..... **27**, 101  
 Curietemperatuur .....  
 ..... 220, 244, **244**, 245
- D**  
 deeltjekarakter ..... 36  
 deeltjesdichtheid ..... **90**  
 depletion ..... 155  
 diëlektricum ..... 198, 213, 221  
 diëlektrische constante .....  
 ..... **201**, 212, 214  
 diëlektrische verschuiving .....  
 ..... **199**, 200, 208  
 dialektricum ..... **213**  
 diamagneten ..... 244  
 diamagnetisatie ..... 244  
 diamagnetisme ..... 239, 245  
 dichtgepakte stapeling ..... **71**  
 dichtheid van onbeweeglijke la-  
 dingen ..... **156**  
 dichtste stapeling ... **71**, 79, 81, 81
- diffractiepatroon ..... **64**  
 diffusie ..... 163, 193  
 diffusie-coëfficiënt .. **112**, 115, 116  
 diffusielading ..... 193  
 diffusielengte ..... **116**, 194, 194  
 diffusieproces ..... **111**  
 diffusiestroom ..... **111**, 112, 112  
 diode ..... **134**, 173  
 diode-karakteristiek ..... 167  
 diode-spanningsval ..... **166**  
 diodebuis ..... 135  
 diodestroom ..... 176  
 dipool ..... 216, 217  
 dipoolmoment ..... 239  
 elektrisch ... 215, **216**, 217, 219  
 magnetisch ..... **242**  
 dipoolmoment  
 elektrisch ..... 219  
 discrete spectrum ..... **54**  
 dislokatie ..... **75**  
 domeinen ..... **220**, 243  
 donor 83, **83**, 84, 87, 124, 158, 167  
 donor-dotatie ..... **84**, 150  
 donor-voltpotentiaal .....  
 ..... **150**, 153, 160, 168  
 donordichtheid ..... 149–151, 153  
 donor dotering ..... 151  
 donorion ..... 149, 169, 171  
 donorniveau ..... 128  
 doorlaat 166, 173, 174, 190, 193, 194  
 doorlaatrichting ..... 167, 171  
 doorlaatspanning ..... 165, 176  
 doorlaatstroom ..... 176,  
**176**, 177, 188, 189, 190, 194  
 doorslagspanning ... **166**, 167, 167  
 dotatie ..... 85,  
 87, 144, 150, 152, 153, 153,  
 158, 161–163, 167, 169–  
 173, 176, 177, 180–182, 189  
 dotatiefactor ..... 151  
 dotering ..... **83**, 84  
 doteringsdichtheid ..... **87**  
 draaienergie ..... 29, **29**, 30  
 draaiperiode ..... **38**  
 dragerlevensduur .. *zie* levensduur  
 drain ..... 179–182, 184–187  
 drempelspanning **166**, 176, 185–187  
 driftsnelheid ..... **89**, 99, 101

dualiteit ..... 36

## E

effectieve massa ... 77, 78, 93, 108

eigen geleidings-elektronen .... 84

eigen ladingen ..... 86

eigen ladingsdrager-concentratie  
..... 150

eigen ladingsdrager-dichtheid .  
..... 126, 127, 148, 151–153

Einstein relatie ..... 115

elastische botsing ..... 16, 18

elektrische flux .....  
199, 200, 201, 203, 204, 207

elektrische fluxdichtheid ... *zie*  
diëlektrische verschuiving *D*

elektrische gevoeligheid .....  
..... 214, 216–218, 219, 221

elektrische lading ..... *zie* lading

elektrische potentiaal ..... 29

elektrische susceptibiliteit ... 214

elektrische veldenergie 208, 209, 210

elektrische veldenergiedichtheid 209

elektron ..... 12, 13, 29, 39, 70

elektron-emissie ..... 138, 144

elektron-emissietheorie ..... 155

elektron  
atoom ..... 31

elektronbaan ..... 27, 31

elektronenconfiguratie ..... 49, 50

elektronenergie .... 25, 33, 55, 122

elektronenpolarisatie 216, 217, 218

elektronenschil .. 29, 35, 47, 49, 54

elektron geleiding ..... 89

elektronspin ..... 45, 47

elektrontoestand .. 42, 47, 52, 73

elektronwolk ..... 15, 18

elementaire cel ..... 71

elementaire impulsmoment ...  
..... 23, 27, 31

elementaire lading .....  
..... 14, 15, 21, 28, 104

elementaire weerstand ..... 104

emissie-niveau ..... 63, 64

emissie-stroom ..... 175

emissiespectrum ..... 20

emissiestroom .....  
137, 144, 174, 176, 178, 193

emitter ..... 188, 188, 189

energie ..... 38

energieband ..... 122

energietoestand ..... 23

## E

energietoestand ..... 20, 21, 34

enkelvoudig geïoniseerd ..... 15

exponentieel verval . 163, 211, 233

extrinsiek ..... 83

## F

Fermi-Dirac-verdeling ..... 125

Fermi-energie .....  
..... 102, 111, 118, 119,  
120, 121, 123, 124–126,  
127, 136, 141–143, 151, 168

Fermi-energieverhoging ..... 151

fermionen ..... 47, 118

ferroelektricum ..... 213, 220, 221

ferroelektrische toestand 220, 221

ferromagneet .. 225, 226, 243–245

ferromagnetische toestand .... 243

ferromagnetisme ... 239, 244, 244

FET ..... 179, 188

foto-elektrische cel ..... 139

foto-elektrische effect  
uitwendig ..... 138

foto-elektrisch effect  
inwendig ..... 139

foto-elektrisch effect  
uitwendig ..... 137

foto-geleiding ..... 139

foton ..... 21, 36, 177

foton-energie ..... 21, 23

foton-impuls ..... 23, 37

foton-impulsmoment ..... 23

fotonemissie ..... 177

fotonmassa ..... 36

fotonrichting ..... 63

fractie-bezet ..... 114

fractie bezet ..... 118

frequentie ..... 21

frictieconstante ..... 89, 106

## G

GaAlAs vastestof-laser ..... 61

- gammastraling ..... **53**, 57  
 gat .. **76**, 80, 80, 81, 83, 85, 93,  
     108, 109, 110, 115, 121, 126  
 gat-beweeglijkheid ..... **90**  
 gate ..... 180, **180**, 181, 185, 187  
 gatecapaciteit ..... **186**  
 gaten-dichtheid ..... 127, 148  
 gatendichtheid ..... 81, 151  
 gaten geleiding ..... 89  
 geïnjecteerd ..... **189**  
 geïoniseerd ..... **23**, 33  
 gebonden elektron ..... 74, 81  
 gebonden elektronen ..... 71, **73**  
 gekwantiseerd ..... **19**  
 geleidbaarheid .. 75, 82–84, 87,  
     91, **91**, 97, 103, 111, 113,  
     119, 125, 128, 161, 163, 186  
 geleidende toestand **166**, **189**, 192  
 geleiding ..... **89**  
 geleidingsband ..... **123**,  
     124, 126, 127, 127, 128, 139  
 geleidingselektron .....  
     .... 82, 83, 93, 108, 110, 116  
 geleidingselektron-beweeglijkheid  
     ..... **90**  
 geleidingselektronen ..... **73**  
 geleidingselektronen-dichtheid .  
     ..... 127, 148  
 gelijkrichten ..... 134, 166  
 gelijkrichtwerking ..... 134  
 gemeenschappelijke basisschake-  
     ling ..... **191**  
 gemeenschappelijke emitterscha-  
     keling ..... 191, **191**  
 generatie ..... **108**, 110  
 generatie/recombinatie ..... **109**  
 gepulsde laser ..... 61  
 gestimuleerde emissie .. **61**, 64, 65  
 gluonen ..... **59**  
 golf ..... 35  
 golffrequentie ..... 36  
 golfkarakter ..... 35  
 golflengte ..... 21  
 golfmechanica ..... 35  
 golfmodel  
     atomen ..... **42**  
     waterstof ..... **35**  
 golfsnelheid ..... **21**
- goud ..... 13  
 grond-niveau ..... 63, **64**  
 grondtoestand ..... **25**  
 grondtoestand-energie ..... **33**
- H**  
 halfdoorlatend: ..... **63**  
 halfgeleider .... **83**, 84, 92–94, 135  
 halfvallig ..... 45  
 halfvallige spin ..... **47**  
 Hall-constante ..... **103**  
 Hall-effekt ..... **99**  
 Hall-spanning ..... **99**, 101, 102  
 Hall-veld ..... **99**, **101**  
 Hall-weerstand ..... **103**  
 heeltallige spin ..... **47**  
 Helium-Neon gaslaser ..... 61  
 Heliumkern ..... 13  
 hexagonale stapeling ..... **71**  
 hoofd-kwantumgetal ... **25**, 32, 33  
 hoofdkwantumgetal ..... 42, 47  
 hysteresis 213, 221, **221**, 226, 239  
 hysteresisenergieverlies .....  
     ..... 221, 247, 248  
 hysteresislus ..... 221, 246–248
- I**  
 ideale condensator .....  
     ..... 199, 202, **202**, 209  
 ideale diode ..... 165  
     karakteristiek ..... 167  
 ideale geleider ..... **75**, **125**  
 ideale halfgeleider 126, **126**, 127, 152  
 ideale magnetische weerstand **235**  
 ideale spoel ..... 224, 226, 227  
 impuls ..... **28**, 37, 38  
 impulsbehoud ..... 16  
 impulsmoment ..... **28**, 31, 38, 39  
 impulsmomentbehoud ..... **28**  
 impulsmomentkwantumgetal **44**, 47  
 in-elastische botsing ..... **18**  
 inductiespanning ..... **229**  
 interstitieel ..... **75**  
 intrinsiek ..... **83**, 153  
 inversie ..... **176**  
 inversiegebied ..... **186**  
 inwendige veldemissie ..... **188**  
 ion ..... **15**, 70, 71  
 iondichtheid ..... 78, 79

- ionenkristal ..... **73**, 83  
 ionenpolarisatie ..... 216, 218  
 ionisatie-energie ..... **23**, 33, 136  
 ioniserende straling ..... **53**  
 isolatoren ..... 73  
 isospin ..... **58**  
 isotoop ..... **59**
- J**  
 JFET ..... 179
- K**  
 K ..... 48  
 K-schil ..... 48, 54  
 kanaal .... **179**, 180, 180, 181–187  
 kanaalspanning ..... **179**  
 karakteristieke dichtheid .... 109  
 karakteristieke tijd ..... 109  
 kern ..... **12**, 13, 14,  
 14, 16, 27, 28, 29, 33, 38,  
 42, 45, 47, 52, 53, 60, 71, **234**  
 kernlading .... **14**, 15, 15, 17, 217  
 kernmodel ..... 54  
 kernstraling ..... 54, 57  
 klassieke mechanica ..... **27**  
 koeloppervlak ..... 177  
 kooi van Faraday ..... 212  
 kristal ..... 70, 71, 73, 75, 83–85  
 kristalimpuls ..... **123**  
 kristalrooster ..... 71, 72  
 kubische stapeling ..... 71, 79  
 kwantumgetal .... 32, **32**, 35, 123  
 kwantum Hall-weerstand .... **104**
- L**  
 L ..... 48  
 L-schil ..... 48, 55  
 lading ..... 198, 199, **199**  
 ladingoverschot ..... **193**  
 ladingsdichtheid 80, **90**, 99, 103, 113  
 geleidingselectron ..... **78**  
 geleidingselectron ..... 79  
 ladingsdichtheid  
 gat ..... 81  
 ladingsdichtheid van gaten .... 81  
 lagentransistor ..... 135  
 LASER ..... **61**  
 laserstraling ..... **61**, 64  
 laservermogens ..... 61
- lawineeffect ..... **166**  
 LED ..... **177**  
 leeglopen ..... 211  
 lekstroom ..... 210, 210, 232  
 lekweerstand ..... 210, 232  
 levensduur 109, 110, 116, 172, 193  
 lichtpolarisatie ..... 243  
 lichtsnelheid in vacuüm ..... **21**  
 lichtstraling ..... 13  
 linksom ..... 43  
 looptijd ..... **116**  
 Lorentzkracht ..... 101  
 luchtspleet ..... **234**
- M**  
 M ..... 48  
 magnetisatie .. 240, **240**, 242, 245  
 magnetisch dipoolmoment per  
 volume ..... **242**  
 magnetische as ..... **42**  
 magnetische flux **222**, 223, 224,  
 226, 226, 227, 229, 229, 234  
 magnetische fluxdichtheid ....  
 ..... **222**, 225, 234  
 magnetische gevoeligheid **226**, **240**  
 magnetische inductie ..... **222**  
 magnetische kracht . 236, **237**, 241  
 magnetische kring ..... 234, 235  
 magnetische spanning **222**, 223, 235  
 magnetische veldenergie .....  
 ..... **231**, 236, 237  
 magnetische veldenergiedicht-  
 heid ..... **231**, 232  
 magnetische veldsterkte . **222**, 224  
 magnetische weerstand .. 235, **235**  
 magnetischkwantumgetal .. **43**, 47  
 magnetisme  
 soorten ..... 239  
 MASER ..... **61**  
 massa ..... 36  
 massa-energie wet ..... **36**  
 massagetal ..... 17, 58, 59, 60  
 matrix-mechanica ..... 35  
 meerderheidsladingen .. 85, **85**, 86  
 mesonen ..... **58**  
 microprocessor ..... 135  
 minderheidsladingen ..... 86  
 mobiliteit ..... **90**



- MOS-diode ..... 135  
MOSFET ..... 179, 185
- N**  
n<sup>+</sup>-type halfgeleider ..... 86  
n<sup>0</sup> ..... 58  
n-halfgeleider ..... 120, 124,  
126, 134, 148, 152, 157,  
165, 168, 169, 174, 175, 180  
n-metaal ..... 168  
n-type ..... 76  
n-type geleiding ..... 84  
n-type halfgeleider ..... 83  
negatieve draairichting ..... 43  
neutrino ..... 58  
neutron ..... 58, 58, 60, 60  
neutron verval ..... 60  
niet-geleidende toestand . 166, 190  
niet Ohm's gedrag ..... 93  
nnp-transistor ..... 188, 189  
nucleon ..... 58
- O**  
Ohm's gedrag ..... 91  
onbeweeglijke lading ..... 89  
oneigen gaten ..... 85  
oneigen geleidings-elektronen 84, 84  
ononderscheidbare deeltjes .... 118  
onzuivere geleiding ..... 85  
onzuivere halfgeleider ..... 83  
onzuivere stof ..... 83  
oppervlaktelading 147, 156, 162, 168  
oppervlaktestroomdichtheid . 242  
oppervlaktetoestand 136, 139, 173  
optische as ..... 63  
optische trillholte ..... 62, 63
- P**  
p<sup>+</sup>-type halfgeleider ..... 86  
p<sup>+</sup> ..... 58  
p-halfgeleider ..... 120,  
124, 126, 134, 148, 152, 156  
p-type ..... 76  
p-type geleiding ..... 85  
p-type halfgeleider ..... 83  
paraelektricum ..... 213  
paraelektrische toestand . 220, 221  
paramagnetische toestand .... 244  
paramagnetisme .... 239, 244, 244
- Pauli-principe ..... 35, 47, 52, 123  
periodiek systeem ..... 35,  
50, 51, 52, 60, 72, 83, 84, 84  
permeabiliteit ..... 225, 235, 240  
permeabiliteit in vacuüm .... 225  
permittiviteit ..... 201, 212, 213  
permittiviteit van vacuüm .... 201  
pinched-off chanal ..... 184  
plaatcondensator ..... 198,  
200, 204, 205, 208, 214, 219  
pn-diode ..... 135,  
142, 154, 161, 162, 169,  
170, 171, 172, 177, 188, 189  
pnp-transistor ..... 188  
polarisatie ..... 212, 213, 214–  
216, 216, 217, 220, 221, 240  
polarisatie-ladingsdichtheid .. 215  
polarisatie  
golf ..... 36  
soorten ..... 212  
polarisatielading ..... 214  
polen ..... 234  
pomp-niveau ..... 63, 64  
pompen ..... 63, 64, 64, 65  
pompmechanismen ..... 65  
populatie-inversie ..... 65  
positieve draairichting ..... 43  
positieve kringrichting ..... 165  
positron ..... 58, 60  
potentiële energie ..... 55  
potentiele energie ..... 29  
proton ..... 27, 30, 39,  
40, 47, 49, 57, 58, 58, 60, 60  
protonaantal .....  
.... 15, 29–31, 47, 55, 58–60  
proton verval ..... 60  
puntcontact-transistor .. 135, 188
- Q**  
quantum-mechanica ..... 27, 35  
quarks ..... 58
- R**  
röntgenfoton ..... 55  
röntgenstraling .... 53, 54, 54, 57  
radio-actieve straling ..... 53  
radiobuizen ..... 135  
randveldsterkte ..... 160  
rechtsom ..... 43

- recombinatie ... **108**, 109, 110,  
**152**, 163, 169, 177, 190, 193
- recombinatiefactor .....  
.... **190**, 192, 193, 193, 194
- recombinatiekans ..... 152
- recombinatietijd ..... **109**, 110
- recombineren ..... 152
- regel van Matthiessen ..... **96**
- relatie van Einstein ..... 116
- relatieve permeabiliteit .....  
..... **225**, 237, 240
- relatieve permittiviteit ..... 201
- relaxatie ..... 106
- relaxatietijd  
diëlektrisch ..... 163, **163**, 169  
drift ..... **106**, 108, 110, 116
- relaxatietijd  
diëlektrisch ..... 169, 172  
drift ..... 107, 110
- remanentie ..... **245**
- remstraling ..... **55**
- Richardson-constante ... **143**, 176
- ruimtelading ..... 160
- ruimtelading-capaciteit .....  
..... **162**, 169, 172
- rustmassa ..... 37
- Rydbergconstante ..... 25
- S**
- schakelaar ..... 187, 190, 191
- schakelaar-model ..... 165
- schakeltijd ..... **107**
- Schottky-diode ..... **168**, 169
- soortelijke geleiding ..... **91**
- soorten geleiders ..... **124**
- soorten onzuivere halfgeleiders **124**
- source ..... 179–187
- spanning ..... 160, 198, 201
- spanningsreeks ..... **146**
- spanningsval ..... **201**, **229**
- sper .. 156, 161, 173, 174, 180, 190
- sperspanning ..... 165, 175, 194
- sperstroom ..... 173,  
174, 175, 176, **176**, 177, 190
- spinkwantumgetal ..... **45**, 47
- spoel ..... **222**,  
224, 224, 226, 227, 232, 233
- spoel  
wikkeldichtheid ..... 227
- spoelenergie ..... 230
- spreiding ..... **116**
- sterke kracht ..... 59
- straling *zie* alfa-, beta-, gamma-  
, laser-, rem-, röntgen-  
stroom ..... **90**
- stroomdichtheid ..... **90**
- stroomdoorgang ..... **180**
- stroom gestuurd schakelen .... 134
- stroomloos ..... **146**
- stroomloos schakelen ..... 134
- stroomvergelijking ..... 120
- stroomversterking .....  
..... **191**, 192, 193, 194
- stroomverzadiging ..... **93**, **183**
- stuurelektrode ..... **180**
- stuurpotentiaal ..... 180
- stuurspanning ..... **180**, 187
- T**
- tangentiele snelheid ..... **27**
- thermische (warmte) energie .. 114
- thermische elektronemis-  
sie  
inwendig ..... **142**
- thermische emissie  
uitwendig ..... **141**
- thermische emissie  
inwendig ..... 173
- thermisch evenwicht ..... **112**
- thermospanning .... 134, **141**, 150
- thermostroom ..... 134
- tijdconstante  
LR-kring ..... 233  
RC-kring ..... 211
- tijdconstante  
diode ..... 169  
LR-kring ..... 233  
RC-kring ..... 211
- toestanden-mechanica ..... 35
- totale energie ..... **29**
- transistor ..... 135
- U**
- uittree-energie .....  
. 136, **136**, 137, 137, 138,  
140, 141–143, 146, 148, 177
- uittreearbeid ..... 136

uitwendige veldemissie ..... **188**  
 unipolaire-transistor .... **179**, 188

**V**

vacature ..... **75**  
 valentie-elektronen ..... **71**  
 valentieband ..... 123, 128  
 vastestof ..... 70, 71, 89  
 veldeffect transistor ..... **179**  
 veldstroom ..... **111**, 112, 112  
 verarmingsgebied ..... 153,  
 155, **155**, 157–159, 161, 163  
 verarmingsgebied-capaciteit ...  
 ..... 162, 162  
 verarmingsgebied-diepte .....  
 ..... 156, 160, 161  
 verarmingsgebied-lading ..... 162  
 verarmingsgebied-model .....  
 ..... **155**, 156, 157, 158  
 verarmingsgebied-randveldsterkte  
 ..... **158**  
 verarmingsgebied-ruimtelading  
 ..... **158**, 161  
 verarmingsgebied-spanning ... 159  
 verarmingsgebiedmodel ..... 164  
 verarmingslaag ..... 194  
 verarmingstype MOSFET ... **185**  
 verdelingswet van Boltzmann .  
 ..... 111, 113,  
**114**, 115, 117, 118, 125, 150  
 verdelingswet van Fermi-Dirac  
 111, **118**, 125, 142, 155, 157  
 verrijkingsgebied ..... **186**  
 verrijkingsstype MOSFET **185**, **186**  
 vervangingscapaciteit ..... **203**  
 verzadiging ..... 183, 185, 186

verzadigingsgebied ..... 185  
 verzadigingsmagnetisatie .... **241**  
 verzadigingsspanning ... **182**, 183  
 verzadigingsstroom .....  
 .... **143**, 144, 178, 183, 183  
 verzadigingsveldsterkte ..... **93**  
 vloeistof ..... 71  
 voltapotentiaal ..... **120**, 139,  
 140, 141, 146, 151, 155, 168

**W**

warmtedissipatie ..... **177**  
 waterstof ..... 20, 22  
 waterstofatoom ..... 27, 31, 43  
 weerstand ..... 163  
 weerstandskracht ..... **89**, **96**  
 weerstandsmechanisme ..... 106  
 werkzame doorsnede ..... **15**  
 wet van Ampère ..... **222**  
 wet van Fick ..... **112**  
 wet van Gauss .....  
 .... 199, **199**, 200, 200, 215  
 wet van Kirchhoff ..... 192  
 wet van Lenz ..... **229**  
 wet van Ohm ..... **111**, 166

**Z**

zelfinductie .... 226, **226**, 227, 233  
 zelfinductie  
 ideale spoel ..... 227  
 Zenerspanning ..... **166**, 167  
 zuivere geleidbaarheid ..... 83  
 zuivere geleiding ..... 89  
 zuivere halfgeleider ..... 94  
 zuivere stof ..... **83**, 94  
 zwakke kracht ..... 59