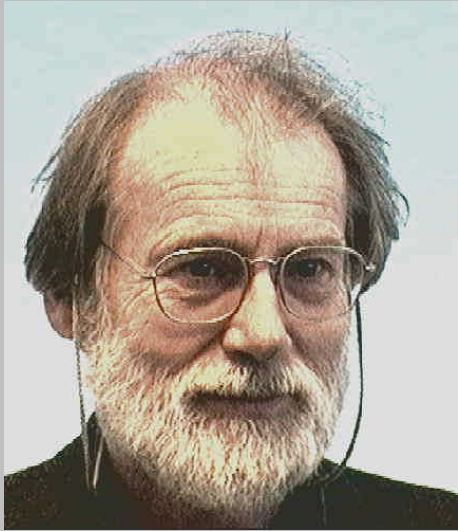


Elektron natuurkunde 2

Stromen en velden dr.ir. C.M.Fortuin



Cornelis Marius
Fortuin
(1940–)

De schrijver van dit boek heeft zich jarenlang verdiept in de natuurkunde van 'de vaste stof': tijdens zijn studie technische natuurkunde aan de TH Delft bij het afstuderen, tijdens zijn werk aan de RU Leiden bij het promotieonderzoek en daarna bij UC San Diego, KU Nijmegen en de Universiteit van Amsterdam bij theoretisch onderzoek. Die achtergrond werkt natuurlijk door in de leerstof die hij als docent natuurkunde schreef en gebruikte bij de Hogeschool Gelderland te Arnhem, tegenwoordig Hogeschool Arnhem en Nijmegen (HAN). Als gepensioneerde bereidde hij deze 'WorldWideWeb' publicatie van dit boek voor.

In 'Elektron Natuurkunde deel 2' worden de klassieke elektrotechnische componenten behandeld gebaseerd op de elektrische en magnetische velden. De leerstof is gedacht voor gebruik in de propaedeuse van elektrotechniek en technische natuurkunde, en voor wie maar is geïnteresseerd! In deel 1 laat zien, door behandeling van de natuurkundige achtergrond, hoe en waarom de elektronische componenten—die dankzij hun uiterst kleine afmetingen de wereld voorgoed hebben veroverd—werken, en waarom ze zich soms onder bijzondere omstandigheden anders edragen.

ELEKTRON NATUURKUNDE
Deel 2
STROMEN EN VELDEN
dr.ir. C.M.Fortuin

In 1995 was de uitgever Educatieve Partners Nederland BV, Houten
ISBN 90 401 03690

©2012 C.M.Fortuin, Oosterbeek (~~e.m.fortuin@heer.net.nl~~) (fortuinc@xs4all.nl)
Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden openbaar ge-
maakt zonder bron vermelding.

VOORWOORD

Een korte herhaling van het voorafgaande.

In het voorwoord van het eerste deel van ‘Elektron natuurkunde’ is toegelicht hoe dat moet worden gezien, namelijk als:

“een ‘inleiding’ op de elektron-ische verschijnselen: van de klassieke elektrische en magnetische velden tot de geleiding in vaste stoffen.”

Over de didactiek:

“Didactisch gezien is de leerstof zó aangeboden, dat ze tot in hoge mate zelfstandig kan worden doorgewerkt—daartoe zijn vele ‘tussenvragen’ en ‘testopgaven’ in de leerstof verwerkt. Daarom is dit boek geschikt voor ieder die, vrij zelfstandig, een goed *begrip* wil krijgen van de wereld van die verschijnselen. Zodat—als alle begrippen goed zijn verwerkt—de *achtergrond* daarvan bespreekbaar en ‘berekendbaar’ is.”

Over de beoogde lezer:

“De leerstof is in het bijzonder gedacht voor de studierichtingen *elektrotechniek* en *natuurkunde*. Vanwege het karakter van het hedendaagse HBO, is voor wat betreft de benodigde voorkennis gedacht aan een student met HAVO vooropleiding. Dat wil niet zeggen dat het gemakkelijke stof zal zijn: zeker niet! Er zal hard moeten worden gewerkt om alles te doorgronden—maar dan kan ook tot een goed begrip van de moderne toepassingen van de natuurkunde worden gekomen.”

Eigen karakter van deel 2.

In het eerste deel ligt het zwaartepunt van de leerstof bij de ‘vastestof’-natuurkunde. In dit tweede deel ligt het zwaartepunt bij de klassieke elektrische en magnetische velden. Die ‘onder’grond wordt gebruikt om de natuurkundige ‘achter’grond van de motor, generator, spoel en transformator te geven. Gevolgd door kennismaking met de em-velden, waar bij de glasvezel op de ‘voor’grond komt. Niet alleen de ‘ideale werking’ van componenten, maar ook de niet-ideale aspecten worden belicht.

Wat is speciaal in dit deel?

De lezer oordele zelf. Hier een lijstje, met ‘trefwoorden’ van op een speciale manier behandelde leerstof in dit deel:

- het ‘stroomlijnen-potentiaaloppervlakken’ beeld voor velden;
- de wederzijdse inductie bij spoelen;
- de lichtstraal-moden in de glasvezel;

Wat de lezer móet weten.

De leerstof is welbewust afgedrukt in drie lettertypen:

1. romein voor rustig *te bestuderen* leerstof (theorie);
2. schreefloos voor actief *door te werken* leerstof;
3. klein voor *extra* uitvoerige leerstof;

Bij de opgaven geven sterren aan wat van de lezer wordt verwacht:

- * theorie controle vraagstuk: direct ‘maken’, en bij verkeerd antwoord (achter hoofdstuk) terug lezen;
- ** toepassings gerichte oefening: direct maken, en doorgaan tot antwoord goed is;
- *** theorie doordenker, eventueel antwoord laten toelichten;

**** toepassings opgave: een laatste test op verwerking;

Toegevoegd zijn een ‘Inhoud’ en een ‘Index’, met trefwoorden.

Oosterbeek, maart 1995

dr.ir. C.M. Fortuin.

Naar het web.

De uitgever Stam Techniek gaf de rechten terug. Met ook de figuren elektronisch ‘gezet’ en enkele aanpassingen kan alles het web op.

Oosterbeek, maart 2012

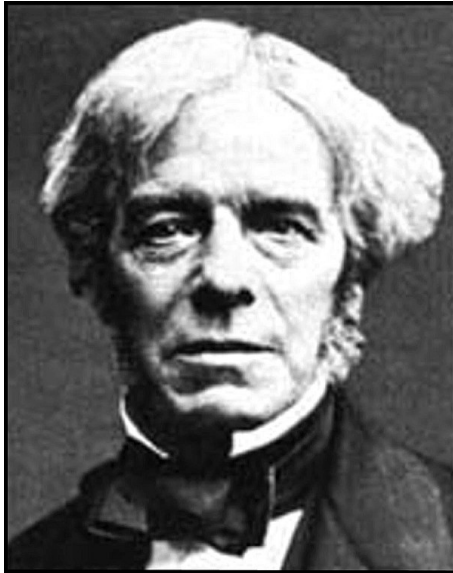
dr.ir. C.M. Fortuin.

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	7
1 STROMEN EN VELDEN	11
1.1 Inleiding	12
1.2 Stroomlijnen en potentiaalvlakken	13
1.2.1 Lading	13
1.2.2 Stroom	16
1.3 Stroom en Oppervlak	19
1.3.1 Stroom en flux	19
1.3.2 Veld en flux	22
1.4 Uitstroom en Elektrische behoudswetten	25
1.4.1 Uitstroom	25
1.4.2 Wet van Kirchhoff	26
1.4.3 Wet van behoud van lading	27
1.5 Wetten van Gauss	32
1.5.1 Elektrische wet van Gauss	32
1.5.2 Homogeen elektrisch veld	34
1.5.3 Elektrisch veld bollading	34
1.5.4 Magnetische wet van Gauss	37
1.6 Stroom door geleider	41
1.6.1 Wet van Ohm	41
1.6.2 Wet van Joule	49
1.7 Veldsterkte	51
1.7.1 Elektrische veld	51
1.7.2 Magnetische veld	55
1.8 Elektrische potentiaal	58
1.8.1 Potentiaal homogeen veld	58
1.8.2 Potentiaal en veldsterkte	61
1.8.3 Potentiaal inhomogeen veld	64
1.8.4 Potentiaal bollading	67
MEERKEUZEANTWOORDEN	71

2	LADINGEN EN STROMEN IN VELDEN	73
2.1	Lading in elektrisch veld	74
2.1.1	Coulombkracht op vrije lading	74
2.1.2	Elektronenbuis	81
2.1.3	Kracht tussen bolladingen 1	85
2.2	Dipool in elektrisch veld	86
2.2.1	Coulombkrachtmoment op dipool	86
2.2.2	Sorteerplaten	92
2.3	Bewegende lading in magneetveld	95
2.3.1	Lorentzkracht op vrije lading	95
2.3.2	Lorentzkracht en Coulombkracht	100
2.4	Stroom in magneetveld	104
2.5	Stroomkring in magneetveld	110
2.5.1	Lorentzkoppel op stroomkring	110
2.5.2	Lorentzkracht op stroomkring van inhomogeen veld	115
2.5.3	Elektromotor	115
2.6	Draaiende stroomkring in magneetveld	117
2.6.1	Inductiewet van Faraday	117
2.6.2	Inductiegenerator	121
	MEERKEUZEANTWOORDEN	125
3	INDUCTIE	127
3.1	Inleiding	128
3.2	Elektrische inductie	130
3.3	Wederzijdse inductie	136
3.4	Wederzijdse inductie-energie	143
3.4.1	Inductie-energie gekoppelde spoelen	143
3.4.2	Vervangingsinductie geschakelde spoelen	147
3.5	Transformator	152
3.5.1	Ideale transformator	152
3.5.2	Niet-ideale transformator	157
3.6	Stroomverdringing	161
3.7	Supergeleiding	167
	MEERKEUZEANTWOORDEN	174
4	STATISCHE VELDEN	177
4.1	Inleiding superpositie	178
4.2	Elektrische velden	181
4.2.1	Veld van elektrische dipool	181
4.2.2	Veld van lijnlading	187
4.2.3	Veld van vlaklading	194
4.2.4	Kracht tussen bolladingen 2	198
4.3	Magnetische velden	199

4.3.1	Veld van rechte lijnstroom	199
4.3.2	Veld van cirkelstroom	205
4.3.3	Veld van cilindrische spoel	209
4.3.4	Kracht tussen stroomgeleiders	214
	MEERKEUZEANTWOORDEN	219
5	DYNAMISCHE VELDEN	221
5.1	Inleiding	222
5.2	Vlakke golf golfvergelijking	224
5.3	Differentiaalvergelijkingen vlakke em-golf	229
5.4	Vergelijkingen em-veld	238
5.4.1	Golfvergelijking vlakke em-golf	238
5.4.2	De Maxwell vergelijkingen	243
5.5	Polarisatie en energiestroom	244
5.6	Breken van velden	251
5.7	Breken en spiegelen van stralen	253
	MEERKEUZEANTWOORDEN	262
	Index	263



Michael Faraday
(1791–1867)

In een eenvoudig gezin werd Faraday geboren in Newington Butts. Via zijn werk als chemisch laborant wist hij zich op te werken, in het bijzonder door zijn vele ontdekkingen: hij was een uitstekend 'experimentator'. Daarom zal hij in 1824 zijn benoemd als directeur van het 'Royal Institution', een laboratorium te Londen. Daar ontdekte hij in 1826 het benzeen. Maar zijn grote beroemdheid heeft hij te danken aan zijn natuurkundige onderzoeken. In 1831 ontdekte hij de 'inductiewet van Faraday', die van groot belang was voor de ontwikkeling van de theorie van de elektrische en magnetische verschijnselen. Ook vond hij in 1845 het interessante 'Faraday effect': wanneer gepolariseerd licht door een magneetveld loopt wordt het polarisatievlak gedraaid. In het algemeen waren zijn denkbeelden over het verschijnsel 'elektrici-

teit' en 'magnetisme' van grote invloed op de latere ontwikkelingen. Van hem is het idee om te werken met 'krachtlijnen' ('veldlijnen' zeggen we nu) en 'fluxen', die Maxwell inspireerden tot zijn werk. Zijn experimentele inslag blijkt ook uit 'de kooi van Faraday', de manier om elektrische verschijnselen van elkaar af te schermeren. Waarom Faraday niet tot hoogleraar benoemd werd is niet erg duidelijk; was hij 'te eenvoudig', of, te 'anders'. Hoe dan ook, gelukkig heeft hij vele bijdragen geleverd tot scheikunde (waar zijn eerste belangstelling naar uitging) en natuurkunde. Als laatste daarvan noemen we zijn onderzoek naar de werking van de condensator—door de internationale natuurkundige gemeenschap geëerd met de naar hem genoemde eenheid van capaciteit: de 'Farad'.

Hoofdstuk 1

STROMEN EN VELDEN

DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de hierna volgende begrippen zodanig te hebben opgenomen, dat u ermee kan werken en dat u ze kan toepassen in situaties, bijvoorbeeld zoals bij elektrische, magnetische en elektromagnetische verschijnselen.

- stroomlijn, veldlijn en potentiaalvlak, homogeen en inhomogeen veld;
- lading en ladingsdichtheid, eenheid elektrisch Coulomb;
- flux en -dichtheid, eenheid magnetisch Weber;
- diëlektrische verschuiving, magnetische inductie, eenheid Tesla;
- stroomsterkte en stroomdichtheid, eenheid elektrisch Ampère;
- gesloten oppervlak, omsloten volume en uitstroom;
- wet van Kirchhoff over behoud van stromen;
- wet van behoud van lading;
- wet van Gauss voor elektrische velden;
- veld van vlakkeplaten-condensator, bollading;
- wet van Gauss voor magnetische velden;
- wet van Ohm voor elektrische stroom door geleiders, eenheid Ohm;
- elektrische (soortelijke) geleiding en weerstand;
- serieweerstand, parallelgeleiding;
- elektrisch vermogen en elektrisch veldvermogen, wet van Joule en dissipatievermogen, eenheid Watt;
- elektrische kracht op lading: Coulombkracht, veldsterkte;
- elektrische arbeid: potentiaal, eenheid Volt;
- verband tussen veldsterkte en potentiaal;
- magnetische kracht op magnetische lading: magnetische veldsterkte;
- magnetische arbeid en magnetische potentiaal;

1.1 Inleiding

Bij de natuurkundige verschijnselen die we in de elektrotechniek tegen komen hebben we heel vaak te maken met elektrische ‘ladingen’ die bewegen door een deel van de ruimte. Bij een nadere studie van de componenten zal blijken dat we ook te maken hebben met ‘*velden*’ die door de ruimte gaan. In dit hoofdstuk zullen we op het gemeenschappelijke aspect: ‘stromen’, ingaan.

Welke ladingen stromen er zoal? Denk eens aan een elektrische stroom door een stroomdraad: de ‘elektronen’ bewegen daar door de draad. Als we een gloeilamp zien oplichten zijn het ook elektronen die bewegen, of, als we op het TV-scherm een beeld zien. Ook in de transistor is het weer het elektron dat het werk doet. Maar het is niet altijd een elektron: bij de TL buis en de accu zijn er ook ‘ionen’ die door het gas en de vloeistof bewegen.

Een aantal, maar niet alle, eigenschappen van elektrische ladingen die bewegen is het gevolg van het feit dat we met *een transport van ladingen* hebben te maken. En voor transporten gelden algemene wetten. Die gelden evengoed voor een elektrische stroom als voor een stroom water; of een stroom voertuigen.

Niet voor niets wordt een elektrische stroom met een waterstroom vergeleken. In alle gevallen hebben we als gemeenschappelijke factor dat er een stroom is: een transport van lading. Er zou ook iets voor te zeggen zijn om de elektrische stroom met warmtestroom te vergelijken. Het is al wat moeilijker in te denken dat we ook bij *elektrische en magnetische velden* te maken hebben met een stroom van deeltjes. Dat de onderzoekers uit de vorige eeuw daar geen moeite mee hadden blijkt wel uit de benamingen: men sprak b.v. bij het magnetische veld over de ‘magnetische flux’ (*flux* is latijn voor stroom). Wat voor deeltjes worden nu door de magnetische flux verplaatst? Daarover had men in het de zestiger jaren van de 19^e eeuw geen idee. Pas in onze zestiger jaren heeft de zienswijze dat ook bij elektrische en magnetische velden bepaalde deeltjesstromen optreden vaste vorm gekregen. Het blijken ‘virtuele’ fotonen (virtueel = niet zichtbaar) te zijn; niet zichtbaar dus, maar wel merkbaar doordat ze een kracht op ladingen uitoefenen. Zo zien we in een elektrisch veld dat een lading gaat bewegen, of draaien, in een magnetisch veld dat een magneetje gaat draaien.

1.2 Stroomlijnen en potentiaalvlakken

1.2.1 Lading

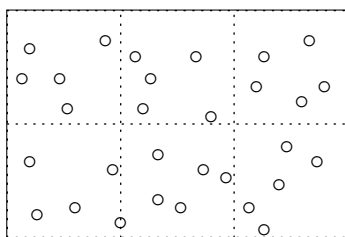
We spreken eerst duidelijk af dat er wat getransporteerd wordt: **lading**. Een ‘hoeveelheid lading’ noteren we als Q (de afkorting van ‘**Quantum**’, latijn voor ‘hoeveelheid’). Bij het berekenen van een hoeveelheid lading kunnen we twee gevallen onderscheiden: de lading is *homogeen* verdeeld over het volume en de lading is *niet homogeen* verdeeld over het volume. Om daar beter over te kunnen praten gebruiken we het begrip ‘ladingsdichtheid’.

Homogene ladingsverdeling Is de lading homogeen, dat wil zeggen gelijkmatig, verdeeld over een gedeelte van de ruimte met volume V , dan is de ladingsdichtheid gelijk aan de *lading per volume*. Ladingsdichtheid wordt genoteerd met ρ (de griekse letter ‘r’ho = onze ‘r’, de afkorting van ‘relatief’ = betrokken op (een kubieke meter)). Bij een *homogeen* verdeelde lading is de *ladingsdichtheid* ρ :

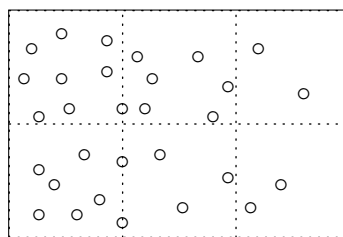
$$\rho = \frac{Q}{V} \quad Q = \rho V$$

De kenmerkende eigenschap van **homogene ladingsverdeling** is:

$$\rho = \text{constant in de ruimte}$$



Figuur 1.1 Homogene ladingsverdeling: gelijke volumedelen hebben gelijke lading.



Figuur 1.2 Inhomogene ladingsverdeling: gelijke volumedelen hebben verschillende lading.

Opg 1.2.1 * Als C de eenheid van elektrische lading is, dan is de eenheid van vlakladingsdichtheid:

- A C/m^3
- B As/m^3
- C C/m
- D As/m^2

Opg 1.2.2 * Als de ladingsdichtheid ρ de eenheid C/m^3 heeft, dan hoort de eenheid C bij:

- A vlakladingsdichtheid;
- B $\int \rho dV$
- C $\int \rho dA$
- D $\int \rho dl$

Opg 1.2.3 ** Een bol met een straal van $R = 2\text{ cm}$ is homogeen gevuld met lading met een ladingsdichtheid $\rho = 3\ \mu\text{C}/\text{m}^3$.

- a Bepaal de lading van de bol
- b Bepaal de lading in de kern van de bol—waarbij we als kern nemen het gedeelte binnen de straal van 1 cm.
- c Beredeneer, met een *relatieve* redenering, dat het laatste antwoord een achtste is van het eerste.

[Antw. a. $Q = 0,101\ \text{nC}$; b. $q = 12,6\ \text{pC}$; c. $q \sim r^3$]

Inhomogene ladingsverdeling Is de lading niet homogeen verdeeld over de ruimte van het volume V , dan delen we de ruimte op in meerdere volumedelen met volumedeel dV . Binnen ieder klein stukje ruimte afzonderlijk zal de lading wèl homogeen zijn verdeeld, mits het ruimtedeel maar klein genoeg is. Dus daar is de **ladingsdichtheid** ρ :

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{of} \quad dQ = \rho dV$$

Pas echter op! Voor ieder ruimtedeel met volume dV en lading dQ hebben we in principe een *aparte* ladingsdichtheid: *de ladingsdichtheid kan van plaats tot plaats verschillen*, en hoeft dus geen constante te zijn. Als de ladingsdichtheid wèl een constante is, dán is de lading homogeen verdeeld over de ruimte.

Totale lading: som en integraal Tellen we de verschillende ladingen dQ in het hele volume V op dan vinden we de totale lading Q binnen dat volume; er geldt dus:

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho dV$$

In woorden: *De totale lading Q is gelijk aan de som over alle volumedelen dV van de ladingsdeelen dQ daarin.* Het symbool \int is een langerekte S (de afkorting van Summa, latijn voor Som). Deze schrijfwijze is door G.W. Leibnitz (1675(!)) ingevoerd. Hij wist er heel handig mee te werken: in de wiskunde noemt men dat dan ‘integreren’, en zeggen ze ‘integraal’ voor wat dus gewoon ‘som’ is. Zo kunnen we bijvoorbeeld bij een homogene ladingsverdeling, waarbij de ladingsdichtheid ρ constant is, de ‘Som’ gemakkelijk berekenen: bij de Som $\int \rho dV$, over een

constante maal een volumedeel, kan de constante buiten de Som worden gehaald, dus $\rho \int dV$. Maar de Som van alle volumedelen is natuurlijk het volume V zelf, waaruit volgt dat $Q = \rho V$, zoals we reeds wisten.

Ladingsdeel: differentie en differentiaal De letter ‘d’ in dV en dQ is de afkorting van ‘deel’; het is ook op te vatten als een afkorting van ‘**differentie**’ = ‘verschil’ of, als het om *kleine* verschillen gaat, als ‘**differentiaal**’ = ‘oneindig klein verschil’. In de definitie van de ladingsdichtheid zien we een verhouding van zulke differentiaal. Volgens de wiskunde is een ‘verhouding van differentiaal’ = ‘*differentiaal-quotiënt*’ te verkrijgen door de *afgeleide* te nemen van de teller (Q) naar de variabele die in de noemer genoemd wordt (V). Omgekeerd is een ‘som’ van differentiaal volgens de wiskunde te verkrijgen door de ‘*integraal*’ te nemen van de afgeleiden.

Het rekenen met differentiaal wordt behandeld in de **differentiaalrekening** (spreekt voor zich), een onderdeel van de wiskunde. Het rekenen met het sommeren van differentiaal wordt behandeld in de **integraalrekening**. Wij zullen er regelmatig gebruik van maken. Ook de notatie voor afgeleide als een quotiënt is afkomstig van Leibnitz. Hij kreeg ruzie met I. Newton over wie dat rekenen met differentiëren en integreren zou hebben uitgevonden—Newton gebruikte het differentiëren al in 1666, maar alleen voor zichzelf om problemen op te lossen, en Leibnitz pas later —. Beiden dus.

Voorbeeld Massaverdeling stok Een stok (lengte 1m) is dik aan de bovenkant en smal onderaan. Stel dat de massa $m(h)$ van de stok, van onder tot aan de hoogte h , bepaald wordt door de formule:

$$m(h) = 0,2h(1 + h + \frac{1}{3}h^2)$$

Op welke hoogte is de massadichtheid (per lengteenheid) van de stok precies gelijk aan de massa per meter?

Omdat de massa meer bovenin dan onderin de stok zit, *schatten* we dat gemiddelde in de buurt van $h = 0,6$ m zit. Klopt dat?

We bepalen eerst de totale massa m van de stok door $h = 1$ m in te vullen: $m(1) = 0,2 \cdot 1(1 + 1 + \frac{1}{3}) = 0,27/3$ kg. De *gemiddelde* massadichtheid $m/1$ is dus 0,47 kg/m. Voor het berekenen van de *exacte* massadichtheid per meter stok op een willekeurige hoogte h bekijken we dat deel van de stok met lengte dh . Dat heeft een massadeel dm :

$$dm = \rho dh \quad \text{met} \quad \rho = \frac{dm}{dh}$$

Het laatste quotiënt is een differentiequotiënt. Door een heel klein stukje dh te nemen mag dm/dh worden opgevat als een afgeleide, en wel van m

naar h . Volgens de differentiaalrekening:

$$\begin{aligned}\rho &= m'(h) = (0,2h(1 + h + \frac{1}{3}h^2))' \\ &= 0,2(h + h^2 + \frac{1}{3}h^3)' \\ &= 0,2(1 + 2h + h^2) = 0,2(1 + h)^2\end{aligned}$$

We zoeken de hoogte h waarvoor:

$$\rho(h) = 0,2(1 + h)^2 = 0,27/3$$

Dat is als $1 + h = \sqrt{7/3}$, dus $h = \sqrt{7/3} - 1 = 0,53$ is. Dus maar net boven de helft.

- Opg 1.2.4 **** In een kubus met ribben van 5 cm is een lading zodanig verdeeld, dat de totale lading van de bodem tot aan de hoogte h gelijk is aan:

$$Q(h) = h^2 10^{-10} \text{ C}$$

a Laat zien dat

$$\rho = 8 \cdot 10^{-8} h \frac{dQ}{dh}$$

b Bereken de *ladingsdichtheid* precies in het midden.

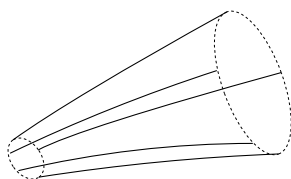
$$[\text{Antw. } \rho(0,025) = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^3]$$

- Opg 1.2.5 ****** In een kolom lucht bevinden zich luchtdeeltjes. De deeltjes zakken door hun massa naar beneden, en worden door de temperatuurbeweging weer omhoog geduwd, zodat er een exponentieële deeltjesdichtheid ontstaat:

$$\rho(h) = \text{constante} \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

In het argument van de exponent hebben de variabelen de volgende betekenis: m is de deeltjesmassa, g is de versnelling van de zwaartekracht, h is de hoogte van het deeltje boven de bodem, k is de Boltzmannconstante en T is de absolute temperatuur.

- a Bepaal de constante als op de bodem de deeltjesdichtheid $2,8 \cdot 10^{25} / \text{m}^3$ is. $[\text{Antw. } \text{constante} = 2,8 \cdot 10^{25} / \text{m}^3]$
- b Bereken de factor mg/kT voor een stikstofmolekuul, aannemende dat de *gemiddelde* temperatuur 250 K is. $[\text{Antw. } mg/kT = 1,3 \cdot 10^{-4} / \text{m}]$
- c Bereken de dikte van de atmosfeer, door de hoogte te bepalen waar het argument $-(mg/kT)h$ de exponentieële factor verwaarloosbaar klein maakt, namelijk 0,001. $[\text{Antw. } h = 53 \text{ km}]$
- d Bepaal de totale massa van de kolom per m^2 bodemoppervlak. Bedenk dat de dikte van de luchtlaag klein is vergeleken bij de aardstraal. $[\text{Antw. } M/A = 1,0 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^2]$
- e Bepaal de totale massa van de atmosfeer. $[\text{Antw. } M = 5,1 \cdot 10^{18} \text{ kg}]$



Figuur 1.3 Stroomlijnen die samen een stroombuis vormen

1.2.2 Stroom

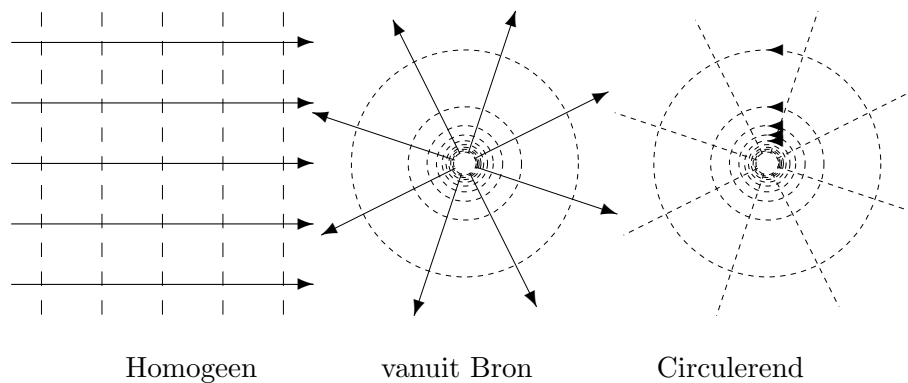
Stroomlijn We richten onze aandacht nu op het bewegen van de *lading*. Lading beweegt langs de transportweg. Volg eerst een bepaalde deellading dQ tijdens de beweging: de deellading volgt een of andere *baan* binnen de transportweg. Denk bijvoorbeeld aan de baan van een elektron in een geleidende draad. De ‘baan’ van een lading Q (mits klein genoeg) noemen we een **stroomlijn**.

Bij een vloeistofstroom is er een mooie manier om de stroming zichtbaar te maken: druppel kleurige inkt op een bepaalde plek in de stromende vloeistof en de stroomlijnen worden zichtbaar. Een elektronenstroom zichtbaar maken is veel moeilijker, maar lukt toch: doe wat speciaal gas in een verder lege buis waarin de elektronen stromen en de elektronbanen worden zichtbaar door oplichten. Een magnetisch veld zichtbaar maken gaat met ijzervijlsel, en een elektrisch veld wordt zichtbaar met behulp van korreltjes polarizeerbaar materiaal: de veldlijnen zijn te zien in het patroon van de korrels.

Stroombuis Het oppervlak van de bundel ‘banen’ van vele ladingen Q , ook grote, noemen we een **stroombuis**. Soms kan een stroombuis een echte buis zijn, bijvoorbeeld bij watertransport of gastransport. Bij elektrische stroom is de **stroomdraad** een stroombuis, namelijk van de ‘totale stroom’ die door de draad gaat. Het transport van lading is dan over de hele doorsnede van de draad verdeeld. Maar de stroomverdeling kan ook veel ingewikkelder zijn. Bijvoorbeeld: bij een *hoogfrequente wisselstroom* loopt de stroom alleen langs de *buitenkant* van de draad. Nog ingewikkelder is het bij elektrische velden, die door diëlektrica stromen, terwijl magnetische velden door magnetiseerbare stoffen stromen. Elektrische en magnetische velden kunnen ook door vacuüm stromen, zij het niet van harte.

Potentiaalvlakken Voor een goed inzicht in de stroming is het belangrijk om *vlakken* te tekenen die *haaks op de stroming staan*. We noemen dat **potentiaalvlakken**. We zullen potentiaalvlakken dichter op elkaar tekenen als ook de *stroomlijnen* dichter op elkaar gaan lopen:

daardoor kunnen we aan de dichtheid van stroomlijnen òf potentiaalvlakken zien waar de stroming sterk is. De stroomlijnen en potentiaalvlakken bevatten daardoor veel informatie over de stromen. (Later meer over het begrip potentiaal.) In fig 1.4 zijn enkele stromen getekend met stroomlijnen en potentiaalvlakken.



Figuur 1.4 Stroomlijnen (getrokken lijnen) en potentiaalvlakken (gestreepte lijnen) in een vlak bij drie verschillende situaties: een elektrische stroom door een ronde geleider, een elektrisch veld rond een draad, een magnetisch veld rond een ronde geleider.

- Opg 1.2.6 ***** Teken de *stroomlijnen* en de *potentiaalvlakken* van het elektrische veld dat uit een lange geladen naald komt. Vergelijk dit veld met dat van een puntlading: wat is de—ogenschijnlijke—overeenkomst, en, wat is het verschil?
- Opg 1.2.7 ***** Teken de *stroomlijnen* en de *potentiaalvlakken* van het magnetische veld dat rond een lange stroomdraad staat. Vergelijk dit veld met het elektrische veld rond een lange geladen naald: wat is de—ogenschijnlijke—overeenkomst, en wat het verschil?

1.3 Stroom en Oppervlak

1.3.1 Stroom en flux

Stroomsterkte Nadat we de lading en de transportweg hebben bekeken, bezien we nu het **transport** zelf. We gaan naast de transportweg staan en bestuderen wat er zoal aan *lading* voorbijkomt. Hoe doen we dat precies? Neem een potentiaalvlak loodrecht op de stroombuis; we hebben dan een **doorsnedeoppervlak** A (van ‘A’rea, latijn voor ‘oppervlak’). Bepaal nu welke lading in een seconde door A heen gaat. *De grootte van de lading die per seconde door een doorsnedeoppervlak van de stroombuis gaat*, heet de **stroomsterkte**; we noteren de stroomsterkte met I (een afkorting van ‘I’re, latijn voor ‘vloeiën’). Gaat er in een tijdsdeel dt een ladingsdeel dQ door het doorsnedeoppervlak A van de stroombuis, dan geldt voor de stroomsterkte I :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De *eenheid van elektrische stroomsterkte*, lading per seconde C/s, is de *Ampère*, symbool **A**; daaruit volgt voor de *eenheid van elektrische lading Coulomb*, symbool **C**: $C = A \text{ s}$ (zie ook 215). Bekijken we de stroom over langere tijd, dan moeten we voor de totale lading die voorbij is gegaan de ladingsdeelen sommeren:

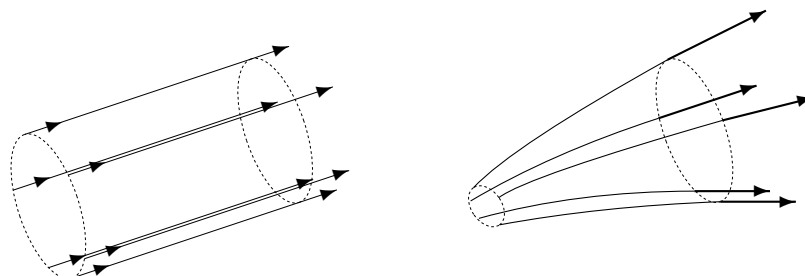
$$dQ = I dt \quad Q = \int I dt$$

Ook wanneer de stroom niet ieder moment even sterk is blijft de somregel voor de lading juist. Is I constant, dan geldt eenvoudig de regel $Q = It$.

Stroomdichtheid homogene stroming Voor de berekening van de stroomsterkte onderscheiden we, op overeenkomstige manier als bij de berekening van de totale lading binnen een *volume* V , weer twee gevallen: de stroom is homogeen of niet-hogeen over de dwarsdoorsnede van de stroombuis verdeeld. Is de stroom *homogeen* over de dwarsdoorsnede van de stroombuis verdeeld, dan is het eenvoudig om uit de stroomsterkte I de *stroomdichtheid* J , *de stroom per oppervlak* te berekenen. Is de grootte van het oppervlak van de dwarsdoorsnede van de stroombuis gelijk aan A , en de stroomsterkte erdoor I , dan geldt volgens de definitie:

$$J = \frac{I}{A} \quad I = JA$$

Bij een elektrische stroom wordt de elektrische stroomsterkte gemeten in de eenheid A (mpère = C s), zodat de **eenheid van elektrische stroomdichtheid** wordt A/m².



a Homogene stroom: stroomlijnen lopen evenwijdig.

b Inhomogene stroom: stroomlijnen lopen uit elkaar.

Figuur 1.5 Stroombuis met stroomlijnen en een potentiaalvlak. Een lading passeert altijd het potentiaaloppervlak A via zijn stroomlijn.

Stroomdichtheid inhomogene stroming Is de stroom *niet homogeen* over het oppervlak verdeeld, dan delen we het oppervlak op in hele kleine delen, met ieder een klein deeloppervlak dA , *zó klein*, dat de stroom door het deeloppervlak *wél homogeen is*. Gaat door het deeloppervlak een stroomsterkte dI , dan is de **stroomdichtheid** J ter plekke:

$$J = \frac{dI}{dA} \quad dI = JdA$$

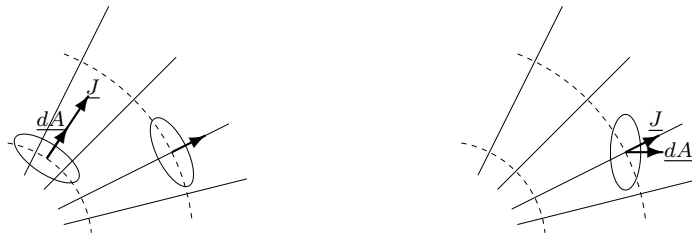
Richting stroomdichtheid Is de *richting van de stroom* niet overal dezelfde, dan wordt de stroomdichtheid als *vector* opgevat. Vectors worden hier aangegeven door *onder* de grootte een *streepje* te zetten. Zo is de richting van de stroming de richting van de **stroomdichtheid** \underline{J} . Ook het deeloppervlak is als vector op te vatten: de richting is die van de normaal. Dus staat de **oppervlakvector** \underline{dA} loodrecht op het *potentiaalvlak*, en langs de *stroomlijnen*. Volgens de vectorrekening is het **inwendig produkt** van twee vectoren \underline{J} en \underline{dA} :

$$\underline{J} \cdot \underline{dA} = J dA \cos \varphi$$

gelijk aan het produkt van de twee vectorlengten (zonder streepje), vermenigvuldigd met de cosinus van de hoek φ daartussen. De vergelijkingen voor de stroom *in vectornotatie* worden:

$$dI = \underline{J} \cdot \underline{dA} \quad I = \int_A \underline{J} \cdot \underline{dA}$$

Stroom in oppervlakrichting Het inwendig product van vectoren kunnen we ook anders interpreteren, gelet op het volgende. De factor $dA \cos \varphi$ is de component van het deeloppervlak dA in de richting van de stroom (dus \underline{J}); daarbij is φ de hoek tussen de stroomrichting (stroomlijn) en de normaal op het oppervlak. Dus blijkt, dat van de stroomdichtheid alléén de component in de richting van de oppervlakvector telt voor de stroom door dat oppervlak (wel logisch natuurlijk).



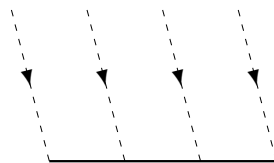
a Potentiaalvlak: stroomlijnen loodrecht op het oppervlak, dus \underline{J} maakt een hoek 0 met \underline{dA} .

b Verticale doorsnede: stroomlijnen onder scheve hoek door het oppervlak, dus \underline{J} maakt een hoek met \underline{dA} .

Figuur 1.6 Stroomdichtheid \underline{J} en oppervlakvector \underline{dA} bij verschillende (deel)doorsneevlakjes van de stroomlijnen.

Deze manier voor het bepalen van de stroom maakt het mogelijk om de stroom door een willekeurig oppervlak (dus niet speciaal loodrecht op de stroming) te bepalen. Voorwaarde is wel, dat we bij grote oppervlakken en inhomogene velden de stroomdichtheid, de stroom per vierkante meter, overal op het oppervlak kennen, zowel in grootte als in richting.

Voorbeeld Regen op plat dak Een regenbui met een 'sterkte' van $10\text{l/m}^2\text{min}$ valt onder een hoek van 20° op een plat dak met een oppervlak van 9m^2 . Hoeveel regen valt er op het dak als de bui 10 minuten duurt?



Gegeven is: $J = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/(\text{m}^2\text{min})$, dus 1 cm/min . In de richting van de oppervlakvector van het platte dak (dus in de richting van de verticaal) is de component:

$$J \cos(\varphi) = 1 \cos(20^\circ) = 0,94 [\text{cm/min}]$$

Zou het regenwater niet afvloeien, dan stijgt het water op het dak met $0,94 \text{ cm/min}$.

Voor de sterkte van de regen op het platte dak geldt dan:

$$I = J \cos(\varphi) \cdot A = 0,94 \text{ cm/min} \cdot 9 \text{ m}^2 = 8,46 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{min}$$

Als de regenbui 10 minuten duurt is er dus $0,85 \text{ m}^3$ regen op het dak gevallen.

- Opg 1.3.1 **** Een regen, met een stroomdichtheid van $1 \text{ l/m}^2\text{min}$, valt onder een hoek van 30° met de verticaal, op een vijver met een oppervlak van 2 m^2
- a hoeveel stijgt het waterniveau per uur? [Antw. $dh/dt = 5,20 \text{ cm/h}$]
 b welke stroom valt in de vijver? [Antw. $I = 28,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$]

- Opg 1.3.2 **** Het regent, met een stroomdichtheid van $1 \text{ l}/(\text{m}^2\text{min})$ onder een hoek (van links) van 30° met de verticaal. Een dak bestaat uit twee dakvlakken onder 45° graden met de horizon, elk met een oppervlak van 20 m^2 . De verhouding tussen de waterstromen in de regenpijpen van de linkerkant en de rechterkant is:
- A 1,00
 B 1,41
 C 1,73
 D 3,73

1.3.2 Veld en flux

Elektrische flux en fluxdichtheid Ook bij velden wordt het begrip flux, dat is ‘stroom’ in het latijn, gebruikt. Bij magnetische velden wordt de magnetische **flux**, symbool Φ , de griekse letter ‘Fi’; bij elektrische velden wordt de elektrische **flux**, genoteerd met symbool Ψ , de griekse letter ‘Psi’. De **eenheid van elektrische flux** is *Coulomb*: gelijk aan de *eenheid van elektrische lading*. Dat is niet toevallig; we zullen erop terugkomen. De **elektrische fluxdichtheid**, ook genoemd de **diëlektrische verschuiving**, heeft symbool D ; het streepje onder de D is een vectorstreepje, en geeft aan, dat het veld een richting heeft (namelijk van de veldlijn). De **eenheid van elektrische fluxdichtheid** is gelijk aan die van de *vlakladingsdichtheid* C/m^2 .

Vergelijkbaar met de situatie bij ladingstromen kunnen we in het algemeen de *elektrische flux* uitdrukken in de fluxdichtheid; door voldoende kleine deeloppervlakken te nemen van een veldbuis geldt:

$$d\Psi = \underline{D} \cdot d\underline{A} \quad \Psi = \int_A \underline{D} \cdot d\underline{A}$$

Magnetische flux en fluxdichtheid In geval van magnetische velden noteren we de **flux** met het symbool Φ , en de **magnetische fluxdichtheid** of **magnetische inductie** met het symbool B (vector \underline{B}); de **eenheid van magnetische fluxdichtheid** is **Tesla**, symbool $T=$

Wb/m². Praktisch wordt ook wel gebruikt de eenheid **Gauss**: 10⁻⁴ T = 1 Gauss, in verband met de sterkte van het aardmagneetveld. De formule voor de *magnetische flux* wordt:

$$d\Phi = \underline{B} \cdot \underline{dA} \quad \Phi = \int_A \underline{B} \cdot \underline{dA}$$

Nemen we, bijvoorbeeld, een *potentiaalvlak* als oppervlak A , dan zijn fluxdichtheid en deeloppervlak (normaal!) evenwijdig, dus gaat alle fluxdichtheid door het (potentiaal)oppervlak: $\underline{D} \cdot \underline{dA} = D dA$ of $\underline{B} \cdot \underline{dA} = B dA$.

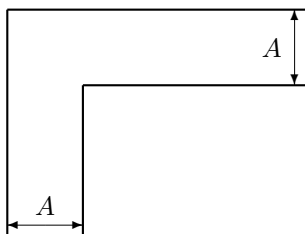
Voorbeeld Versmalling Een regenstroom van 10 l/min gaat door een rechthoekige goot, waarvan de doorsnede vanaf een breedte van 10 cm verbreed met 5 cm/m. Hoe verloopt de stroomsnelheid als de waterhoogte 2 cm is?

Dezelfde stroom zal door een steeds bredere goot gaan. We nemen aan dat de waterhoogte h gelijk blijft. De potentiaalvlakken zijn ongeveer rechte vlakken met een oppervlak $A = bh$, met $h = 2$ cm, en $b = 0,1 + 0,05x$. De *stroomdichtheid* J zal moeten verminderen om de breedtevermeerdering te compenseren:

$$I = JA = Jbh = J(0,1 + 0,05x)0,02 = 10 \cdot 10^{-3} / 60$$

Door de versmalling vermindert de stroomdichtheid, dus de stroomsnelheid, als $J = 0,083 / (1 + 0,5x)$: na 2 m de helft, enz.

Opg 1.3.3 ** Een magnetische flux van 100 μ Wb gaat door een ijzeren staaf met een doorsnede A van 10 cm². De staaf maakt een haakse bocht.



- Teken de fluxlijnen en potentiaalvlakken.
- Bereken de flux Φ en fluxdichtheid B in de staaf voor en na de bocht.
[Antw. $\Phi = 0,1$ mWb; $B = 0,1$ T]
- Idem precies in de bocht.
[Antw. $\Phi = 0,1$ mWb, $B = 0,071$ T]

Opg 1.3.4 * De eenheid van elektrische fluxdichtheid is:

- A C B C/m² C Wb D Wb/m²

Opg 1.3.5 * Het symbool voor is:

- A Φ B B C Ψ D D

Opg 1.3.6 * Het symbool voor is:

- A Φ B B C Ψ D D

Opg 1.3.7 * De eenheid van elektrische flux is niet:

- A As B V/m C C D J/V

Opg 1.3.8 ** Een elektrische flux van $100 \mu\text{C}$ komt uit een meterlange draad die op hoogspanning is gezet.

a Teken de fluxlijnen en *potentiaalvlakken*.

b Bereken de flux Ψ en fluxdichtheid D op 1 m.

[Antw. $\Psi = 100 \mu\text{C}; D = 15,9 \mu\text{C}/\text{m}^2$]

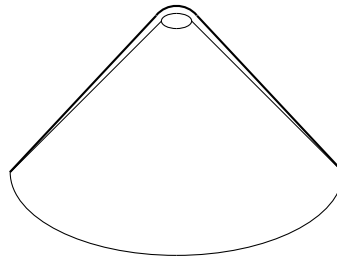
c Idem op 10 cm.

[Antw. $D = 159 \mu\text{C}/\text{m}^2$]

d Idem op afstand r .

[Antw. $D = 15,9\mu/r$]

Opg 1.3.9 ** Een vulkaan spuwt uit de krater lava met in een stroom van 10^8 kg/s . De vulkaan is kegelvormig met een denkbeeldige top op 1000 m; de helling maakt een hoek van 45° met de verticaal. De kraterdiameter is 200 m.



a Teken de vulkaan in een verticale dwarsdoorsnede (schaal 1:10000)

b Bereken bij de krater de stroomsterkte en stroomdichtheid.

[Antw. $I = 10^8 \text{ kg/s}, J = 3,18 \cdot 10^3 \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}$]

c Bereken de dikte d van de lavastroom op de helling ter hoogte van de krater door er van uit te gaan, dat niet alleen de stroom maar ook de stroomdichtheid overal dezelfde is.

[Antw. $d = 50 \text{ m}$]

d Bereken de dikte d van de lavastroom op de helling ter hoogte van het grondvlak onder dezelfde aanname.

[Antw. $d = 4,55 \text{ m}$]

e **** Bereken de dikte d van de lavastroom als functie van de hoogte h onder dezelfde aanname.

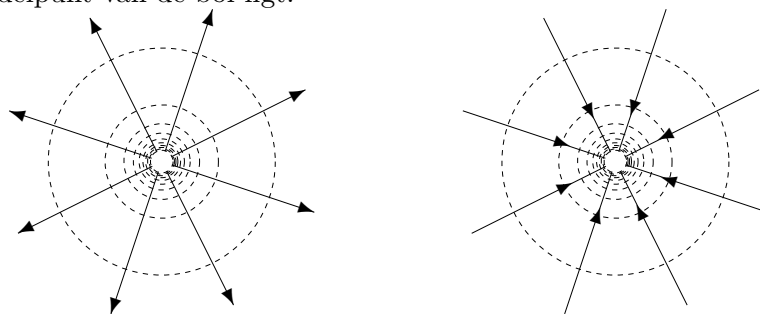
[Antw. $d = 5 \cdot 10^3 / (1100 - h)$]

1.4 Uitstroom en Elektrische behoudswetten

1.4.1 Uitstroom

Bronnen en putten Wat weten we van stromen en fluxen in een veld? We merken op, dat er **bronnen** zijn aan te wijzen, waar de stroming lijkt te ontstaan. Ook zijn er **putten**, waar de stroming lijkt te verdwijnen. Ontstaat er evenveel stroom als er verdwijnt? In deze paragraaf zullen we ons ondermeer bezighouden met het begrip *uitstroom*. Dat is een hulpmiddel bij het bepalen van de hoeveelheid die uit een bron komt. Verder bekijken we welke wetten voor de uitstroom gelden. Omdat die wetten iets uitdrukken over het ‘behouden’ blijven van bepaalde meetwaarden, noemt men zulke wetten **behoudswetten**. We beperken ons tot elektrische stromen, en, elektrische en magnetische velden.

Omsloten volume Om te weten te komen hoeveel lading er uit een bron komt bezien we eerst een *geheel gesloten oppervlak* dat de bron omsluit. Denk daarbij aan een boloppervlak, of aan een kubusoppervlak. Omdat we een gesloten oppervlak hebben, omsluit dat de ruimte ‘binnen het oppervlak’; die ruimte noemen we het **omsloten volume**. Zo zal een boloppervlak een bolvormig ‘omsloten volume’ hebben, waarin het middelpunt van de bol ligt.



a bron: uitstromend.

b put: instromend.

Figuur 1.7 Stroming bij bronnen en putten; alleen aan de pijlrichting is het verschil tussen een bron en een put te zien.

Oppervlaktevector De stroom zal op allerlei plaatsen door het omsluitende oppervlak gaan. Om te weten te komen hoeveel stroom er door het oppervlak gaat delen we het oppervlak op in verschillende oppervlakdelen. De grootte en richting van de *oppervlakvector* $d\vec{A}$ van verschillende oppervlakdelen zullen natuurlijk verschillen. Ook kan de stroomdichtheid \vec{J} verschillen per deeloppervlak (maar dat hoeft niet). Wel moeten de verschillende **deeloppervlakken** dA van het omsluitend

oppervlak A_{om} *klein genoeg* zijn, om te kunnen zeggen dat daar de stroming homogeen is en de stroomdichtheid en bepaalde waarde heeft.

Er is nog iets waarop we moeten letten bij de *richting* van de oppervlakvector \underline{dA} , namelijk ‘welke kant op’. De richting moet *zó* zijn dat een deelstroom *naar buiten* als *positief* telt. Daartoe moeten we ervoor zorgen dat de oppervlakvector naar *buiten* staat. Bij een boloppervlak staan bijvoorbeeld de deeloppervlakvectoren precies langs de straal door het deeloppervlak naar buiten gericht.

Uitstroom en teken uitstroom De totale stroom die door het omsluitende oppervlak gaat komt *uit* het omsloten volume. De uitstroom uit het volume is de stroom *door* het omsluitende oppervlak, *van binnen naar buiten*. De uitstroom is de netto stroom, de som van de deelstromen over alle delen van het omsluitende oppervlak. Eerder zagen we, dat we bij een *homogene stroom*, met stroomdichtheid \underline{J} , door het deeloppervlak \underline{dA} een **deelstroom** dI gelijk aan $dI = \underline{J} \cdot \underline{dA}$ krijgen. Door alle deeluistromen te sommeren over het **omsluitend oppervlak** A_{om} van het omsloten volume krijgen we de totale **uitstroom** I_{uit} :

$$I_{\text{uit}} = \int_{A_{\text{om}}} \underline{J} \cdot \underline{dA}$$

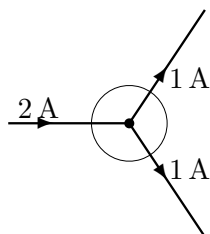
Merk op, dat inderdaad *uitgaande stroming positief* telt, omdat èn de *oppervlakvector* èn de *stroomdichtheid* naar buiten gericht zijn. De hoek tussen die twee vectoren is dan scherp, waardoor de cosinus positief is. Dus is ook het inwendig produkt van de twee vectoren positief: $\underline{J} \cdot \underline{dA} = J dA \cos(\varphi) > 0$. Evenzo telt *inkomende stroming negatief*.

1.4.2 Wet van Kirchhoff

Eenvoudige netwerken We passen het idee van de *uitstroom* toe op eenvoudige elektrische netwerken. Binnen weerstanden of verbindingsdraden in netwerken is schepping of ophoping van lading niet te verwachten. Neem bijvoorbeeld als omsloten volume dat deel van de ruimte waarin het netwerk zich bevindt. Nog beter is het om dat volume slechts één element (weerstand, verbinding, enz) te laten bevatten—maar het mogen wel meerdere elementen zijn. Het gehele netwerk zal vele elementen en verbindingen bevatten. Maar welk volume we ook nemen, er zal evenveel lading instromen als dat er lading uitstroomt. (Je zou bijvoorbeeld ‘elektronen kunnen tellen’ die in en uit gaan). In een eenvoudig elektrisch netwerk zijn geen bronnen of putten. Dit wordt samengevat in de **wet van Kirchhoff** (G.R. Kirchhoff, 1847):

$$I_{\text{uit}} = 0 \quad \text{de wet van Kirchhoff}$$

Knooppunten netwerk Om de wet van Kirchhoff preciezer te formuleren nemen we het volume om die plaatsen waar géén elementen zijn, maar waar de verbindingen bij elkaar komen: de **knooppunten** van het netwerk. Het oppervlak laten we dan één knooppunt omsluiten; slechts op enkele plaatsen gaat een stroom (verbinding) door het oppervlak. De deelstromen worden dan als vanzelf de stromen door de takken van het knooppunt. De uitgaande stromen tellen positief en de ingaande stromen negatief. De *wet van Kirchhoff* luidt nu: *de netto stroom uit een knooppunt is nul*.



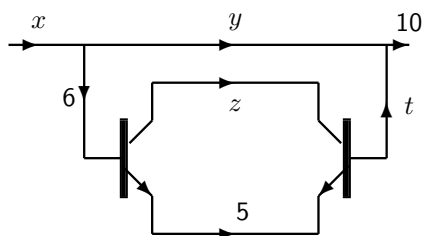
Figuur 1.8 Knooppunt van netwerk

In de figuur zien we dat er een stroom van 2 A inkomt, en dat er twee stromen van 1 A uitgaan. De wet van Kirchhoff, toegepast op het knooppunt, wordt:

$$I_{\text{uit}} = -2 \text{ A} + 1 \text{ A} + 1 \text{ A} = 0$$

zoals verwacht.

Opg 1.4.1 **



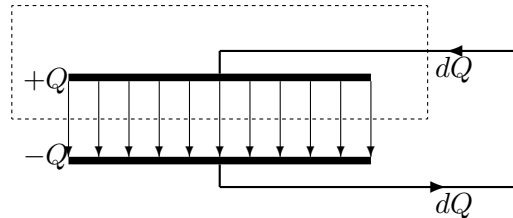
Bereken de stromen door de takken x , y , z en t op basis van de takstromen 6, 5 en 10.

[Antw. $x = 10$, $y = 4$, $z = 1$, $t = 6$]

1.4.3 Wet van behoud van lading

Ophopen van lading De wet van Kirchhoff geldt niet overal in willekeurige elektrische netwerken. Er zijn wel degelijk elementen denkbaar waar elektrische *lading* kan ophopen. Dat lijkt een beetje gek, maar realiseer je, dat de elektrische lading bijvoorbeeld een elektron is, die je toch niet zomaar kan laten verdwijnen aan het eind van een geleider. Als we bijvoorbeeld bij een condensator de stroom (ladingen) naar een plaat sturen waar het niet verder kan, dan moet de lading wel *tijdelijk* op de plaat worden opgeslagen. We merken op, dat zo iets niet vanzelf gaat, maar dat de omstandigheden voor het opslaan van ladingen geschikt moeten zijn.

Condensatorplaat We bekijken één plaat van een *vlakkeplaten-condensator* met. Neem een volume dat de ene *condensatorplaat* wel omvat, maar de andere niet. De uitstroom van dat volume is de uitgaande *stroom* door



Figuur 1.9 Condensatorplaten voor het ophopen van elektrische lading $+Q$. Merk op, dat voor het opslaan van lading een ‘tegen’plaat ‘ $-Q$ ’ nodig is.

de tak (of takken) naar die plaat. De stroom I is gelijk aan het uitgaand *ladingsdeel* dQ dat per seconde dt door die tak gaat. Die lading wordt onttrokken aan de *lading* Q die op de plaat is. Maar Q is precies de lading *in* het volume. Die observatie leidt tot de **wet van behoud van lading** (G.R. Kirchhoff, 1847):

$$I_{\text{uit}} = -\frac{dQ_{\text{in}}}{dt} \quad dQ_{\text{in}} = -I_{\text{uit}}dt$$

Omgekeerd leidt een ingaande stroom tot het ophopen van lading. Merk op, dat de *wet van Kirchhoff* een *bijzonder geval* is van de wet van behoud van lading. Immers, bij een gewoon knooppunt van een schakeling is er geen lading, $Q_{\text{in}} = 0$, waardoor het rechterlid nul is. De wet van Kirchhoff geldt blijkbaar ook als het omvattende volume een *volledige* ‘condensator’ bevat.

Voorbeeld Laden condensator Een ongeladen *condensator* wordt vanaf $t = 0$ door een stroombron geladen. De stroombron geeft een wisselende gepulste stroom af met een frequentie van 1 Hz en een amplitude van 3 A. Voor de linkerplaat geeft dat een toevoerstroom:

$$\begin{aligned} 0 < t < 0,5 & : i(t) = 3 \text{ A} \\ 0,5 < t < 1,0 & : i(t) = -3 \text{ A} \end{aligned}$$

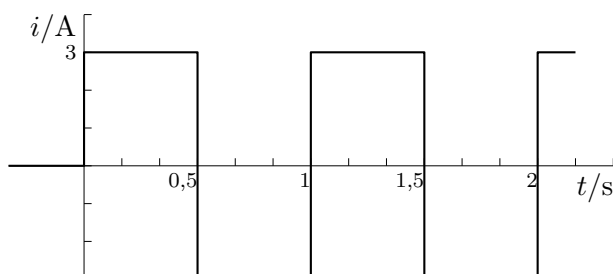
Bepaal de lading op de linkerplaat als functie van de tijd.

Voor we in detail kijken naar de ladingsopbouw op de plaat, een paar eenvoudige observaties. De stroom bestaat uit 0,5 s opladen gevolgd door 0,5 s ontladen. Daaruit concluderen we, dat de lading de eerste halve seconde toeneemt (tot haar maximale waarde) om in de volgende halve seconde weer terug te keren naar haar oorspronkelijke waarde. De lading krijgt daardoor een ‘op en neer’ karakter.

De lading op de plaat wordt bepaald door de wet van behoud van lading:

$$I_{\text{uit}} = -\frac{dQ_{\text{in}}}{dt} \quad \rightarrow \quad dQ_{\text{in}} = -I_{\text{uit}}dt$$

Door tijdsdelen dt achter elkaar te nemen en de bijbehorende ladingsdelen dQ op te tellen vinden we de lading die er totaal in dat tijdsbestek is



Figuur 1.10 Stroom i naar een condensatorplaat; let erop dat de stroomrichting afwisselend positief (opladen) en negatief (ontladen) is.

bijgekomen:

$$[Q_{\text{in}}] = - \int I_{\text{uit}} dt$$

Het linkerlid geeft met de sluihaken [en] aan dat het om de netto toename gaat van de lading in het volume; dus:

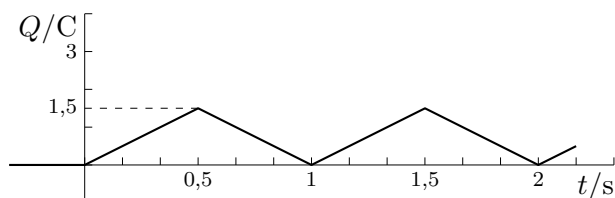
$$[Q_{\text{in}}] = Q_{\text{in}}(t) - Q_{\text{in}}(0)$$

De som in het rechterlid kan worden opgevat als een wiskundige integraal over de variabele de tijd t (vanwege de differentiaal dt) van de integrand I_{uit} . Dus tot aan het tijdstip t :

$$- \int I_{\text{uit}} dt = - \int_0^t I_{\text{uit}}(t) dt$$

Hiermee is de natuurkundige betekenis, met som, omgezet in een wiskundige betekenis, met integraal. Merk op, dat de ' dt ' al aanwezig was, maar een speciale 'integratievariabele' betekenis heeft gekregen.

Pas de wet van behoud van lading toe op een condensatorplaat. Neem daartoe een volume dat die plaat omvat, maar niet de andere plaat. Daarin is een lading $Q_{\text{in}} = Q$, de lading van de plaat. Eruit gaat een stroom $I_{\text{uit}} = -i(t)$. Het min-teken is het gevolg van het feit dat de stroom naar



Figuur 1.11 Lading Q op een condensatorplaat; de lading is de integraal van de stroom, en omgekeerd, de stroom is de afgeleide van de lading. Vergelijk de stijgende en dalende delen van de lading met de positieve en negatieve stroom in fig.1.10

binnen gaat. In de eerste halve periode van $t = 0$ tot $t = 0,5\text{s}$ is $i = +3\text{A}$, dus $I_{\text{uit}} = -3$:

$$Q = - \int_0^{0,5} -3 dt = 3 \int_0^{0,5} dt = 3(0,5) = 1,5$$

In de eerste halve periode neemt de lading op de plaat evenredig met de tijd toe. Dat is in de grafiek van de lading fig: 1.11 te zien als de stijgende lijn vanaf $t = 0$. Op de andere plaat is dan de lading negatief (neemt af met de tijd) vanwege behoud van lading voor de condensator als geheel. In de tweede halve periode vinden we de lading door vanaf $t = 0,5\text{s}$ tot $t = 1\text{s}$ de waarde $i = -3$, dus $I_{\text{uit}} = +3$, te sommeren:

$$[Q]_{0,5}^1 = - \int_{0,5}^1 3 dt = -3 \int_{0,5}^1 dt = -1,5$$

$$Q(1) - Q(0,5) = -1,5$$

Omdat uit de boven gegeven afleiding blijkt dat $Q(0,5) = 1,5\text{C}$, vinden we zo binnen de tweede halve periode de lading:

$$Q(1) = 1,5 - 1,5 = 0$$

Merk op, dat na een hele periode, $t = 1$, de lading juist weer nul is. Binnen de tweede periodehelft loopt lading natuurlijk gelijkmatig terug van de waarde $1,5\text{C}$ tot 0 . Ook dat is in de grafiek van fig: 1.11 goed te zien.

Opg 1.4.2 * De wet van behoud van lading luidt:

- A $I_{\text{uit}} = Q_{\text{in}}$
- B $I_{\text{uit}} = -Q_{\text{in}}$
- C $I_{\text{uit}} = \frac{dQ_{\text{in}}}{dt}$
- D $I_{\text{uit}} = -\frac{dQ_{\text{in}}}{dt}$

Opg 1.4.3 *** Voor een elektrische stroom geldt *altijd*:

- A $J = I/A$
- B $dI = JdA$
- C $I = Q/t$
- D $dQ = Idt$

Opg 1.4.4 * Als de linker condensatorplaat is opgeladen tot $-3\mu\text{C}$, dan is de lading van de gearde rechterplaat:

- A $-3\mu\text{C}$
- B 0
- C $+3\mu\text{C}$
- D hangt ervan af

Opg 1.4.5 *** Op een metalen bol zit $50 \mu\text{C}$ lading. Deze bol wordt, door een koperdraad met 1 mm^2 doorsnee, verbonden met een gelijke maar ongeladen bol; na 5 ms is er evenwicht bereikt. De *gemiddelde stroom* door de draad was:

- A 5 mA
- B 10 mA
- C 25 mA
- D 50 mA

Opg 1.4.6 ** Een condensator wordt geladen d.m.v. een elektrische wisselstroom, sinusvormig in de tijd met een frequentie van 1 Hz en een amplitude van 1 A . De ongeladen condensator wordt belast vanaf het moment $t = 0$ met de stroom:

$$i(t) = \sin(2\pi t) \text{ A}$$

Gevraagd wordt de *lading* Q van de plaat na een *halve periode* opladen.

$$[\text{Antw. } Q = 1/\pi \text{ C}]$$

Opg 1.4.7 Een condensator heeft op $t = 0$ een lading van $1 \mu\text{C}$. Op dat moment wordt een ideale wisselstroombron aangesloten die een stroom geeft $i(t) = \hat{i} \cos(2\pi ft)$, met amplitude $\hat{i} = 10^{-3} \text{ A}$ en frequentie $f = 50 \text{ Hz}$.

a ** Bereken de lading op de plaat als functie van de tijd.

$$[\text{Antw. } Q = \mu(1 + 3,18 \sin(314t)) \text{ C}]$$

b ** Wat is de maximale lading, en wat de minimale lading?

$$[\text{Antw. } Q = 4,18 \mu\text{C}, Q = -2,18 \mu\text{C}]$$

c **** Hoe groot moet de *amplitude* \hat{i} van de wisselstroombron worden gekozen bij de gegeven frequentie van 50 Hz om er voor te zorgen dat de plaat steeds positief blijft?

$$[\text{Antw. } \hat{i} = 0,314 \text{ mA}]$$

d **** Hoe groot moet de *frequentie* f van de wisselstroombron worden gekozen bij de gegeven amplitude van 10^{-3} A om er voor te zorgen dat de lading op de plaat steeds positief blijft?

$$[\text{Antw. } f = 159 \text{ Hz}]$$

1.5 Wetten van Gauss

1.5.1 Elektrische wet van Gauss

Flux en lading Ook bij elektrische velden hebben we een behoudswet. Het is niet eenvoudig om die te herleiden tot een behoud van ‘veldlading’ (al is dat tegenwoordig mogelijk). In ieder geval: de elektrische veldsituatie is analoog aan die bij de ‘elektrische stroomelektrisch’. Het blijkt experimenteel, dat voor de **elektrische uit-flux** Ψ_{uit} , die een volume uitkomt, de **wet van Gauss** (C.F. Gauss, 1835, dus vóór 1847) geldt:

$$\Psi_{\text{uit}} = Q_{\text{in}}$$

In woorden: de netto elektrische *flux* Ψ_{uit} die een volume *uitgaat*, is gelijk aan de **elektrische volumelading** in het volume Q_{in} . Als gevolg van de wet van Gauss is de *eenheid van elektrische flux* gelijk aan de *eenheid van elektrische lading*, dus Coulomb (C). Op de keper beschouwd is dat echter een kwestie van eenheden keuze.

Algemeenheid wet van Gauss Deze wet is correct voor *ieder* gesloten volume, dus ook voor volumen waarvan het omsluitende oppervlak geen potentiaalvlak is. En het volume mag rustig dwars door allerlei ladingen en geleiders heengaan. Dat maakt deze wet tot een zéér algemene natuurwet. Zij zal dan ook vaak worden gebruikt als uitgangspunt bij het oplossen van vraagstukken. Natuurlijk is het in de meeste gevallen het meest praktisch om wèl gebruik te maken van *potentiaalvlakken* (loodrecht op de veldlijnen) bij het toepassen van de wet van Gauss (of van oppervlakken die juist evenwijdig staan aan het veld.)

Algemeen geldende wetten, zoals de elektrische *wet van Gauss*, zijn een goed uitgangspunt voor **eenheid keuze**. Die keuze wordt nagestreefd door de organisatie ‘ISO’, dè ‘I’nternational ‘O’rganisation for ‘S’tandardisation, en in ons geval de ‘IUPAP’, die ‘P’hysisch gespecialiseerd is. Werkelijke afspraken worden gemaakt op speciale internationale conferenties ‘CGPM’, de ‘C’onf rence ‘G’ n rale de ‘P’oids et ‘M’esures. Langs die weg is de formulering zoals die hierboven staat tot stand gekomen.

Lading en veldlijn We zullen nu conclusies trekken uit de elektrische *wet van Gauss*. Elektrische velden en **veldlijnen** horen onlosmakelijk bij elektrische *ladingen*:

- Uit iedere positieve elektrische lading komt een elektrische veldlijn;
- Naar iedere negatieve elektrische lading gaat een elektrische veldlijn.

Het *aantal* veldlijnen (dus de flux) is een maat voor de elektrische lading waar de veldlijnen vandaan komen (of: naartoe gaan). Omgekeerd bepaalt de lading het aantal veldlijnen. Ook de fluxdichtheid, het aantal veldlijnen per oppervlakte-eenheid, wordt door de lading bepaald. Veel veldlijnen, een *hoge* fluxdichtheid, hoeft overigens niet noodzakelijk te betekenen dat het veld ter plekke ook *sterk* is (daarover later meer).

We kunnen de keten van oorzaak/gevolg verbanden symbolisch als volgt weergeven:

$$Q \Rightarrow \Psi \Rightarrow D$$

De lading Q bepaalt de flux Ψ . Op diens beurt bepaalt de flux Ψ de fluxdichtheid D ; daarbij is kennis nodig over de vorm van het veld, omdat die het oppervlak waar het veld doorgaat bepaalt. Zo blijven bij een homogeen veld de veldlijnen bijeen (constante A). Bij een bolvormig veld lopen de veldlijnen uiteen, maar wel in alle richtingen gelijk (A neemt kwadratisch toe met de afstand). De *symmetrie* van de ruimtelijke verdeling van de lading bepaalt in wezen de *vorm* van het veld.

Opg 1.5.1 * I De elektrische wet van Gauss geldt voor ieder gesloten oppervlak.

II Naar iedere negatieve lading gaat een elektrische veldlijn.

- A beide waar
- B alleen I waar
- C alleen II waar
- D beide onwaar

Opg 1.5.2 * Welke van onderstaande grootheden is *geen* vectorgrootheid:

- A elektrische stroom
- B elektrische stroomdichtheid
- C elektrische fluxdichtheid
- D elektrische veldsterkte

Opg 1.5.3 ** Een bol met een straal van 1 mm is homogeen gevuld met ruimtelading, met een *ruimteladingsdichtheid* van 6 C/m^3 . Bereken de elektrische *flux* door het oppervlak van een kubus, met een ribbe van 10 cm, waarin de bol centraal is gelegen. [Antw. $\Psi = 25 \text{ nC}$]

Opg 1.5.4 *** Welke van de onderstaande relaties is juist:

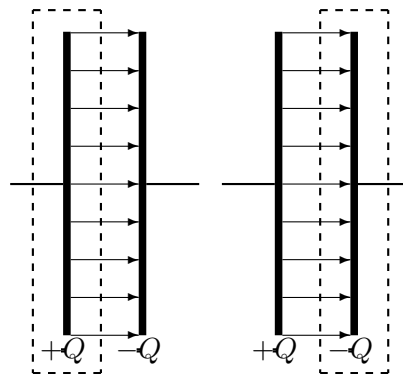
- A $dI = \underline{J \cdot dA}$
- B $\Phi = \int \underline{D \cdot dA}$
- C $\rho = \underline{dQ/dV}$
- D $d\Psi = \underline{E \cdot dA}$

1.5.2 Homogeen elektrisch veld

Vlakkeplaten-condensator Op de linkerplaat zit positieve lading Q , stel. Uit een *gesloten oppervlak* om de linkerplaat komt een *vlakkeplaten-condensator* $\Psi = Q$ met een homogene fluxdichtheid (mits de plaat met oppervlak A voldoende groot is tov de plaatafstand):

$$D = \frac{Q}{A}$$

Uit een gesloten oppervlak om de rechterplaat komt de fluxelektrisch $-\Psi = -Q$, dus moet volgens de *wet van Gauss* de lading op de rechterplaat $-Q$ zijn—iedere positieve lading op de linkerplaat is met een veldlijn verbonden met een negatieve lading op de rechterplaat.



Figuur 1.12 Vlakkeplaten-condensator: merk op, dat de lading op de twee platen precies tegengesteld is, zodat er alleen een elektrische flux binnen de condensator is.

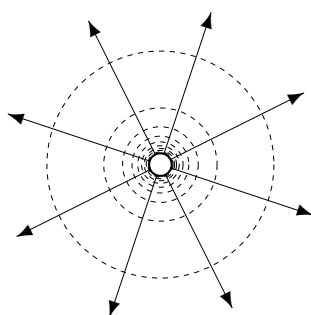
Ideale condensator De vlakkeplaten-condensator is een voorbeeld van een **ideale condensator** waarin een *homogeen* elektrisch veld is. Voor de condensator als geheel geldt, dat er geen netto lading is. Uit de condensator komt dus ook geen elektrische *veldlijn*. Het veld van een condensator is dus *volledig opgesloten* tussen de platen; dit is de kenmerkende eigenschap van ideale condensatoren! Als we precies kijken zullen we zien, dat er toch een beetje veld, dus ook lading, uit de condensator weglekt naar ‘aarde’ (of een andere geleider). We idealiseren meestal tot een ‘ideale’ condensator.

- Opg 1.5.5** ** We voeren een stroom van 7 mA naar een ongeladen *condensator* om deze op te laden. Van de condensator is verder niets bekend.
- Hoe groot is die lading na 1 s opladen? [Antw. $Q = 7 \text{ mC}$]
 - Na hoeveel tijd is de lading op de condensatorplaat $1 \mu\text{C}$ groot? [Antw. $t = \frac{1}{7} \text{ ms}$]
 - Hoe sterk is de elektrische flux door de condensator na 1 min opladen? [Antw. $\Psi = 0,42 \text{ C}$]
 - Hoe lang kan het opladen doorgaan?
 - Welke invloed heeft de capaciteit van de condensator?

1.5.3 Elektrisch veld bollading

Veldflux De elektrische lading Q van een **bollading** zit op een boloppervlak. Uit de lading Q komt een flux. Neem een gesloten oppervlak dat de *gehele* bol omvat. Volgens Gauss geldt:

$$\Psi_{\text{uit}} = Q_{\text{in}},$$



Figuur 1.13 Bollading: de veldlijnen komen radiaal vanaf het oppervlak van de bol de ruimte in. In principe lopen ze weg om zeer ver weg op aarde te komen.

waarbij in dit geval $Q_{\text{in}} = Q$ geldt, een constante waarde ongeacht het gekozen oppervlak. Op grond van de bolsymmetrie van de lading is het veld natuurlijk ook bolsymmetrisch, radiaal ('radiare' is 'stralen') alle kanten uitgaand. De *veldlijnen* zijn stralen, en de *potentiaalvlakken* zijn boloppervlakken. We herhalen dat voor *ieder* gesloten oppervlak, dus ook de potentiaalvlakken, de flux constant Q is. Door het *potentiaalvlak* met de straal r gaat de flux $\Psi(r)$:

$$\Psi(r) = Q$$

Fluxdichtheid bollading *Algemeen* geldt voor de **deelflux** $d\Psi$ die door een deeloppervlak dA gaat:

$$d\Psi = D \cdot dA$$

Als het deeloppervlak op een *potentiaalvlak* ligt, is het veld *loodrecht* op het oppervlak, en kunnen we de vereenvoudigen tot:

$$d\Psi = D dA \quad \text{of} \quad D = \frac{d\Psi}{dA}$$

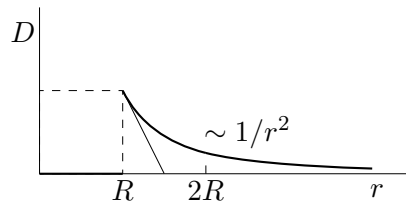
Vanwege de bolsymmetrie is ieder deel van het potentiaalvlak gelijkwaardig, dus heeft ieder deel van het potentiaalvlak dezelfde *grootte* van de *fluxdichtheid* D . De formule geldt dus ook voor het *gehele* potentiaalvlak als deeloppervlak:

$$D = \frac{\Psi}{A}$$

Afstandsafhankelijkheid fluxdichtheid Op een afstand r van het middelpunt is het *potentiaalvlak* een boloppervlak met straal r . Het oppervlak van het potentiaalvlak is $A(r) = 4\pi r^2$. De elektrische *fluxdichtheid* $D(r)$ op dat potentiaalvlak wordt bepaald door de totale *flux* erdoor $\Psi(r)$:

$$D(r) = \frac{\Psi(r)}{A(r)} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Het potentiaaloppervlak neemt kwadratisch toe met de afstand, zodat de fluxdichtheid *omgekeerd kwadratisch* met de afstand afneemt.



Figuur 1.14 Fluxdichtheid D bollading. D is uitgezet tegen de afstand r tot het middelpunt van de bollading met straal R . Merk op, dat de fluxdichtheid op de bol begint en snel afvalt met het kwadraat van de afstand.

Conclusie De elektrische flux Ψ uit een lading Q is gelijk daaraan:

$$\Psi = Q$$

De mate waarin de flux in de ruimte spreidt, de fluxdichtheid D , wordt bepaald door het oppervlak A van het potentiaalvlak waardoor de flux gaat; voor symmetrische velden:

$$D = \Psi/A$$

In het bijzonder is voor bolcentrische ladingen $A \sim r^2$, is voor cilindrische ladingen $A \sim r$, en is voor vlakke ladingen A constant.

Opg 1.5.6 * Dat de elektrische fluxdichtheid in het veld van één puntlading omgekeerd kwadratisch met de afstand afneemt, verklaren we uit het feit dat:

- A het veld in vacuüm is
- B de lading in een punt is geconcentreerd
- C de veldlijnen tot in het oneindige doorlopen
- D de potentiaalvlakken bolvlakken zijn

Opg 1.5.7 *** Waarom neemt de fluxdichtheid als functie van de afstand:

- a bij een lading op een bol omgekeerd kwadratisch af met de afstand.
- b bij een lading op een cilinder omgekeerd evenredig af met de afstand.

Voorbeeld Geladen kogel Een stalen kogel, straal 1 cm, heeft een elektrische lading van 10 nC. Bereken de fluxdichtheid op 4 cm van de rand van de kogel.

Een kogel is een geleider, zodat alle lading bolsymmetrisch verdeeld op het bolvormige oppervlak zit. Daar is $R = 1$ cm, het oppervlak $A_R = 4\pi 0,01^2$ en de lading $Q = 10^{-8}$ C. De fluxdichtheid op de bol is

$$D_{1\text{cm}} = Q/R_A = 10^{-8}/4\pi 0,01^2 = 7,96 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

Op een afstand van 4 cm van de rand is de afstand tot het midden $r = 5$ cm, zodat $D_{5\text{cm}} = D_{1\text{cm}}/5^2 = 0,318 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$. Hierbij gebruiken we dus de kwadratische afhankelijkheid van de fluxdichtheid met de afstand.

Opg 1.5.8 We onderzoeken het elektrische veld rond en in een bolbliksem. Veronderstel dat we op 1 m van het oppervlak een elektrische fluxdichtheid meten van $0,3 \mu\text{C/m}^2$. We schatten de boldiameter op 40 cm en vermoeden dat de bol homogeen is gevuld met een ionenplasma.

a ** Wat is de totale flux op 1 m van de bol? [Antw. $\Psi = 5,43 \mu\text{C}$]

b ** Wat is de bollading? [Antw. $Q = 5,43 \mu\text{C}$]

c ** Wat is de fluxdichtheid op het boloppervlak? [Antw. $D_R = 10,8 \mu\text{C/m}^2$]

d **** Wat is D in de bol (op afstand r van het midden)? [Antw. $D = 54r \mu\text{C/m}^2$]

Opg 1.5.9 Een bol, met straal R , is homogeen gevuld met ruimtelading; de totale lading van de bol is Q .

a * Teken veldlijnen en potentiaalvlakken, zowel binnen als buiten de bol

b ** Laat zien, dat op de rand van de bol geldt:

$$r = R \quad D_R = Q/4\pi R^2$$

alsof de totale lading in het middelpunt is.

c ** Laat zien, dat buiten de bol geldt:

$$r \geq R \quad D = (R/r)^2 D_R$$

alsof de totale lading in het middelpunt is.

d **** Laat zien, dat binnen de bol geldt:

$$r \leq R \quad D = (r/R) D_R$$

zodat de veldichtheid evenredig met r toeneemt.

Opg 1.5.10 ** Een zeer lange rechte coax-kabel bevat op de kerndraad, diameter 0,5 mm, een lading van 1 nC/m. De mantel heeft een diameter van 6 mm en is geaard. De elektrische fluxdichtheid op een afstand van 2 mm van de as (dus tussen de kerndraad en de mantel in) is:

A 0

B 20 nC/m^2

C 80 nC/m^2

D $20 \mu\text{C/m}^2$

E $80 \mu\text{C/m}^2$

1.5.4 Magnetische wet van Gauss

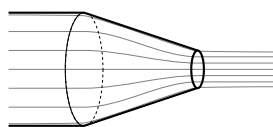
Magnetische ladingen Bij magnetische velden is de behoudswet nog eenvoudiger. Dit komt omdat er, tot nu toe, geen netto **magnetische lading** is gevonden. Ieder weet dat een magneet altijd twee tegengestelde **polen** heeft: de netto magnetische lading is nul. Dien overeenkomstig geldt voor de **magnetische uitflux** Φ_{uit} die uit een volume komt de **wet van Gauss**:

$$\Phi_{\text{uit}} = 0$$

In woorden: *de netto magnetische flux uit ieder volume is nul.*

Magnetische veldlijnen De wet van Gauss kan anders worden geformuleerd: Iedere magnetische flux die een volume uit gaat, zal er ook weer binnen komen. Dat betekent, dat iedere magnetische *veldlijn* in zichzelf gesloten is, in een kring loopt. Dat is een belangrijk kenmerk van magnetische velden, waardoor het verloop van het veld wordt bepaald. Toch zullen we in de praktijk zeggen, dat een magnetische veldlijn loopt *van een noordpool ('positief')* naar een **zuidpool ('negatief')**. We bedoelen dan: *buitenom*. *Binnendoor* de magneet lopen de veldlijnen gewoon van zuidpool naar noordpool. Vergelijk dat met de elektrische veldlijnen in een kring: *buiten* de spanningsbron lopen ze van + naar –, *binnen* de spanningsbron lopen de veldlijnen dus van – naar +.

Voorbeeld Poolschoen



Figuur 1.15 Poolschoen

De magnetische *fluxdichtheid* \underline{B} binnen een poolschoen—een kegelvormige magnetische geleider, die wordt gebruikt om het veld te concentreren—is eenvoudig te berekenen. De *veldlijnen* zullen ongeveer de versmalling volgen, omdat ze bijna niet vacuüm ingaan. Vergelijk dat met elektrische stroomelektisch, die ook in de geleider blijft.

Omdat we mogen aannemen dat het veld min of meer homogeen door de poolschoen loopt, geldt:

$$\Phi = BA \quad \text{en omgekeerd} \quad B = \frac{\Phi}{A}$$

In woorden: *de fluxdichtheid is omgekeerd evenredig met het oppervlak waardoor het stroomt.*

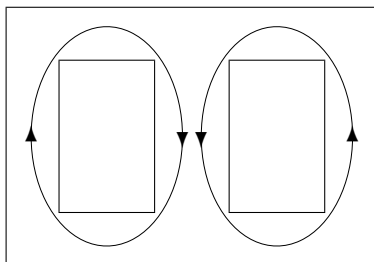
Als de basis een diameter van 10 cm heeft, en de pool een diameter van 1 cm, dan verhouden de oppervlakken van de potentiaalvlakken zich als

$A_1 : A_2 = 10^2 : 1^2 = 100 : 1$. De *flux*, die binnenkomt is gelijk aan de flux die uitgaat:

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

Dus $B_2 : B_1 = A_1 : A_2 = 100 : 1$. De fluxdichtheid aan de pool is het honderdvoudige van die aan de basis!

Opg 1.5.11 **



We onderzoeken het magnetische veld in een transformatorjuk van speciaal type. Het buitenframe heeft overal een doorsnede van $2\text{cm} \times 2\text{cm}$. De middenstijl meet echter $3\text{cm} \times 2\text{cm}$. De elektrische stroomelektrisch rond de middenstijl veroorzaakt daarin een magnetische *flux* Φ van $1\ \mu\text{Wb}$.

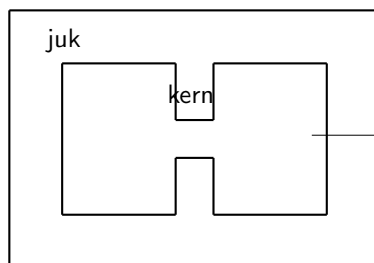
a Bereken de fluxen in de verschillende poten.

[Antw. $\Phi_l = \Phi_r = \frac{1}{2}\ \mu\text{Wb}$]

b Bereken de *fluxdichtheid* B in beide.

[Antw. $B_l = B_r = 1,25\ \text{mT}$; $B_m = 1,67\ \text{mT}$]

Opg 1.5.12 **



Een elektromagneet is gemaakt van een goed soort weekijzer, en bestaat uit twee kringen. Een rechthoekig juk met doorsnede $8\ \text{cm}^2$ en afmetingen $15\ \text{cm}$ bij $30\ \text{cm}$, draagt op het midden van de langste zijden kernen, met een doorsnede van $12\ \text{cm}^2$, waar tussen een luchtspleet is van $1,5\ \text{mm}$. Tengevolge van de ampèrewindingen rond de kernen is in de luchtspleet een magnetisch veld van $1,4\ \text{T}$.

Bereken de magnetische *fluxdichtheid* magnetisch in het juk.

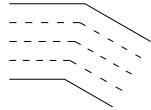
[Antw. $B = 1,05\ \text{T}$]

Opg 1.5.13 *** Een magnetische flux gaat door een cirkelvormige cilindrische kern, eindigend in een kegelvormige poolschoen. De diameter van de kern, gelijk aan de basis van de kegel, is $1\ \text{cm}$. De diameter van de top van de kegel is $2\ \text{mm}$. Als uit de poolschoen een veld van $0,2\ \text{T}$ komt, dan is de flux door de kern:

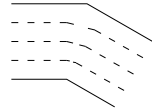
- A $0,628\ \mu\text{Wb}$
- B $15,7\ \mu\text{Wb}$
- C $0,2\ \text{T}$
- D $8,0\ \text{mT}$

Opg 1.5.14 ** Een magnetische fluxmagnetisch gaat door een ijzeren staaf die een bocht maakt van 30° . De juiste richting van potentiaalvlakken is gegeven in de subfiguur:

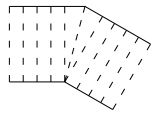
A



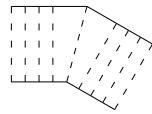
B



C



D



1.6 Stroom door geleider

1.6.1 Wet van Ohm

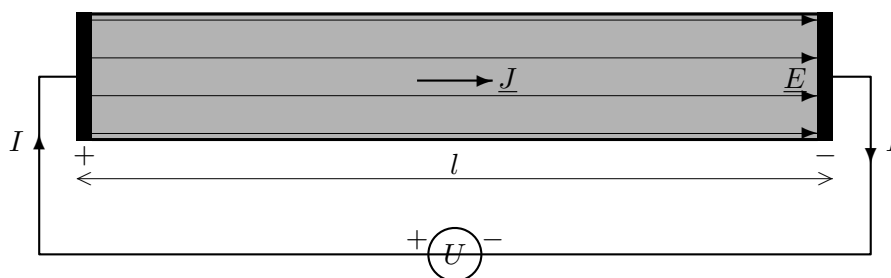
Ideale stroomgeleider In bepaalde gevallen leidt de aanwezigheid van een elektrisch veld bij elektrische ladingen tot elektrische stroom. Daarbij verplaatsen elektrische ladingen onder invloed van het elektrische veld. In deze paragraaf zullen we ingaan op de eenvoudigst denkbare situatie. We beperken ons eerst tot de ‘**ideale geleider**’. ‘*Geleider*’ omdat in de geleider beweeglijke elektrische ladingen aanwezig zijn, die door het elektrisch veld ‘geleid worden’ (gaan bewegen) door de geleider. ‘*Ideale*’ omvat een aantal kenmerken van geleider en stroom:

constant Een constant ‘intern’ elektrisch veld geeft een constante elektrische stroom; zo is bijvoorbeeld de temperatuur constant;

homogeen De stroom is homogeen in de geleider; dus is bijvoorbeeld het doorsnedeoppervlak constant;

evenredig De stroomsterkte is evenredig met het elektrische veld; dus is er bijvoorbeeld geen invloed van contactspanningen;

De eenvoudigst denkbare ideale geleider heeft de vorm van een lange draad met constante cirkelvormige doorsnede (zie verder fig. 1.16 en 1.17).



Figuur 1.16 Elektrische stroom door geleidende draad. De spanning over de geleider doet in de geleider een elektrisch veld ontstaan, afhankelijk van lengte en doorsnede, dat de stroom aandrijft.

Spanning en spanningsval We nemen een stuk geleidende draad met **lengte** l en doorsnedeoppervlak A . Verbindt de uiteinden met de uitgang van een ‘ideale’ (geen inwendige weerstand) spanningsbron met spanning U , zodat over de draad een elektrische spanning U komt te staan. De *eenheid van elektrische spanning* is *Volt*, met symbool V , met de waarde $V = J/C$. Aan het laatste zien we, dat de spanning een energie per lading is, en wel de elektrische energie van een lading per hoeveelheid lading. Het transport van lading door de draad zal gepaard

gaan met het verlies van ‘elektrische energie’ van de lading. Maar dat is juist het verlies aan spanning over de draad, de **spanningsval** U_R over de draad:

$$U_R = -(U_{\text{uit}} - U_{\text{in}}) = U_{\text{in}} - U_{\text{uit}}$$

Merk op, dat het woord ‘val’ in de formule te zien is als ‘-’. Staat de bronspanning U over de geleider, dan is de spanningsval over de geleider gelijk aan de bronspanning U .

Spanning en veldsterkte De spanning veroorzaakt *in de draad* een elektrische veld, waarvan de *veldsterkte* E wordt genoteerd. Bij een homogene stroming heeft de veldsterkte overal dezelfde waarde. De **eenheid van elektrische veldsterkte** is $\text{V/m} = \text{N/C}$. Daaruit zien we, dat het een kracht per lading is, en wel de elektrische kracht op een lading per hoeveelheid lading.

De bij het transport verrichtte elektrische arbeid per lading W is gelijk aan de elektrische kracht per lading $E \times$ de weg l :

$$W = El$$

Hierboven zagen dat die arbeid per lading W gelijk is aan de spanningsval $U_R = U$. We concluderen dat bij *homogene stroming* de *veldsterkte* in de ideale geleider is:

$$E = U_R/l$$

Stroom en stroomdichtheid De elektrische *veldsterkte* doet door de kring, bestaande uit de verbindingsdraden, de spanningsbron en de geleidende draad, een stroom I vloeien. We nemen steeds aan dat de stroom *homogeen verdeeld* is in de *ideale geleider*, en dat de afmetingen van de doorsnede (breedte, dikte of diameter) voldoende klein zijn t.o.v. de lengte van de geleider. Bij eenzelfde bronspanning zal een grotere doorsnede vanzelfsprekend leiden tot een grotere stroom. Daarom bekijken we in plaats van de stroomsterkte I de elektrische *stroomdichtheid* J in de draad, de *stroomsterkte* per vierkante meter. Als A de grootte van het oppervlak van de doorsnede van de draad is, dan geldt voor de elektrische stroomdichtheid J :

$$J = \frac{I}{A} \quad \text{of} \quad I = JA$$

Wet van Ohm Het veld in de draad veroorzaakt een stroom door de draad. *Experimenteel* blijkt dat, voor de meeste materialen rond kamertemperatuur en bij niet te hoge spanningen, *de stroomdichtheid*

evenredig is met de veldsterkte. Deze wet is ontdekt door de duitser G.S. Ohm (reeds in 1826); wij formuleren de **wet van Ohm** als volgt:

$$\boxed{J = \gamma E \quad \text{of} \quad E = \rho J}$$

De evenredigheidsconstanten (materiaal, temperatuur, enz. afhankelijk) heten **soortelijke geleiding** γ (griekse kleine letter ‘g’amma van ‘g’eleiding) en **soortelijke weerstand** ρ (griekse kleine letter ‘r’ho voor het latijnse ‘r’esistere, is ‘weerstand’ bieden).¹ De constanten γ en ρ zijn elkaars omgekeerde (zie ook tabel 1.1):

$$\boxed{\gamma = 1/\rho}$$

De *eenheid van soortelijke geleiding* is S/m (‘S’iemens per meter); er geldt $S/m = (A/m^2)/(V/m) = A/V/m$, dus $S = A/V$. De *eenheid van soortelijke weerstand* is Ωm (‘O’hm meter; Ω is de griekse hoofdletter ‘O’); er geldt $\Omega = V/A$. Kennelijk zijn de eenheden Siemens en Ohm elkaars omgekeerde: $S = 1/\Omega$.

Geleiding en weerstand De evenredigheid tussen stroomdichtheid en veldsterkte: $J = \gamma E$ leidt tot een evenredigheid tussen stroom en *spanning*(sval). Immers, de stroomdichtheid is evenredig met de stroom: $J = I/A$, en de veldsterkte is evenredig met de spanningsval: $E = U_R/l$, zodat tezamen $I/A = \gamma U_R/l$, of, $I = (\gamma A/l)U_R$. Dit is de gebruikelijke formulering van de *wet van Ohm*:

$$\boxed{I = G U_R \quad \text{of} \quad U_R = R I}$$

De evenredigheidsconstanten **geleiding** G en de **weerstand** R zijn gedefiniëerd als:

$$\boxed{G = \gamma \frac{A}{l} \quad R = \rho \frac{l}{A}}$$

In woorden: *de geleiding (van elektrische stroom) neemt toe met het oppervlak en neemt af met de lengte.* Omgekeerd neemt de weerstand (tegen elektrische stroom) toe met de lengte en af met het oppervlak van de doorsnede. Geleiding en weerstand zijn elkaars omgekeerde:

$$\boxed{R = \frac{1}{G} \quad G = \frac{1}{R}}$$

De materiaal afhankelijke evenredigheidsconstante G heeft de **eenheid van geleiding Siemens**, symbool S . Evenzo heeft R de **eenheid van weerstand Ohm**, symbool Ω —eigenlijk de griekse hoofdletter ‘O’(mega)). Natuurlijk geldt $S = 1/\Omega$.

¹We merken hier nog op, dat in de elektrotechnische literatuur vaak het symbool σ wordt gebruikt voor de soortelijke geleiding. Wij geven echter de voorkeur aan γ vanwege de duidelijke analogie tussen γ en G ; vergelijk ρ en R .

<i>materiaal</i>	<i>symp.</i>	<i>geleider type</i>	$\gamma/(S/m)$	$\rho/(\Omega m)$
<i>n-geleider</i>				
zilver	Ag		$6,2 \cdot 10^7$	$1,6 \cdot 10^{-8}$
koper	Cu		$5,9 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^{-8}$
aluminium	Al		$3,7 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^{-8}$
<i>np-geleider</i>				
konstantaan	Cu-Ni		$2,0 \cdot 10^7$	$5,0 \cdot 10^{-8}$
<i>p-geleider</i>				
kobalt	Co		$1,6 \cdot 10^7$	$6,3 \cdot 10^{-8}$
nikkel	Ni		$1,4 \cdot 10^7$	$7,1 \cdot 10^{-8}$
cadmium	Cd		$1,3 \cdot 10^7$	$7,7 \cdot 10^{-8}$
ijzer	Fe		$1,1 \cdot 10^7$	$9,1 \cdot 10^{-8}$
<i>halfgeleider</i>				
germanium	Ge		$2 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^{-1}$
silicium	Si		$0,5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^3$
<i>isolator</i>				
pvc			$\sim 10^{-8}$	$\sim 10^8$
lucht			$\sim 10^{-13}$	$\sim 10^{13}$
teflon			$\sim 10^{-14}$	$\sim 10^{14}$
polystyreen			$\sim 10^{-15}$	$\sim 10^{15}$

Tabel 1.1 Soortelijke geleiding γ en soortelijke weerstand ρ ($=1/\gamma$) bij kamertemperatuur voor verschillende elementen. Voor een bespreking van de verschillende typen *geleiders* zie in deel 1 de paragraaf 2.2. Merk op, dat voor n-geleiders $\gamma \sim 10^8$, voor p-geleiders $\sim 10^7$, voor halfgeleiders $\sim 10^{-2}$ en voor isolatoren $\sim 10^{-10}$.

Serieweerstand en parallelgeleiding We kunnen eenvoudig in een schakeling geleiders die achter elkaar staan, *in serie* genoemd, vervangen door een enkele geleider met *serieweerstand* R_s zonder dat de stroom verandert. Staan bijvoorbeeld twee weerstanden in serie, dan is in ieder geval de stroom $I_1 = I_2$ door beide gelijk. De stroomwaarde I_s na de vervanging is onveranderd als de spanningsval over de vervangingsweerstand gelijk is aan de som van beide spanningsvallen:

$$U_s = U_1 + U_2$$

Invullen van de wet van Ohm in de vorm $U = RI$ leidt voor de **serieweerstand** R_s tot:

$$R_s = R_1 + R_2 \quad \text{serie}$$

In woorden: *weerstand in serie tellen op*.

Wanneer een aantal geleiders naast elkaar staan, *parallel* staan, dan kan de stroom door meerdere geleidingen gaan. Voor de vervangingsgeleiding G_p geldt dat die evenveel stroom trekt als de oorspronkelijke

geleidingen samen. Dus:

$$I_p = I_1 + I_2$$

De spanning over alle geleidingen is onveranderd: $G_p = G_1 = G_2$. Invullen van de wet van Ohm in de gedaante $I = GU$ leidt voor de **parallelgeleiding** G_p tot:

$$G_p = G_1 + G_2 \quad \text{parallel}$$

In woorden: *parallele geleidingen tellen op.*

Conclusie De weerstand R of geleiding G van een ideale geleider (constante lengte l , constante doorsnede A , soortelijke weerstand (geleiding) ρ (γ) is:

$$R = \rho l/A \quad G = \gamma A/l$$

Bij serie schakeling tellen de weerstanden op, bij parallele schakeling tellen de geleidingen op.

Opg 1.6.1 * De eenheid van soortelijke geleiding is:

A S B Sm C S/m D Ω E Ωm F Ω/m

Opg 1.6.2 * De eenheid van geleiding is:

A S B Sm C S/m D Ω E Ωm F Ω/m

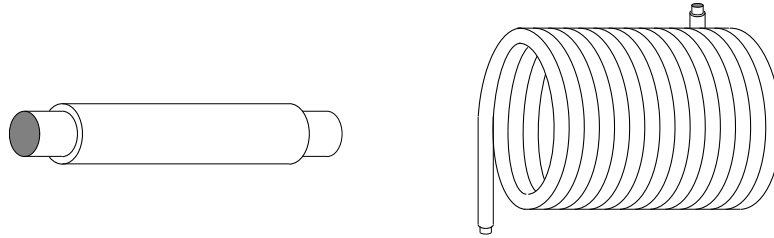
Opg 1.6.3 * De eenheid van soortelijke weerstand is:

A S B Sm C S/m D Ω E Ωm F Ω/m

Niet-ideale geleiders Als we ‘zomaar’ een geleider hebben, dan is het niet eenvoudig om de waarde van de weerstand te bepalen, uitgedrukt in de bekende afmetingen en soortelijke weerstand. We kennen immers maar één formule, die voor de ideale geleider met een constante lengte van de stroomlijn en een constant oppervlak van de potentiaalvlakken. Weerstands bepaling zal alleen mogelijk zijn als we weten hoe de vorm van de geleider de *symmetrie* van de stroomlijnen en potentiaalvlakken bepaalt. Wij zullen de geleiders dan proberen ‘op te delen’ in *geleiderdeelen*, die als ideale geleider zijn op te vatten. Er zijn twee belangrijke typen *geleiders*, wat die indeling betreft:

- de geleiderdelen staan ‘in serie’;
- de geleiderdelen staan ‘parallel’;

Voorbeeld van het serie-type is een conische geleider; voorbeeld van het parallel-type is een gebogen geleider.



a Rechte geïsoleerde draad.

b Opperolde geïsoleerde draad.

Figuur 1.17 Twee vormen van weerstanden.

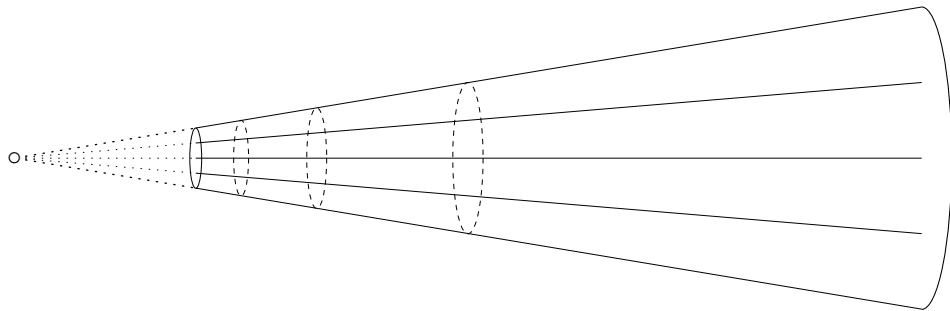
Voorbeeld Conische weerstand Bepaal de *weerstand* van een conisch (kegelvormig) verlopende draad; het oppervlak van de cirkelvormige doorsnede neemt over de lengte l toe van A_1 tot A_2 .

Eerst *schatten* we de weerstand, door een geschikte *constante* doorsnede te gebruiken, zoals het *rekenkundig* gemiddelde van de oppervlakken aan de uiteinden:

$$R \approx \rho \frac{l}{\bar{A}} \quad \text{met} \quad \bar{A} = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$$

Om de verdeling in geleiderdelen te kunnen maken bepalen we eerst de *stroomlijnen* en *potentiaalvlakken*. Als de stroom gelijkmatig over de draaddoorsnede stroomt, dan zal de stroming als het ware denkbeeldig uit één punt komen: de (denkbeeldige) top van de kegel, die de draad omvat. De stroomlijnen zijn dus radiaal, en de potentiaalvlakken zijn delen van boloppervlakken. Op een afstand r_1 van de top is het oppervlak van het potentiaalvlak A_1 ; op de afstand r is het oppervlak A kwadratisch gegroeid:

$$A = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 A_1$$



Figuur 1.18 Conische weerstand in doorsnee: met stroomlijnen, uit een denkbeeldig punt, en potentiaalvlakken, bijna vlakke delen van boloppervlakken

De *stroomdichtheid* $J = I/A$ is dus kwadratisch kleiner geworden, zo ook de bijbehorende veldsterkte, volgens de *wet van Ohm* als $E = \rho J$, op de afstand r :

$$E = \rho \frac{I}{A}$$

Het geleiderdeel is het deel tussen de potentiaalvlakken op afstand r en $r + dr$. Over een deel van de stroomlijn, met lengte dl , neemt de spanning af met $dU = -E dl$. Nu is $dl = dr$, omdat de afstand dl gelijk is aan de *toename* dr van de afstand tot het punt r . De verhouding tussen de afname van de spanning en de stroomsterkte bepaalt het deel van de weerstand dR van het geleiderdeel:

$$dR = \rho \frac{dl}{A}$$

In *dit* geval staan alle spanningsdelen achtereen (serie), dus daarmee tellen de weerstanddelen op: $\int dU = \int I dR = I \int dR$:

$$R = \int dR = \rho \int \frac{dl}{A}$$

Zetten dit om in een integraal over de variabele r , door dl te vervangen door dr , en de afstandsafhankelijkheid van A te substitueren. Het resultaat voor de **weerstand**:

$$\begin{aligned} R &= \rho \int_{r_1}^{r_2} \frac{r_1^2}{r^2} \frac{dr}{A_1} = \rho \frac{r_1^2}{A_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ &= \rho \frac{r_1^2}{A_1} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \rho \frac{r_1^2}{A_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= \rho \frac{r_1^2}{A_1} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \rho \frac{r_1}{r_2} \frac{l}{A_1} \\ &= \rho \frac{l}{\frac{r_2}{r_1} A_1} \end{aligned}$$

Aan het eind van de berekening blijkt, dat niet het oppervlak in het midden moet worden genomen, maar het oppervlak $A = (r_2/r_1)A_1$. We merken op, dat voor de verhouding van de oppervlakken geldt: $A_1 : A_2 = r_1^2 : r_2^2$, dus omgekeerd:

$$\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{A_2/A_1} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} A_1 = \sqrt{A_1 A_2}$$

Achteraf was de schatting met een 'gemiddeld' oppervlak nog niet zo slecht, alleen hadden we het *meetkundig* gemiddelde $\bar{A} = \sqrt{A_1 A_2}$ moeten nemen, in plaats van het *rekenkundig* gemiddelde (of middenoppervlak).

Opg 1.6.4 ** Bereken de weerstand van:

- a 10 km Cu draad met een diameter van 1 mm. [Antw. $R = 216 \Omega$]
 b Ge kristal met een dikte van 1 mm, een breedte van 1 mm en een lengte van 4 mm. [Antw. $R = 2 \text{ k}\Omega$]

Opg 1.6.5 ** Bereken de weerstand van

a $10\ \Omega$ en $15\ \Omega$ in serie

[Antw. $R = 25\ \Omega$]

b $10\ \Omega$ en $15\ \Omega$ parallel

[Antw. $R = 6\ \Omega$]

c de parallelschakeling van a en b

[Antw. $R = 4,84\ \Omega$]

Opg 1.6.6 **** Een geleider is een plaat in de vorm van een trapezium; de stroom komt naar binnen aan de basis en stroomt uit de top. De plaat heeft een dikte d en een 'lengte' (hoogte) l . Aan de voet is ze b_1 breed, en aan de top b_2 . Neem aan dat de stroming gelijkmatig over de breedte verdeeld is (b klein tov l) en dat de soortelijke weerstand is ρ .

a Bepaal de weerstand van het trapezium [Antw. $R = \rho \frac{l}{d} \frac{\ln b_1 - \ln b_2}{b_1 - b_2}$]

b Controleer de uitkomst, door die toe te passen op een rechthoekige plaat waarvoor $b_1 = b_2$; neem daartoe de limiet $b_1 \rightarrow b_2$.

[Antw. $R = \rho \frac{l}{db_1}$]

Opg 1.6.7 ****

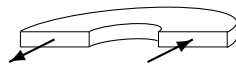


Een weerstand bestaat uit een *halve* cirkelvormige schijf met een gat er in; binnenstraal r_1 , buitenstraal r_2 , dikte d en soortelijke weerstand ρ . De stroom wordt ingevoerd langs de binnenzijde, uitgevoerd aan de buitenzijde, en loopt radiaal van de binnenkant naar de buitenkant.

Bepaal de formule voor de *weerstand* (vergelijk met opg 1.6.8).

[Antw. $R = \frac{\rho}{\pi d} / \ln(r_2/r_1)$]

Opg 1.6.8 ***



Een geleider bestaat uit een *halve* cirkelvormige schijf met een gat erin; binnenstraal r_1 , buitenstraal r_2 , dikte d en soortelijke weerstand ρ . De stroom wordt in- en uitgevoerd aan de *rechte* zijden, zodat de *stroomlijnen* halve cirkels worden (in goede benadering).

De formule voor de *weerstand* (vergelijk met opg 1.6.7) zal zijn:

A $\frac{\pi \rho}{d}$

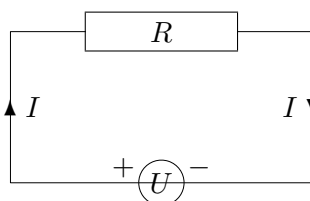
B $\frac{\rho d}{\pi}$

C $\frac{\rho}{\pi d} \ln(r_2/r_1)$

D $\frac{\pi \rho}{d} / \ln(r_2/r_1)$

1.6.2 Wet van Joule

Elektrisch vermogen Voortdurend stroom laten lopen door een geleidende draad kost energie. In het allereenvoudigste geval hebben we een kring met één spanningsbron en één weerstand. De bronspanning U



Figuur 1.19 Weerstandcircuit

zorgt voor een veld, dus spanningsval $U_R = U$, over de weerstand R . Vanwege energiebehoud zal de *arbeid* W , die het interne elektrische veld E *per lading* verricht bij het transport, gelijk zijn aan de *spanning*(sval) U_R over de geleider. Een deellading dQ zal door de kring worden getransporteerd; het veld verzorgt dat in de weerstand.

Dezelfde deellading dQ zal, om rond te kunnen circuleren, óók door de spanningsbron heen moeten worden getrokken. De *spanningsbron* levert daarbij een (elektro-chemische) *arbeid* $dW = dQ U$. Per seconde gaat er een lading dQ/dt door de kring, dus door de bron. Per definitie is die gelijk aan de stroomsterkte I in de kring:

$$I = dQ/dt$$

De per seconde door de spanningsbron geleverde *arbeid*, het **elektrisch vermogen** P : $P = dW/dt = dQ \cdot U/dt = (dQ/dt) \cdot U$, dus:

$$P = \frac{dW}{dt} = IU$$

In woorden: *het elektrische vermogen is het produkt van stroomsterkte en spanning*. Nergens is gebruik gemaakt van speciale eigenschappen van geleider of spanningsbron, behalve ‘geen inwendige weerstand’. Daarom geldt diezelfde wet ook als de stroom door een gewone *geleider* of vacuüm gaat. De **eenheid van elektrisch vermogen** is **Watt**, symbool W .

Veldvermogensdichtheid Waar vandaan komt het elektrische vermogen in de geleider, waar ladingen verplaatst zijn? Welnu, dat komt uit het veld. Het vermogen dat het veld in de geleider ontwikkeld kan niet alleen worden uitgedrukt in grootheden *buiten* de geleider, als de spanningsval over de geleider en de stroom door de geleider. Het vermogen kan ook worden uitgedrukt in grootheden *in* de geleider, zoals de veldsterkte E in de draad—die immers de elektrische *arbeid* *in* de geleider *werkelijk* verricht. Door de formule’s $I = JA$, $U = El$ en $J = \gamma E$ te substitueren in $P = IU$ vinden we:

$$P = \gamma E^2 Al \quad \text{of} \quad P = \rho J^2 Al$$

Het produkt Al is het *volume* V van de draad. Daardoor is het elektrische veldvermogen evenredig met het volume van de draad (zoals verwacht mocht worden van een ‘materiaal’eigenschap). Het is zinvol de **veldvermogensdichtheid** w te gebruiken, $w = P_{\text{veld}}/V$ het veldvermogen per kubieke meter. Voor de veldvermogensdichtheid geldt:

$$w = \gamma E^2 = \rho J^2$$

Merk de analogie op van deze formules met formules voor bewegingsenergie $\frac{1}{2}mv^2$ en draaienergie $\frac{1}{2}J\omega^2$. Maar let ook op het verschil: de factor $\frac{1}{2}$, aanwezig bij *energie*, ontbreekt bij *vermogensdichtheid*.

Dissipatievermogen Ondanks het elektrische vermogen dat het veld levert, zien we niet dat de ladingen in de *geleider* sneller gaan stromen: het elektrische vermogen is nodig om de *weerstand tegen ladingstransport* te overwinnen. Kennelijk wordt door de hele geleider heen energie ontwikkeld door het veld. Deze energie wordt in de geleider, door het weerstandsmechanisme, omgezet in *warmte*, die weer leidt tot temperatuurverhoging en warmtestraling van de geleider. Die ‘warmte’ noemt men **dissipatiewarmte** of dissipatie-energie. Bij temperatuurevenwicht zal het *dissipatievermogen (dissipatie-energie per seconde) gelijk zijn aan het geleverde elektrische vermogen IU* . Dit is de **wet van Joule** (1843) over het **dissipatievermogen**:

$$\frac{dW_{\text{warmte}}}{dt} = IU$$

Bij zeer hoge temperatuur is er niet alleen warmtestraling, infrarode straling, maar ook zichtbare straling: de gloeilamp is daarop gebaseerd.

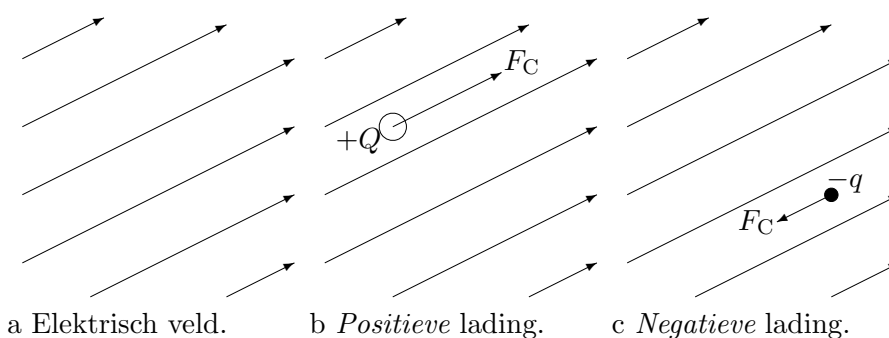
- Opg 1.6.9 **** Stel dat een stroom van 0,1 A gaat door een koperdraad van $0,5 \Omega$ weerstand. Hoeveel zal de temperatuur per minuut stijgen, wanneer de geleidende draadlengte 10 cm is, en de soortelijke warmte van de draad gelijk aan 450 J/kgK? [Antw. $dT/dt = 220$ K/min]
- Opg 1.6.10 ****** Een liter water wordt elektrisch opgewarmd van 20°C tot 60°C . Bepaal, uitgaande van de normale 220 V wisselspanning, en een geleidende draad van 100Ω , hoe lang dat duurt. De soortelijke warmte van water is 4,18 kJ/kgK. [Antw. $t=5,75$ min]

1.7 Veldsterkte

1.7.1 Elektrische veld

Inleiding Bij elektrische stroom in een geleider worden elektrische ladingen verplaatst. Ook in vacuüm zullen elektrische ladingen worden verplaatst als ze in een elektrisch veld staan. De kracht die een *elektrische* lading voelt in een *elektrisch* veld is de *Coulombkracht*. De kracht van een elektrisch veld op een elektrische (eenheids)lading wordt gekenmerkt door de *elektrische* veldsterkte. De arbeid die een elektrisch veld kan verrichten wordt gekenmerkt door de *elektrische potentiaal*. In deze paragraaf gaan we dieper in op het begrip veldsterkte. In het bijzonder bekijken we het verband tussen de ‘hoeveelheid’ veld (de fluxdichtheid) en de veldsterkte.

Coulombkracht De *Coulombkracht* F_C die een *homogeen* elektrisch veld uitoefent op een elektrische *lading* is *evenredig* met de hoeveelheid van die elektrische lading. In principe kan ook de grootte (afmeting) van de lading een rol spelen. Maar dat is van geen belang meer op het moment dat het veld homogeen is. Om te kunnen zeggen dat een veld homogeen is, hebben we een afstand nodig waarover het veld niet veranderd is. Praktisch gesproken is die afstand de afmeting van de lading. Omgekeerd redenerend kunnen we zeggen dat als het veld niet homogeen is, de lading een ‘*puntlading*’ moet zijn. Het gaat erom dat de *veranderingen in het veld* verwaarloosbaar klein zijn over de afmetingen van de lading.



Figuur 1.20 Coulombkracht van een elektrisch veld op een elektrische lading. Let op de richting van de Coulombkracht afhankelijk van veldrichting en ladingsteken.

Elektrische veldsterkte Kenmerkend voor het elektrische veld is de evenredigheidsfactor tussen kracht en lading: de *sterkte van het elektrische veld* E is de *grootte van de Coulombkracht per eenheid van*

elektrische lading. Een elektrische lading Q in een homogeen, dus overall even sterk en gelijkgericht, elektrisch veld met sterkte E ondervindt een **Coulombkracht** \underline{F}_C met grootte F_C :

$$\boxed{\underline{F}_C = Q\underline{E} \Leftrightarrow \underline{E} = \underline{F}_C/Q}$$

De onderstreping duidt erop, dat kracht (en veldsterkte) een richting heeft: de elektrische *veldsterkte* elektrisch is een *vector* \underline{E} . Merk op, dat inderdaad de **eenheid van elektrische veldsterkte** is N/C, Newton per Coulomb. De richting van de Coulombkracht hangt af, in tegenstelling tot die van de veldsterkte, van het *teken* van de lading: een positieve lading ondervindt een kracht met het veld mee, maar een negatieve lading ondervindt een kracht tegen de veldrichting in.

Opg 1.7.1 * I De Coulombkracht op een lading is *altijd* evenredig met de grootte (hoeveelheid) van de lading.

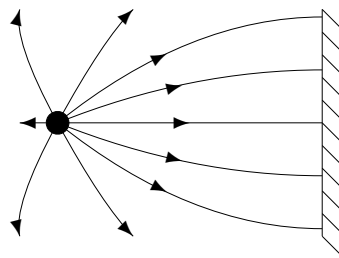
II In homogene elektrische velden is de Coulombkracht *altijd* onafhankelijk van de grootte (volume) van het ladingsdeeltje.

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

Opg 1.7.2 ** In een veld met een sterkte van 10 V/m bevindt zich een lading, die alleen kan bewegen onder een hoek van 120° vanaf de veldrichting. In die richting is de Coulombkracht 1 μN. Bereken de ladingsgrootte.

[Antw. $Q = -5 \cdot 10^{-8}$ C]

Nulpotentiaalvlak Indien het elektrische veld de lading verplaatst, dan gaat de lading vanaf een bepaald potentiaalvlak tot het potentiaalvlak waar het tot rust komt. Dat kan bijvoorbeeld de ‘aarde’ zijn, of ‘zeer ver weg’. We noemen het potentiaalvlak waar een *positieve* lading terecht komt het **nulpotentiaalvlak** en duiden dat aan met O . De aarde is in veel gevallen ons nulpotentiaalvlak, maar het kan ook ieder ander (geleidende) potentiaalvlak zijn, zoals de behuizing van een apparaat.



Figuur 1.21 Nulpotentiaalvlak: Kenmerkend is dat uiteindelijk *alle* veldlijnen van een ‘vrije’ lading op een nulpotentiaalvlak terechtkomen.

Potentiaal Bij het verplaatsen van de lading verricht de Coulombkracht, en dus het elektrische veld, arbeid. Die door het veld verrichte

arbeid is evenredig met de grootte van de lading, omdat de kracht evenredig is met de lading. De evenredigheidsfactor tussen arbeid en lading noemen we de potentiaal: de elektrische **potentiaal** V_P in een punt P is de arbeid die het elektrische veld verricht per eenheid van elektrische lading om een lading van P naar het nul potentiaalvlak te brengen. Noemen we de arbeid W dan zal dus *per definitie* moeten gelden :

$$W = QV_P$$

De **eenheid van elektrische potentiaal**(of spanning) is **Volt**; uit de definitie volgt $V = J/C$. De eenheid van veldsterkte bleek gelijk aan N/C ; controleer, dat $N/C = Nm/Cm = J/Cm = (J/C)/m = V/m$. Dat hebben we reeds eerder verkondigd. We komen in de volgende paragraaf terug op de bepaling van de potentiaal uit de veldsterkte, en omgekeerd.

Fluxdichtheid en veldsterkte Van het (elektrische) veld weten we—uit de wet van Gauss—niet de *veldsterkte* E , maar de *fluxdichtheid* D . Om deze twee met elkaar in verband te brengen moeten we de verhouding weten tussen de dichtheid en de sterkte van het elektrische veld. In het *algemeen* is er geen eenvoudig verband; maar gelukkig geldt voor veel stoffen bij kamertemperatuur een *evenredig* verband tussen D en E , met:

$$D = \epsilon E$$

De evenredigheidsconstante ϵ (grieks ‘e’psilon, onze ‘e’, naar het woord ‘e’lectro), heet **permittiviteit** (van latijn ‘mittere’, is ‘laten lopen’). De **eenheid van permittiviteit** ϵ is F/m , waarbij *Farad*: $F=C/V$ de *eenheid van elektrische capaciteit* is (daarover meer in deel 1, hoofdstuk 4). Voor de eenheid van ϵ geldt: $(C/m^2)/(V/m) = C/Vm = F/m$. De **permittiviteit van vacuüm** wordt genoteerd ϵ_0 ; de (door eenhedenkeuze) toegekende waarde is:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7}c^2 = 8,988 \cdot 10^9 \text{ m/F}$$

Gemakshalve ronden we het laatste getal af op $9 \cdot 10^9$. De verhouding van de permittiviteit en die van vacuüm heet de **relatieve permittiviteit** of **diëlektrische constante** ϵ_r (voor waarden zie bijvoorbeeld BINAS tabel 17). Voor gassen, zoals lucht, is $\epsilon \approx \epsilon_0$.

Veldsterkte homogeen veld In paragraaf 1.5.2 zagen we dat voor de vlakkeplaat-condensator, de normale uitvoering van een homogeen veld,

de *fluxdichtheid* D gelijk was aan de plaatlading Q per potentiaaloppervlak A (gelijk aan het plaatoppervlak): $D = Q/A$. Daaruit volgt direct voor de veldsterkte in een homogeen veld de *constante* veldsterkte:

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}$$

- Opg 1.7.3 **** Een condensator heeft platen met een oppervlak van 5 cm^2 , plaatafstand 1 mm en een tussenstof met een diëlektrische constante van 12 . De platen worden geladen met $0,5 \text{ nC}$.
- a Bereken de veldsterkte. [Antw. $E = 9,4 \text{ kV/m}$]
 b Bereken de Coulombkracht op de platen. [Antw. $F_C = 4,7 \mu\text{N}$]

Veldsterkte geladen bol De fluxdichtheid D van een bol met lading Q bleek in paragraaf 1.5.3 buiten de bol te zijn:

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} = D_R(R/r)^2$$

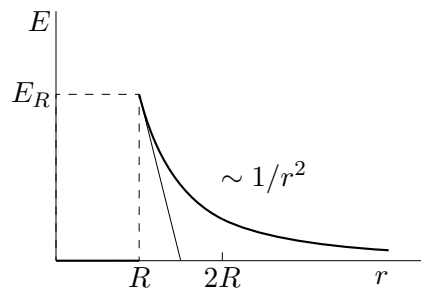
De veldsterkte E volgt direct uit de fluxdichtheid: $E = D/\epsilon$, dus buiten de bol:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} = E_R(R/r)^2$$

In woorden: de **veldsterkte** van een *bollading* is *omgekeerd kwadratisch* afhankelijk van de afstand tot het midden. Let op de snelle afname van de *sterkte* van het veld buiten de bol.

Op de bolrand $r = R$ is het veld maximaal E_R :

$$E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$$



Figuur 1.22 Veldsterkte: $E_r \sim 1/r^2$ van een radiaal bolveld *buiten* de lading.

- Opg 1.7.4 ***** Een geleidende bol met straal R is geladen met lading Q .
- a * Bepaal de *veldsterkte* op het boloppervlak. [Antw. $E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$]
 b *** Welke waarde heeft de veldsterkte in de bol?
- Opg 1.7.5 **** Zie eerst nog naar opg. 1.5.9. Een bol is homogeen gevuld met ruimtelading; de *ladingsdichtheid* is 1 mC/m^3 , de bolstraal 1 cm . Bepaal de veldsterkte E op afstand r van het bolmidden voor de verschillende afstanden:
- a teken het veld van de bol, en de grafiek van E_r tegen r
 b op de bol $r = 1 \text{ cm}$; [Antw. $E_R = 377 \text{ kV/m}$]
 c buiten de bol $r > 1 \text{ cm}$; [Antw. $E = 377(\text{cm}/r)^2$]
 d in de bol $r < 1 \text{ cm}$; [Antw. $E = 377(r/\text{cm})$]

Veldsterkte cilinderlading Bij een cilindrische ladingsverdeling zijn de *potentiaalvlakken* cilindervlakken. Een cilinderoppervlak is evenredig met de straal ervan. De **veldsterkte**, op een afstand r van de as, van een met lading Q geladen cilinder, met straal R , lengte L en oppervlak $A = 2\pi RL$, wordt diens omgekeerd evenredig met de afstand:

$$E = E_R(R/r) \quad E_R = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon R}$$

Opg 1.7.6 ** Een zeer lange metalen cilinder, 10 cm lang en 1 cm straal, wordt geladen met 1 pC (op het oppervlak). Bereken de veldsterkte als functie van de afstand tot de cilinderas:

- a Op de cilinderwand $r = 1$ cm. [Antw. $E_{1\text{cm}} = 18,0 \text{ V/m}$
 b *** Buiten de cilinder $r > 1$ cm. [Antw. $E = 18,0(\text{cm}/r) \text{ V/m}$

Opg 1.7.7 ** Een zeer lange rechte coaxkabel bevat op de kerndraad, diameter 0,5 mm, een lading van 1 nC/m. De mantel heeft een diameter van 6 mm en is geaard. Bereken de elektrische veldsterkte als functie van de afstand tot de as van de kabel:

- a 'op' de kerndraad $r = 0,25$ mm. [Antw. $E = 72 \text{ kV/m}$
 b tussen kern en mantel op afstand r . [Antw. $E = 18(1\text{mm}/r) \text{ kV/m}$
 c 'op' de mantel $r = 3$ mm. [Antw. $E = 6 \text{ kV/m}$
 d buiten de mantel. [Antw. $E = 0 \text{ kV/m}$

1.7.2 Magnetische veld

Magnetische monopool Bij magnetische velden wordt ogenschijnlijk geen magnetische lading getransporteerd. We zagen al eerder dat er in de natuur *geen netto magnetische lading* is gevonden. Er is echter niets op tegen om af te spreken dat er 'op papier' tóch magnetische lading kan worden getransporteerd. Denk eraan dat de *Noordpolen* en *Zuidpolen* van magneten wel degelijk kunnen worden verplaatst door een magnetisch veld. Bijvoorbeeld bij het draaien van een magneetnaald, waarbij de polen wel degelijk verplaatsen. Dus oefent het magneetveld wel degelijk arbeid uit op de polen afzonderlijk, ook al is de netto arbeid op de gezamenlijke polen in een homogeen veld nul.

Zulk een *op zichzelf staande* magnetische lading noemt men een **magnetische monopool**; 'mono' is latijn voor 'enkel'. De **eenheid van magnetische lading** is **Weber**, symbool **Wb**, gelijk aan die van de magnetische flux. Er geldt (wegens de apart te behandelen Lorentzkracht): $\text{Wb} = \text{Vs}$ (vergelijk: $\text{C} = \text{As}$). Bij dit schrijven is het bestaan van magnetische monopolen (nog) niet aangetoond. Wel zijn er sterke aanwijzingen dat ze wèrkelijk bestaan als afzonderlijke deeltjes. Vergelijk dit met de positie van het elektron een eeuw geleden: wel bedacht, maar nog niet aangetoond.

Magnetische veldsterkte Op een magnetische lading zal een magnetisch veld een magnetische kracht uitoefenen die evenredig is aan de magnetische lading. De **magnetische veldsterkte** H is de magnetische kracht per *eenheid van magnetische lading*; de **eenheid van magnetische veldsterkte** blijkt A/m te zijn. Immers, kracht/magn.lading = N/Wb = N/Vs = Nm/mVs = VAs/mVs = A/m. Vergelijk dat met de eenheid van elektrische veldsterkte V/m. Onthoudt: waar we elektrisch praten over Volt, krijgen we magnetisch Ampère.

Fluxdichtheid en veldsterkte De vraag doet zich voor of er ook hier een verband is tussen de *hoeveelheid* veld en de *sterkte* van het veld. Voor de meeste stoffen blijkt er een evenredig verband te zijn tussen de magnetische *fluxdichtheid* B en de magnetische veldsterkte H :

$$\boxed{B = \mu H}$$

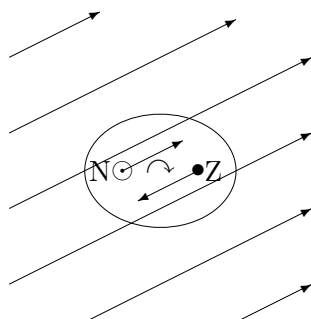
De evenredigheidsfactor μ is de **magnetische permeabiliteit** (μ = 'mu' is de griekse 'm', naar de griekse vindplaats van magneetstenen 'M'agnesia). De **eenheid van magnetische permeabiliteit** is H/m, waarin $\mathbf{H}(\text{enry}) = \text{J/A}^2$ de *eenheid van zelfinductie* is (daarover later meer). Immers, de eenheid van μ is T/(A/m) = (Wb/m²)/(A/m) = Wb/Am = Vs/Am = AVs/A²m = J/A²m = H/m. De magnetische permeabiliteit in vacuüm μ_0 is, door eenhedenkeuze, de waarde toegekend:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

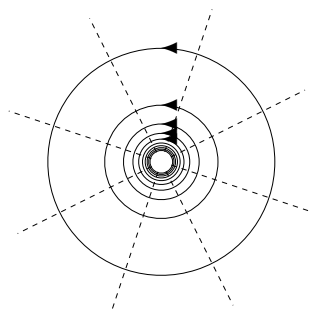
De verhouding van de permeabiliteit en die van vacuüm heet de **relatieve magnetische permeabiliteit** μ_r (voor waarden zie bijvoorbeeld BINAS tabel 29). Voor gassen, zoals lucht, en kunststoffen is $\mu \approx \mu_0$.

Magnetische potentiaal Net zoals we bij het elektrische veld een elektrische potentiaal hebben gedefinieerd, zouden we de **magnetische potentiaal** U_m kunnen definiëren gelijk aan de *arbeid* die het magnetische veld per magnetische lading uitoefent om een magnetische lading naar het magnetische nulpotentiaalvlak te brengen. Doen we dat, dan is de **eenheid van magnetische potentiaal** A, dus *Ampère*. Immers J/Wb = Nm/Wb = (N/Wb)m = (A/m)m = A. Weer zien we, dat vergeleken met de elektrische potentiaal, de Volt is vervangen door Ampère. In formulevorm wordt de magnetische *potentiaal* U_{mP} in het punt P :

$$\boxed{U_{mP} = - \int_P^O \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_O^P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}}$$



Figuur 1.23 Magnetische dipool in een magnetisch veld.



Figuur 1.24 Magnetische veldlijnen en potentialen rond een stroomdraad.

Magnetisch nulpotentiaalvlak Omdat magnetische ladingen slechts als dipolen voorkomen, met netto magnetische lading nul, zullen de magnetische veldlijnen altijd in kringen gaan. Er kan daarom geen sprake zijn van een echt ‘nul’potentiaalvlak bij magnetische velden. We zullen precies moeten afspreken welk potentiaalvlak (willekeurig) zal worden *gekozen* als het **magnetische nulpotentiaalvlak**. Verder zullen we bij een potentiaal berekening nooit méér dan één rondje maken; zouden we dat wèl doen, dan zou immers na iedere rondgang de potentiaal met een constant bedrag omhoog gaan, terwijl we toch in hetzelfde punt zijn.

Overigens doet zich eenzelfde probleem voor bij elektrische stromen in netwerken. Immers, iedere ‘zinvolle’ schakeling bevat minstens één kring met een spanningsbron, vaak vele van zulke kringen, maar nooit een ‘dood eind’. Door iedere tak lopen elektrische veldlijnen, zodat die veldlijnen uiteindelijk altijd rondgaan. Daar hebben we dus hetzelfde probleem bij het bepalen van ‘nulpotentiaal’, en potentiaal.

Feitelijk is de situatie nòg ingewikkelder: tengevolge van inductieverschijnselen lopen elektrische en magnetische velden door elkaar. Gelukkig kan de elektrische potentiaal, inclusief magnetisch gedrag, altijd worden gedefinieerd zolang er geen magnetische monopolen zijn. Maar zelfs dan blijkt de magnetische potentiaal in het algemeen uit drie (vector)componenten te bestaan! Gelukkig voldoet bovenstaande meestal.

Opg 1.7.8 * De eenheid van μ is:

- A H B A/m C V/m D H/m

Opg 1.7.9 * De eenheid van U is:

- A H B A C V D Wb

Opg 1.7.10 ** Rond een stroomdraad, met 2 mm diameter, loopt een magnetisch veld. Op een afstand van 9 mm van het hart is het veld 2 mT. Bereken voor dit veld:

- a De veldsterkte op 1 cm van het hart. [Antw. $H = 1,59 \text{ kA/m}$]
 b De potentiaal voor precies één keer rond. [Antw. $U_{\text{m rond}} = 100 \text{ A}$]

1.8 Elektrische potentiaal

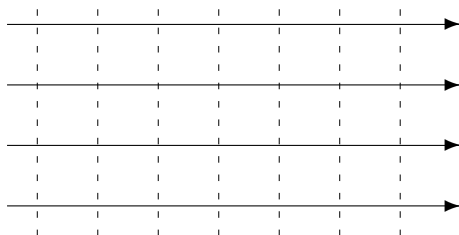
Inleiding In paragraaf 1.7.1 bestudeerden we de sterkte van het elektrische veld, die een lading kan doen bewegen. De *arbeid* die het elektrische veld daarbij kan verrichten wordt gekenmerkt door de *elektrische potentiaal*, pagina 53. In deze paragraaf gaan we dieper in op het begrip potentiaal. In plaats van het natuurkundig begrip ‘potentiaal’ gebruiken we ook wel ‘spanning’—eigenlijk is **spanning** een **potentiaalverschil**—als het om elektrische verschijnselen gaat.

Het verplaatsen van ladingen *in een potentiaalvlak* kost natuurlijk *geen* arbeid. In de eerste plaats omdat het veld loodrecht op het potentiaalvlak staat, zodat de kracht in de richting van het potentiaalvlak nul is, en geen arbeid verricht. In de tweede plaats—en we zullen voortaan liever op die manier tegen arbeid van een elektrisch veld aankijken—omdat *de potentiaal in een potentiaalvlak een constante waarde heeft*. Daarom is het verstandig om verplaatsingen te ‘ontbinden’: een component in de richting van de *veldlijn*, en, loodrecht daarop, een component ‘in’ een *potentiaalvlak*. Vanwege de eenvoud bezien we eerst het homogene veld.

1.8.1 Potentiaal homogeen veld

Vlakkeplaten-condensator In een **vlakkeplaten-condensator** is een *homogeen* elektrisch veld met een constante veldsterkte E . De Coulombkracht op een lading Q zal overal constant $F_C = QE$ zijn. Zeg dat l de lengte is van die veldlijn. Neem aan, dat de linkerplaat een positieve spanning U heeft, en dat de rechterplaat geaard is, potentiaal 0. Om de potentiaal in een punt P te kunnen bepalen berekenen we de arbeid die de veldkracht uitoefent (op lading) als die getransporteerd wordt van P naar het punt van de *veldlijn* in het nulpotentiaalvlak O , op de rechterplaat. Voor constante krachten geldt: *arbeid = kracht maal weg*, zodat de arbeid W zal worden:

$$W = QEl$$



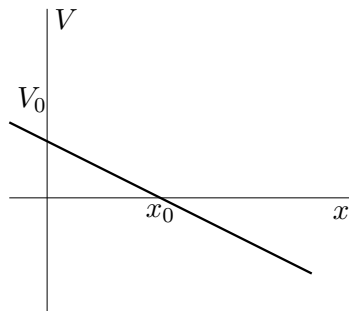
Figuur 1.25 Potentiaalvlakken en veldlijnen in een homogeen veld.

Volgens de definitie van potentiaal V is $W = QV$, waaruit we, voor de vlakkeplaten-condensator, concluderen dat de elektrische **potentiaal** V in het punt P op afstand l van het *nulpotentiaalvlak* gelijk is aan:

$$V = El$$

Volgens deze formule kunnen we bij ieder potentiaalvlak de waarde van de in dat vlak geldende potentiaal berekenen. Met het veld meegaande neemt de potentiaal gelijkmatig af, en wel voor iedere meter met de grootte van de veldsterkte.

Potentiaalvlakken Omdat de veldlijnen in de condensator evenwijdig zijn, zijn de *potentiaalvlakken*—vlakken loodrecht op de veldlijnen—‘rechte’ vlakken. Op afstand l van het nulpotentiaalvlak is de potentiaal $V = El$. Daaruit volgt voor deelstappen dl in de richting van het veld, dat de potentiaal ‘toeneemt’ met een dV die negatief is: $dV = -Edl$. Negatief omdat de potentiaal afneemt naar de waarde nul. De afstand dl tussen opvolgende potentiaalvlakken (waarbij $dV = -1$) wordt dan $dl = -dV/E = 1/E$. Hoe sneller de stroming, hoe groter E , hoe dichter de veldlijnen en de potentiaalvlakken op elkaar komen (vgl. de hoogtelijnen op kaarten).



Figuur 1.26 Potentiaal homogeen veld. De grafiek is een dalende rechte lijn—kenmerkend voor homogene velden.

De rc van de grafiek is gelijk aan het ‘differentiaalquotient’, of de ‘afgeleide’, van de functie V :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -V'$$

In het geval van de condensator met spanningsval U is het veld ook homogeen. We kunnen de verschillen: $dV = -U$ en $dl = l$, nemen over

Potentiaalgrafiek Zetten we de potentiaal van een homogeen veld uit in een grafiek als functie van de positie, gemeten in de veldrichting, dan zien we dat de potentiaal een rechte lijn is met twee constanten (rc en snijpunt met as):

$$V = E_x(x - x_0) = E_x x + V_0$$

Omgekeerd volgt uit de rc (richtingscoëfficiënt) van deze lijn de waarde van de veldsterkte, en dus de fluxdichtheid.

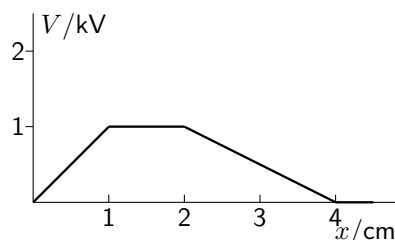
de *gehele* condensator ruimte:

$$E_x = U/l$$

- Opg 1.8.1 **** Tussen de vlakke platen van een *condensator* staat een veld met een sterkte van 1 kV/m. De platafstand is 0,5 cm. Bereken:
- de spanning tussen de platen [Antw. $U = 5 \text{ V}$]
 - Teken de grafiek van de potentiaal (rechterplaat is geaard)
 - de arbeid die het veld verricht als een elektron van de ene naar de andere plaat zou worden getrokken [Antw. $W = 5 \text{ eV}$]
 - de fluxdichtheid [Antw. $D = 8,85 \text{ nC/m}^2$]
 - als de linkerplaat wordt geaard, wat wordt dan de potentiaal op 1 mm van de rechterplaat? [Antw. $V = -4 \text{ V}$]
- Opg 1.8.2 **** Bij een *vlakkeplaten-condensator* wordt de linkerplaat, zeg bij $x = 0$, op 1 kV gezet, en de rechterplaat, zeg bij $x = 6 \text{ mm}$, op -2 kV .
- Bereken de positie van het nulpotentiaalvlak [Antw. $x = 2 \text{ mm}$]
 - Bereken de veldsterkte in dat vlak in de x -richting. [Antw. $E = 0,5 \text{ MV/m}$]

Opg 1.8.3 **

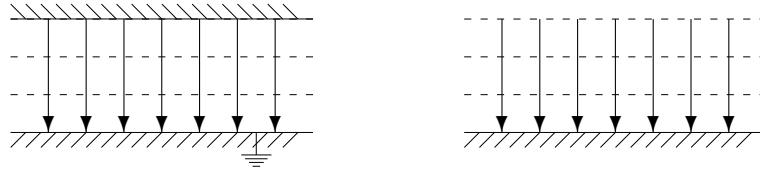
Gegeven is de grafiek van de potentiaal V langs x -as (in kV en cm): van $x = 0$ tot 1 stijgt V van 0 tot 1, tussen $x = 1$ en 2 blijft V constant, waarna de potentiaal terug loopt naar 0 bij $x = 4$. Gevraagd: De grafiek van de veldsterkte langs de x -as. Verklaar, dat de twee oppervlakken, die je in die grafiek krijgt, even groot zijn.



- Opg 1.8.4 ***** Van een dobbelsteen is het vlak met een 1 erop gelijkmatig geladen met $10 \mu\text{C}$. Het vlak met een 6 erop (het tegenoverliggende vlak) is gelijkmatig geladen met $-10 \mu\text{C}$. De waarde van de *potentiaal* V_M in het snijpunt M van de lichaamsdiagonalen van de kubus is:
- tweemaal zo groot als bij alleen lading op vlak 1;
 - tweemaal zo groot als bij alleen lading op vlak 1;
 - nul;
 - oneindig.

Analogie met zwaartekrachtsveld Merk op dat de potentiaal positief is vóór het nulpotentiaalvlak, en negatief erachter. Als we de afstand tot het nulpotentiaalvlak h noemen, dan is $V = Eh$. Die situatie zou bekend kunnen voorkomen: denk aan een massa m in het zwaartekrachtsveld met constante g op hoogte h boven het (nulpotentiaalopper)vlak van de ‘aarde’, die een potentiële energie W heeft:

$$W = mgh$$



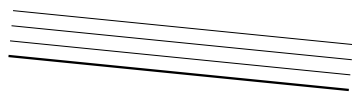
a Elektrisch veld (onderaan geaard). b Zwaartekrachtsveld (onderaan aarde).

Figuur 1.27 Twee vergelijkbare verticale homogene velden.

Nemen we de zwaartearbeid per massa, net zoals we de elektrische arbeid per lading namen, dan ontstaat een perfecte analogie tussen het zwaartekrachtsveld en het elektrische homogene veld.

$$W/m = gh$$

De zwaartekrachtversnelling g speelt de rol van de veldsterkte E (logisch, het geeft de sterkte van het veld aan). Daarbij is de hoogte h boven de aarde het analogon van de afstand tot het nulpotentiaalvlak; de massa m is het analogon van de lading Q . Nog duidelijker wordt die analogie, indien we waterstromen bezien die ontstaan onder invloed van hoogteverschillen, en die vergelijken met ladingen die stromen onder invloed van elektrische velden.

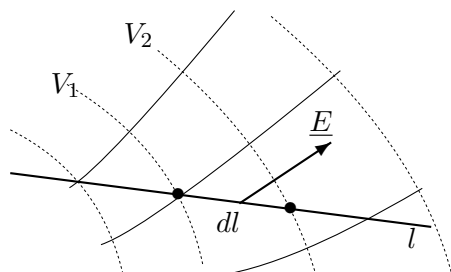


Figuur 1.28 Stroom door hoogteverval.

Hoogtelijnen zijn dan het analogon van de potentiaalvlakken. Het verval van de hoogte $-dh/dl$ is het analogon van de veldsterkte $E = -dV/dl$, en dat verval bepaalt de sterkte van de waterstroom.

1.8.2 Potentiaal en veldsterkte

Veldrichting De *potentiaal* wordt bepaald door de *veldsterkte*. Omgekeerd is het mogelijk sterkte en richting van het veld te bepalen uit het verloop van de potentiaal. Hoe de potentiaal verloopt hangt echter af van de baan die we bezien: in een potentiaalvlak is er geen potentiaalverschil, dus geen veldsterkte*component*. Langs een veldlijn hebben we maximaal potentiaalverloop, dus een maximale veldsterkte*component*. Op deze wijze bepalen we de veldsterkte*component* langs de baan uit het verloop van de potentiaal dáár. Samengevat: de veldsterkte heeft niet alleen een *grootte*, maar ook een *richting*: de veldsterkte is een *vector*.



Figuur 1.29 Potentiaalverandering langs deel van een baan; de veldlijnen staan loodrecht op de potentiaalvlakken, dus scheef op de baan. De veldsterkte \underline{E} maakt dus een hoek met het baanstuk (baandeel) $d\underline{l}$.

Veldsterktecomponent Bij ieder potentiaalvlak (dus loodrecht op de stroom) is de waarde van de potentiaal bekend (zie ook figuur 1.29). De veldsterkte (in de richting van l) berekenen we uit het potentiaalverloop. Bezie het deel van de baan tussen de opeenvolgende potentiaalvlakken met de waarden V_1 en $V_2 = V_1 + dV$, of:

$$dV = V_2 - V_1$$

Bij het verplaatsen van lading van V_1 naar V_2 wordt door het elektrische veld arbeid verricht. De arbeid per lading, dW , is gelijk aan de afname van de potentiaal tussen de twee potentiaalvlakken (zie vorige paragraaf).

$$dW = -dV$$

De arbeid kan ook rechtstreeks berekend worden uit kracht maal weg. Die weg is de afstand tussen de potentiaalvlakken dl , gemeten langs de lijn l (die dus niet een veldlijn hoeft te zijn). Deze afstand is klein, zodat de kracht langs de weg constant is. De kracht per lading is gelijk aan de component E_1 van het elektrische veld in de richting l . De arbeid per



a Verplaatsingsdeel $d\underline{l}$ ontbonden in dl_E langs de veldlijn en een deel in het potentiaalvlak. De potentiaal neemt toe van V tot $V + dV$.

b Veldsterkte E ontbonden in E_1 langs de baan dl en een component haaks erop. Let op de bijbehorende potentiaalverschillen links.

Figuur 1.30 Ontbinding van verplaatsingsdeel dl resp. veldsterkte E in de richting van het veld E resp. de verplaatsing l .

lading wordt daarmee:

$$dW = E_1 dl$$

Door vergelijking van de twee uitdrukkingen voor de arbeid vinden we dat de *veldsterkte* component langs de lijn gelijk is aan de *afname* (– teken) van de potentiaal U per meter in de richting l :

$$\boxed{dV = -E_1 dl \quad E_1 = -\frac{dV}{dl}}$$

Veldsterktevector De component van een vector in een bepaalde richting kan eenvoudig m.b.v. het inwendig produkt worden bepaald (we behandelden dit ook in paragraaf 1.6) Het inwendig produkt van de veldsterkte \underline{E} , in dit deel van het veld, met het verplaatsingsdeel $d\underline{l}$ is gelijk aan het gewone produkt van de veldsterkte component E_1 in de richting l met de afstand dl :

$$\underline{E} \cdot d\underline{l} = E_1 dl$$

Er is nu pas één component van de veldsterkte bepaald, namelijk in de l -richting. Door drie componenten van de veldsterkte te bepalen, in drie verschillende richtingen, is de vector \underline{E} te reconstrueren. Er is één speciale richting: in de *veldrichting* wordt de component zo groot mogelijk, en wel gelijk aan de grootte van de veldsterkte. Dus: de veldrichting is de richting met de *maximale* veldsterkte component.

Voorbeeld Harmonische potentiaal De potentiaal V in een punt (x, y, z) van de ruimte wordt bepaald door: $V = x^2 + y^2 + z^2$.

Bereken de veldsterkte in $P = (1, 0, 2)$, en de component in die richting.

We bepalen eerst de componenten van de veldsterkte in x, y en z -richting uit de afgeleiden van V te berekenen. De grootte van de veldsterkte volgt uit de samenstelling.

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 + z^2) = -2x;$$

in het bijzonder voor het punt P met $x = 1$ is dus $E_x = -2$. Op die manier vinden we:

$$E_x = -2 \quad E_y = 0 \quad E_z = -4 \quad \text{en} \quad E = 4,472$$

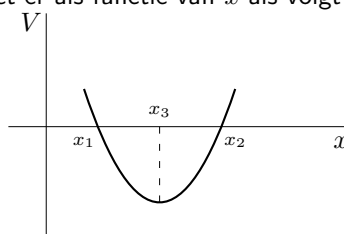
In de richting van de veldlijn $l = (1, 0, 2)$ (de lijn door het punt) is de component E_1 te vinden met behulp van twee vectoren: die van de veldsterkte \underline{E} en die van de richting \underline{l} . Daarvoor gebruiken we het **inwendige vectorprodukt** (zie 'Wiskunde voor het HBO' deel 2): $E_1 = \underline{E} \cdot \underline{l} / l = (-2, 0, -4) \cdot (1, 0, 2) / \sqrt{5}$. We berekenen, zoals te verwachten was:

$$E_1 = -2\sqrt{5} = -4,472$$

Opg 1.8.5 * We kunnen de elektrische veldsterkte, zowel grootte als richting, in een gegeven punt bepalen als we weten:

- A de potentiaal in dat punt;
- B het potentiaalverschil tussen oneindig en dat punt;
- C het potentiaalverloop per eenheid van afstand in de directe omgeving van dat punt, en wel in drie verschillende (niet in één vlak of langs één lijn gelegen) richtingen;
- D de x , y en z component van de potentiaal in dat punt.

Opg 1.8.6 *** De potentiaal ziet er als functie van x als volgt uit (x_1 , x_2 op as):



Voor de elektrische veldsterktecomponent $E(x)$ geldt:

- A $E(x_1) = E(x_2)$
- B $E(x_1) = -E(x_2)$
- C $E(x_1) = E(x_2) = 0$
- D $E(x_3) = \infty$

Opg 1.8.7 *** Een potentiaalverloop per eenheid van afstand in een bepaalde richting in een elektrisch veld levert:

- A de veldsterkte op in dat punt;
- B de kracht op die een lading in die richting ondervindt;
- C de kracht op die een lading, met bekende grootte, in die richting ondervindt.

Opg 1.8.8 ** De elektrische potentiaal is een functie van x volgens $V(x) = \sqrt{4 + x^2}$. De x-component van de veldsterkte bij $x = 0$ is:

- A 0
- B ∞
- C $+\frac{1}{4}$
- D $-\frac{1}{4}$

Opg 1.8.9 De potentiaal is $V(x,y,z) = 10^3(x^4 + y^4 + z^2)$ V. Gevraagd in het punt (1cm, 1cm, 1cm):

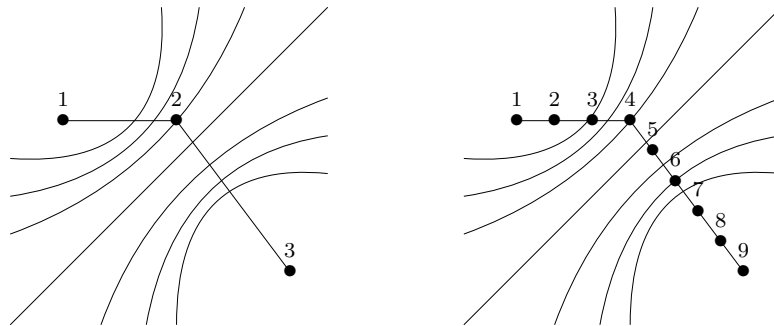
- a ** De drie componenten van de veldsterkte en de grootte
[Antw. $\underline{E} = -(4 \cdot 10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 20)$ V/m en $E = 20$ V/m]
- b **** De veldsterkte component in de richting (1,1,1)
[Antw. $E_1 = 11,55$ V/m]

1.8.3 Potentiaal inhomogeen veld

Ontbinden van verplaatsingen Iedere verplaatsing kunnen we ontbinden, in verplaatsingen langs potentiaalvlakken, die geen energie kosten, en verplaatsingen langs veldlijnen, die wèl energie kosten. Wiskundig betekent dit, dat we slechts de component langs het veld (langs de veldlijn) nodig hebben om de potentiaal te bepalen. Zo 'n component verkrijgen we door gebruik te maken van de vectornotatie en het inwendige produkt—zoals we eerder deden bij fluxdichtheden. Zo krijgen we bijvoorbeeld voor het *homogene veld* op 'afstand' l van het nulpotentiaalvlak een potentiaal:

$$V = -\underline{E} \cdot \underline{l}$$

In woorden: Alléén de veldsterkte *in de verplaatsingsrichting* draagt bij tot de *potentiaal*.



a Lijnstuk 12 is te groot om de potentiaal op 10% nauwkeurig te vinden.

b Lijnstukken 12, 23, enz. zijn ieder klein genoeg om de potentiaal met minder dan 10% fout te benaderen.

Figuur 1.31 Denkebeeldige banen tussen potentiaalvlakken voor het bepalen van de potentiaal: benadering met rechte lijnstukken.

Potentiaaldelen Is het veld *niet homogeen*, dan zal de potentiaal niet meer gelijkmatig verminderen als we langs de baan gaan. Om te weten te komen hoe de potentiaal verandert langs de baan, verdelen we de baan, die van het punt P naar het punt O loopt, stapsgewijs in baanstukken $d\mathbf{l}$. Kies de stappen juist zó groot, dat op dat baanstuk de veldsterkte nauwelijks verandert, *noch qua* sterkte, *noch qua* richting. Op ieder baanstukje $d\mathbf{l}$ is het veld daardoor homogeen te beschouwen. De toename van de potentiaal dV als we langs het baanstuk $d\mathbf{l}$ (in de richting van het veld) gaan is dan, vanwege het afnemen van de potentiaal, *negatief* met de waarde:

$$dV = -\underline{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Deze formulering geldt nu ongeacht of we langs een veldlijn gaan of langs een andere baan: dankzij de vectornotatie!

Som van potentiaaldelen Sommeren we alle potentiaal‘toenamen’ dV vanaf het potentiaalvlak punt P tot aan het nulpotentiaalvlak punt O , dan krijgen we de potentiaal in het punt P als de ‘somintegraal’:

$$V_P = \int_P^O dV = - \int_P^O \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

We kunnen $-\underline{E}$ zien als de (tegen)kracht per lading die het kost om de lading tegen het veld in te verplaatsen. Zo gezien wordt de definitie: de potentiaal V_P is gelijk aan de *uitwendige arbeid per lading* die het kost om een lading van het *nulpotentiaalvlak* O naar het potentiaalvlak door P te brengen. Samengevat:

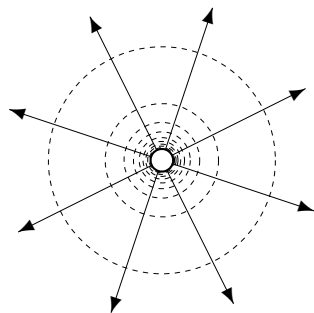
$$V_P = \int_O^P \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Wiskundige uitwerking Wiskundig hebben we niets anders gedaan, dan de grenzen van de integraal verwisselen en dat met een minteken goedmaken; natuurkundig is er echter wel meer gebeurd! De potentiaal is niet meer met ‘inwendige krachten’—*de veldsterkte*—beschreven, maar met ‘uitwendige krachten’—door ons uitgeoefend *tegen het veld in*. Verder hebben we de som over alle kleine potentiaaldelen opgevat als een *wiskundige integraal over een variabele, bepaald door de lijnstukken dl , van een integrand, bepaald door de veldsterkte E* . Dat laatste kan alleen maar juist zijn, volgens de wiskundige theorie, ‘als we de limiet nemen van oneindig kleine lijnstukken dl ’. Nu is dat natuurkundig gezien te vertalen in de eis (wat is immers *klein*: zo klein dat *geen ‘veranderingen’ zichtbaar zijn*) dat de stappen klein genoeg moeten zijn om de veldsterkte E (de integrand) tijdens de stap binnen de foutenmarge constant te houden. En dat is precies wat we eerder hadden afgesproken.

Opg 1.8.10 *** De elektrische potentiaal in een punt P is de arbeid per lading, die wordt verricht door:

- A het elektrische veld, bij het transport van die lading van het nulpotentiaalvlak naar het potentiaalvlak door P ;
- B het elektrische veld, om een positieve eenheidslading te transporteren van het nulpotentiaalvlak naar het punt P ;
- C een uitwendige kracht, om die lading te transporteren van het nulpotentiaalvlak naar het potentiaalvlak waarop P ligt;
- D een uitwendige kracht, bij het transport van die lading van het potentiaalvlak waarop P ligt naar het nulpotentiaalvlak.

1.8.4 Potentiaal bollading



Figuur 1.32 Het elektrische veld van een bolvormige lading

Potentiaalvlakken bollading De *veldlijnen* komen als rechte lijnen vanuit de bol, en zijn dus radiaal gericht. De *potentiaalvlakken* zijn boloppervlakken rond het middelpunt van de bollading, met een oppervlak A dat kwadratisch met de straal r ervan toeneemt. Het nulpotentiaalvlak O wordt in dit geval oneindig ver weg gekozen. Een positieve lading zal door het veld naar het oneindig verre worden gebracht. De **potentiaal** V van het boloppervlak op afstand r wordt dan gelijk aan:

$$V = \int_P^O \underline{E} \cdot d\underline{l} = \int_P^\infty E_r dr$$

Omdat de veldlijn in de straalrichting is er alleen een radiale component E_r . Let erop, dat de veldsterkte E_r weliswaar constant is op het baanstukje $dl=dr$, maar dat de waarde van die E_r wel degelijk verandert als we naar andere baanstukken gaan. *De veldsterkte E_r is géén constante voor de integraal!*

Potentiaal uit veldsterkte bolveld In paragraaf 1.7.1 vonden we dat de veldsterkte van een *bollading* kwadratisch met de afstand afneemt: $E_r = E_R(R/r)^2$, met op de rand de waarde $E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$. Bekijk de potentiaal uitdrukking. Vat de som op als een integraal—dat wil zeggen dat we de lijnstukken dr voldoende klein kiezen om een homogeen velderop te hebben—dan is het variabele deel van de integrand $1/r^2$, hetwelk tot $-1/r$ integreert:

$$V = E_R R^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_P^\infty$$

Vullen we de grenzen in, met voor P de afstand r , dan is $[-\frac{1}{r}]_P^\infty = -(\frac{1}{\infty}) - (-\frac{1}{r}) = \frac{1}{r}$. In een punt op afstand r van het centrum van de lading Q *buiten de bol* is de potentiaal (zie ook fig. 1.33):

$$V = E_R R^2 \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

De potentiaal buiten de bol is omgekeerd evenredig met de afstand tot het midden van de bol. Op de bolrand $r = R$ is de potentiaal V_R :

$$V_R = E_R R = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$$

Een leuke eigenschap is dat de potentiaal direct uit de veldsterkte volgt, juist als bij de vlakke plaatcondensator (maar bij de bol is E_r variabel):

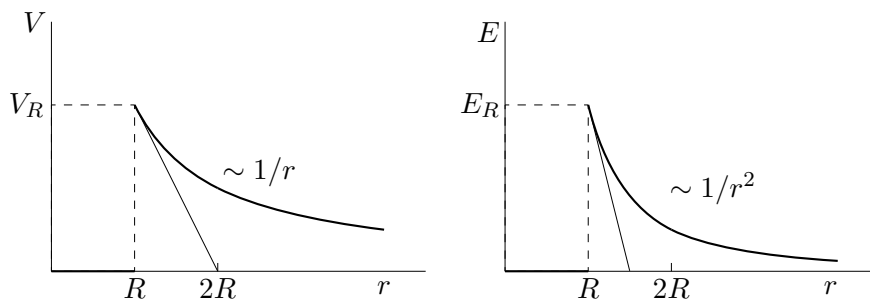
$$V = E_r r$$

Conclusie *De potentiaal V in een punt tgv een lading Q hangt af van de verdeling van de lading, en de afstand tot het punt. Voor een bollading, met afstand van midden tot punt r , is de potentiaal:*

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

Voor vlakke platen, met oppervlak A en plaatafstand l , is de spanning U (tussen de platen):

$$U = \frac{Q}{\epsilon A/l}$$



a Potentiaal: $V = -\int E dr \sim \frac{1}{r}$

b Veldsterkte: $E_r = -\frac{dV}{dr} = \frac{V}{r} \sim \frac{1}{r^2}$

Figuur 1.33 Potentiaal en veldsterkte van radiaal bolveld *buiten* de lading: het veld 'verdwijnt' snel.

Afstand potentiaalvlakken Let erop, dat veldsterkte en potentiaal afhangen van de afstand tot *het midden* van de bol (niet: de rand van de bol!). De veldsterkte neemt snel af met r ; daarentegen neemt de potentiaal slechts langzaam af. De lading van de bol zal daarom tot grote afstand invloed hebben op de potentiaal. De potentiaal op grote afstand kan weer zorgen voor ‘tegen’lading: op die manier werkt ‘influentie’ (‘beïnvloeding’). De afstand tussen de potentiaalvlakken verkrijgen we uit de afstandsverandering dr die een potentiaalverandering $dV = -1$ geeft: $dV/dr = -E_r$. De afstand dr tussen de potentiaalvlakken is gelijk aan $1/E_r$. Bij een radiaal bolveld neemt de afstand d tussen de potentiaalvlakken kwadratisch toe (zoals in figuur 1.32 is te zien):

$$d = \frac{4\pi\epsilon}{Q} r^2$$

Veldsterkte door potentiaal bepaald De veldlijnen lopen *radiaal*, langs de straal, dus de veldlijnrichting l is r . De grootte van de veldsterkte E is dan gelijk aan de component in de radiale richting E_r . De veldsterkte daar kan worden gevonden door te differentiëren naar de variabele r ($dl = dr$):

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{dV}{dr} = -\frac{d\frac{Q}{4\pi\epsilon r}}{dr} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} = \frac{V}{r} \end{aligned}$$

Dat klopt precies met wat we reeds wisten! Merk op, dat de component van de elektrische veldsterkte in de **tangentieële** richting nul is (‘tangere’ is latijn voor ‘aanraken’). Dus: in het potentiaalvlak is er géén component van de veldsterkte, omdat de potentiaal niet van de ‘hoek’ afhangt (maar alleen van r).

Conclusie *Algemeen volgt de veldsterktecomponent in een richting uit de afgeleide van de potentiaal V naar de richtingsvariabele; bijvoorbeeld in de radiale richting:*

$$E_r = -\frac{dV}{dr}$$

Voor het veld van de geladen bol die op de potentiaal V staat wordt dat op afstand r van het midden:

$$E_r = V/r$$

Voor het homogene veld ter lengte l tussen de platen met spanningsverschil U geldt:

$$E = U/l$$

- Opg 1.8.11** *** Bij de berekening van de elektrische potentiaal in een bepaald punt P op een afstand r van het centrum van een lading Q volgt men achtereenvolgens de stappen (van oorzaak naar gevolg): $Q \Rightarrow \Psi \Rightarrow D \Rightarrow E_r \Rightarrow V$
- A fout in eerste stap
 B fout in tweede stap
 C fout in derde stap
 D fout in vierde stap
 E geen fouten
- Opg 1.8.12** ** Een geleidende bol met straal 2 cm is geladen met 1 nC lading.
- a bereken de veldsterkte op het oppervlak. [Antw. $E_R = 2,5 \text{ kV/m}$]
 b Bereken de potentiaal op het oppervlak [Antw. $V_R = 50 \text{ V}$]
 c Welke waarde heeft de spanning in de bol? [Antw. $V = 50 \text{ V}$]
 d Welke waarde heeft de veldsterkte in de bol? [Antw. $E = 0 \text{ V/m}$]
- Opg 1.8.13** ** Wanneer in lucht de veldsterkte groter wordt dan ongeveer 30 kV/cm, dan treedt ladingsdoorslag en ionisatie op. Bereken de potentiaal die je hooguit kan geven aan een geleidende bol met 10 cm straal.
 [Antw. max $V = 300 \text{ kV}$]
- Opg 1.8.14** **** Een bol is homogeen gevuld met ruimtelading; de ladingsdichtheid is 1 mC/m^3 , de bolstraal 1 cm (zie opgave 1.7.5). Bepaal de potentiaal V op afstand r van het bolmidden voor afstanden die vallen:
- a * teken het veld van de bol, en de grafiek van E_r tegen r
 b ** buiten de bol $r > 1 \text{ cm}$; [Antw. $V = 37,70/r$]
 c ** op de bol $r = 1 \text{ cm}$; [Antw. $V_R = 3,77 \text{ kV}$]
 d **** in de bol $r < 1 \text{ cm}$; [Antw. $V = \frac{1}{2}(3 - (r/R)^2)V_R$]
 e teken de grafiek van de potentiaal.
- Opg 1.8.15** **** Een zeer lange metalen cilinder, 10 cm lang en 1 cm straal, wordt geladen met 1 pC (op het oppervlak). Bereken het potentiaal verschil tussen punten die liggen op 2 cm en 3 cm vanaf de cilinderas op de aangegeven wijze:
- a ** Bereken de veldsterkte buiten het oppervlak. Zie paragraaf 1.7.1 op pag. 55. [Antw. $E = (10^{-2}/r)E_{1\text{cm}}$]
 b **** Bepaal het potentiaalverschil tussen de cilinder en een punt op afstand r . [Antw. $U = 10^{-2}E_{1\text{cm}} \ln(r/10^{-2})$]
 c ** Bepaal het potentiaalverschil tussen punten op 2 en 3 cm van de as. [Antw. $U_{2\text{mm}} - U_{3\text{mm}} = 73,0 \text{ mV}$]
- Opg 1.8.16** **** Een zeer lange rechte coaxkabel bevat op de kerndraad, diameter 0,5 mm, een lading van 1 nC/m. De mantel heeft een diameter van 6 mm en is geaard. Bereken de elektrische *potentiaal* op een afstand van 2 mm van de as (dus tussen de kerndraad en de mantel). Voor de veldsterkte zie opgave 1.7.7 [Antw. $U = V_{2\text{mm}} - V_{3\text{mm}} = (\frac{Q/l}{2\pi\epsilon} [\ln r]_2^3 = 7,3 \text{ V}$]

MEERKEUZEANTWOORDEN

Hoofdstuk 1 Stromen en velden

1.2 Stroomlijnen en potentiaalvlakken

1.2.1 D

1.2.2 B $C/m^3 \cdot m^3$

1.3 Stroom en oppervlak

1.3.2 D regen valt onder hoek $45 - 30$
resp. $45 + 30$ met dak

1.3.4 B

1.3.5 C

1.3.6 B

1.3.7 B $C = As = J/V$

1.4 Uitstroom en elektrische behoudswetten

1.4.2 D

1.4.3 D

1.4.4 C aarding speelt geen rol

1.4.5 A de helft van de lading/tijd

1.5 Wetten van gauss

1.5.1 A

1.5.2 A

1.5.4 A lading en spanning geen
vectoren

1.5.6 D

1.5.7a potentiaalvlakken zijn
bolvlakken met oppervlak
als r^2 1.5.7b potentiaalvlakken zijn
cylindervlakken met
oppervlak als r 1.5.10 C cilindersymmetrie $E = \frac{Q/l}{2\pi r}$;
met of zonder aarding

1.5.13 A

1.5.14 D

1.6 Stroom door geleider

1.6.1 C

1.6.2 A

1.6.3 E

1.6.8 D let op de eenheden!

1.7 Veldsterkte

1.7.1 C

1.7.8 D

1.7.9 B

1.8 Elektrische potentiaal

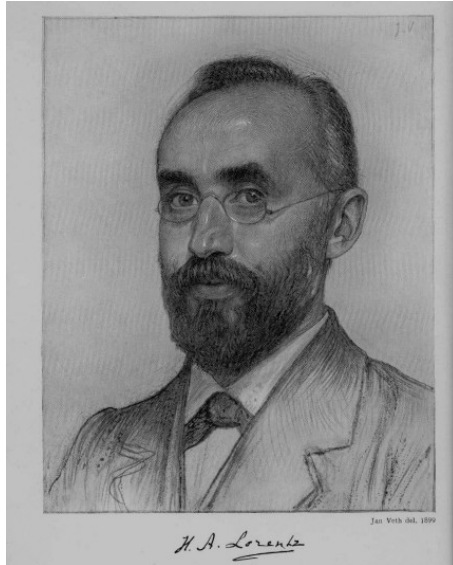
1.8.4 C som van tegengestelde
potentialen

1.8.5 C

1.8.6 B

1.8.7 C

1.8.8 A $E(x) = -2x/2(4 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ 1.8.10 C niet op een eenheidslading,
maar: per (eenheids)lading1.8.11 D om de potentiaal te bepalen
zijn *alle* tussenliggende
veldsterkten nodig, niet
alleen E_r



Hendrik Antoon
Lorentz
(1853–1928)

De in Arnhem op 18 juli 1853 geboren Lorentz was een briljante leerling (bijvoorbeeld een 10 voor frans), die als spoorstudent (!) aan de universiteit van Leiden natuurkunde studeerde en daar op 22 jarige leeftijd zijn proefschrift schreef met als onderwerp: het verklaren van het spiegelen en breken van lichtgolven met elektro-magnetische golven, volgens de theorie van Maxwell. Al op 24 jarige leeftijd werd hij hoogleraar in de theoretische natuurkunde. Bijzonder belangrijk—zeker voor ons—was zijn idee (1895) om de negatieve elementaire ladingen, de elektronen, de dragers te laten zijn van de elektrische geleiding. Daarop toonde J.J.Thomson aan dat de elektronen werkelijk bestonden (1897). In verband daarmee formuleerde hij de 'Lorentz-kracht', de kracht van een magneetveld op een bewegende lading. Een andere interessante ontdekking van hem betrof de 'Lorentz-transformaties' (1893), in het bijzonder de zogenaamde 'Lorentz-contractie': een voorwerp dat met grote snelheid beweegt lijkt korter te worden voor degene die er-

naar kijkt. Het was echter Einstein, die met de theorie van de relativiteit van beweging, de transformaties en de contractie begrijpelijk wist te maken (voorzover de relativiteitstheorie tenminste begrijpelijk is). Voor het werk, tezamen met Zeeman, aan de invloed van een magneetveld op het emissiespectrum van atomen kreeg hij in 1902 de Nobelprijs voor natuurkunde. De veelzijdigheid van Lorentz blijkt wel uit een van zijn latere werkzaamheden: het berekenen van de waterstromingen die in de voormalige Zuiderzee zouden ontstaan als de Afsluitdijk de verbinding met de Noordzee zou verbreken. Lorentz' faam blijkt hieruit, dat Einstein—die na zijn studie moeite had met het vinden van een geschikte betrekking—solliciteerde naar een baantje als zijn assistent: helaas, hij werd afgewezen (later werd hij goed bevriend met Lorentz). Lorentz kan tot de grootste nederlandse natuurkundigen worden gerekend; in het Sonsbeekpark te Arnhem is een 'standbeeld' voor hem opgericht.

Hoofdstuk 2

LADINGEN EN STROMEN IN VELDEN

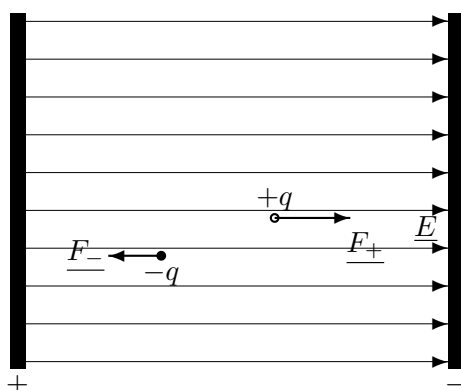
DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de volgende begrippen, verbanden en toepassingen zodanig te hebben verwerkt, dat u die kan gebruiken bij situaties in de elektrotechniek, in het bijzonder die bij de elektromechanica van motoren en generatoren:

- Coulombkracht, elektrische veldarbeid bij verplaatsen;
- elektronenbuis, elektrische afbuiging;
- Coulombkoppel, krachtmoment, uitproduktnotatie;
- elektrische dipool, arbeid elektrische veld bij draaien;
- stabiele en labiele toestanden van een dipool;
- Lorentzkracht op vrije lading, magnetische afbuiging;
- gekruiste E,B velden, snelheidsmeter, Hallveld;
- Lorentzkracht op stroomgeleider in homogeen magneetveld;
- Lorentzkrachtmoment (Lorentzkoppel) op stroomkringen in homogeen magneetveld;
- magnetisch dipoolmoment, stabiele en labiele toestand van een stroomkring in een magnetisch veld;
- Lorentzkracht op stroomkring door *inhomogeen* magneetveld;
- elektromotor, stroomomkering;
- inductiewet van Faraday, fluxverandering, flux door de kring, spanning rond de kring, inductiedemping;
- elektrische generator, opgewekte spanning, aandrieffkoppel onbelast en belast, aandrijfvermogen;
- inductiemotor, afgegeven krachtmoment;

2.1 Lading in elektrisch veld

2.1.1 Coulombkracht op vrije lading



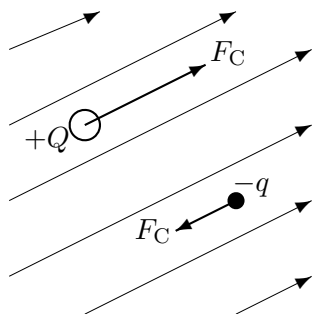
Figuur 2.1 Tussen twee vlakke condensatorplaten, waarvan de linker positief en de rechter negatief is geladen, heerst een homogeen elektrisch veld. Getekend zijn de veldsterkte van het veld en de Coulombkracht op een positieve, respectievelijk negatieve, lading. Merk op, dat de kracht op een negatieve lading tegen de veldlijn in werkt.

Elektrische veldsterkte Lees nog eens paragraaf 1.7.1, pag. 51. Als we een elektrisch geladen voorwerp, bijvoorbeeld een stofje, tussen de platen van een condensator houden, bemerken we dat er een kracht op werkt: door de wisselwerking tussen lading en elektrische veld wordt de lading ‘mee’getrokken met het veld met een kracht die evenredig is met de *lading* Q en met de elektrische *veldsterkte* \underline{E} : de *Coulombkracht* met de grootte F_C is een vector \underline{F}_C , gericht langs de veldlijn:

$$F_C = Q\underline{E}$$

Merk op, dat het veld in dit geval *homogeen* is, waardoor de lading willekeurig groot kan zijn en een willekeurige vorm kan hebben. In het algemeen echter zal het veld *inhomogeen* zijn, waardoor het veld E van plaats tot plaats zal verschillen. Op een ladingdeel dQ , een *puntlading*, zal dan een Coulombkrachtdeel dF_C werken:

$$\boxed{dF_C = dQ\underline{E}}$$



Figuur 2.2 Coulombkracht op een positieve lading (met het veld mee) en op een negatieve lading (tegen het veld in)

Let erop, dat een positieve lading met het veld mee wordt getrokken, maar dat een negatieve lading juist tegen het veld in zal worden getrokken. In het bijzonder elektronen zullen daardoor ‘tegen de stroom in’ lopen. De **eenheid van kracht** is **Newton**, symbool **N**; de eenheid van elektrische lading is Coulomb, afgekort C; de eenheid van elektrische veldsterkte is dus N/C, dat praktisch in V/m wordt omgezet (zoals we nog zullen zien).

Het elektrische veld bepaalt de kracht op de lading; we kunnen de elektrische **veldsterkte** \underline{E} opvatten als de elektrische kracht per lading (òf voor puntladingen, òf in een homogeen veld):

$$\underline{E} = \frac{F_C}{Q}$$

Opg 2.1.1 * We hebben voor een lading Q , geplaatst in een elektrisch veld, waarvan ter plaatse van Q de sterkte E is, de volgende formule voor de Coulombkracht: $F = QE$. Welke bewering over deze formule is juist:

- A altijd geldig, voor alle ladingen en alle velden
- B in een willekeurig veld E alleen geldig als Q een puntlading is
- C in een homogeen veld E alleen geldig als Q een puntlading is

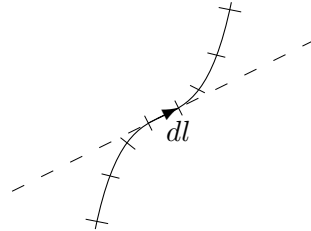
Opg 2.1.2 *** De formule voor de Coulombkracht $F = QE$, waarbij Q de grootte van een puntlading is, F de Coulombkracht en E de elektrische veldsterkte elektrisch die de lading voelt, geldt alleen als het veld:

- A door de lading ‘ Q ’ is opgewekt
- B door andere ladingen is opgewekt
- C homogeen in de ruimte is
- D constant in de tijd is

Veldarbeiddeel Een elektrisch veld kan arbeid verrichten. Meer algemeen is de arbeid die een kracht verricht bij het verplaatsen gelijk aan het produkt van de kracht maal de verplaatsing. Is de verplaatsing niet langs de werklijn (of is het veld niet homogeen) dan verdelen we de weg in delen die ieder zo kort zijn dat de kracht daar gelijk blijft (het veld is homogeen te beschouwen). Zie ook 1.8.2 op pag.61.

Laten we zeggen dat dat wegdeel een lengte dl heeft. Het veld verplaatst, door de kracht F , de lading over het wegdeel dl . Alleen de kracht F_l in de richting van de weg is werkzaam. De door het veld verrichte **arbeidsdeel** dW bij het verplaatsen van de lading is gelijk aan

$$dW = F_l dl$$



Figuur 2.3 De opdeling van de 'werk'lijn in delen met lengte dl

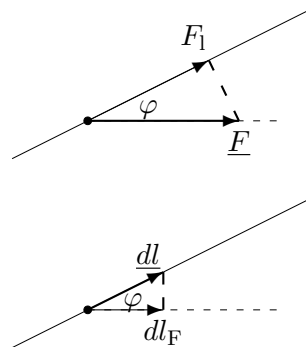
Arbeid en inwendig vectorprodukt Nu geldt voor de componenten van de vectoren:

- F_l is de component van de kracht in de richting van de weg:

$$F_l = F \cos(\varphi)$$

- dl_F is de component van de verplaatsing in de richting van de kracht:

$$dl_F = dl \cos(\varphi)$$



Figuur 2.4 Vectorprojectie op twee manieren: veldkracht in verplaatsingsrichting, of, verplaatsing in veldrichting.

Bij het vinden van vectoren 'in de richting van' een andere vector is de inwendig product notatie heel geschikt en handig.

We definiëren het **inwendig vectorprodukt**, tussen de vectoren \underline{F} en \underline{dl} met de hoek φ van de eerste naar de tweede:

$$\underline{F} \cdot \underline{dl} = F dl \cos \varphi = F_l dl = F dl_F$$

Door deze eigenschappen kan de door de kracht verrichtte **arbeidsdeel** dW op twee manieren worden uitgelegd:

1. *kracht in de verplaatsingsrichting* maal verplaatsing: $dW = F_l dl$;
2. *kracht* maal *verplaatsing in de krachtrichting*: $dW = F dl_F$;

Samengevat: het arbeidsdeel dW die de kracht \underline{F} uitoefent bij de verplaatsing langs \underline{dl} wordt in vectornotatie:

$$dW = \underline{F} \cdot \underline{dl}$$

Veldarbeid We passen het voorgaande toe op de kracht van een elektrisch veld op een lading. Als het elektrisch veld \underline{E} de lading Q verplaatst langs de wegdelen $d\underline{l}$, dan zal het veld door de Coulombkrachten vele arbeidsdeelen dW verrichten. De totale **veldarbeid** W (bijvoorbeeld in de condensator) verricht door het veld om een lading van de ene naar de andere elektrode te verplaatsen is de som van alle arbeidsdelen dW :

$$W = \int dW = \int \underline{F} \cdot d\underline{l}$$

waarbij de langgerekte \int de natuurkundige afkorting voor ‘som’ is en tegelijk de wiskundige betekenis van ‘integraal’ (= bij elkaar nemen) heeft. Daar de kracht evenredig is met de *veldsterkte* E van het veld en de lading Q : $\underline{F} = Q\underline{E}$, heeft ook de arbeid een evenredig verband met de veldsterkte (die verplaatst) en de lading (die wordt verplaatst)

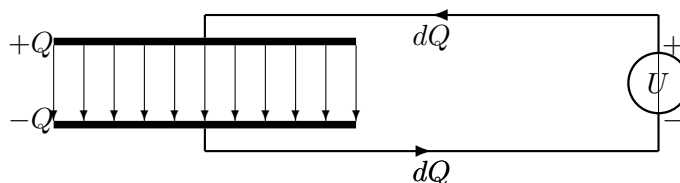
$$W = Q \int \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

De evenredigheidsconstante Q van de lading kan buiten de som (integraal) worden gehaald.

Spanning De verrichtte veldarbeid is evenredig met de verplaatste lading. Daarom wordt de **elektrische spanning** U (tussen 2 plaatsen) ingevoerd als de evenredigheidsconstante tussen veldarbeid en de verplaatste lading: *spanning is de elektrische veldarbeid per lading*:

$$U = W/Q = \int \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

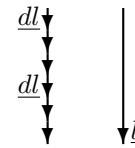
Voorbeeld Plaatcondensator



Figuur 2.5 Plaatcondensator (dwarsdoorsnede). Een van de platen mag geaard zijn, bijvoorbeeld om veiligheidsredenen, zonder dat het veld wordt beïnvloed.

Bepaal de veldsterkte E in een plaatcondensator, met plaatafstand l en plaatoppervlak A , waarover een spanning U staat. Bepaal ook de lading Q op de positieve plaat.

We nemen aan dat het veld E tussen de platen overal 'gelijk' is (homogeen). Als een (elektron)lading van de plaat met de laagste potentiaal, via de condensator, wordt gebracht naar de plaat met de hoogste potentiaal, dan is het potentiaalverschil tegen het veld in: $U = -\int \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\int (-E) dl_E$. In een homogeen veld is E een constante, die buiten de som (integraal) kan worden gehaald: $U = E \int dl_E$. De som (integraal) van alle deelverplaatsingen in de richting van het veld is niet anders dan de totale lengte van een veldlijn l , gelijk aan de plaatafstand, zodat:



Figuur 2.6 Som van lijndeel(vectoren) is lijn(vector).

$$U = El \quad E = U/l$$

Daaruit blijkt de *elektrische veldsterkte* een spanning per meter: V/m. De lading op de plaat volgt direct uit de wet van Gauss. Immers overal is de fluxdichtheid $D = \epsilon E = \epsilon U/l$. Uit de positieve plaat komt dus een totale flux $\Psi = DA = (\epsilon U/l)A$. Volgens Gauss is deze flux gelijk aan de lading op de plaat:

$$Q = \frac{\epsilon A}{l} U$$

Drukken we de veldsterkte uit in de lading, dan geldt binnen de plaatcondensator:

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}$$

Opg 2.1.3 * Een spanning is eigenlijk:

- A een arbeid
- B een potentiaal
- C een verschil in arbeid
- D een verschil in potentiaal

Opg 2.1.4 ** Een condensator heeft elektroden met een plaatafstand van $l = 1$ mm. Het veld in de condensator heeft de sterkte E bij een spanning over de condensator U .

- a Bereken E als $U = 5$ V. [Antw. $E = 5$ kV/m]
- b Bereken de maximaal toelaatbare spanning als gegeven is dat de condensator doorslaat bij een veld van $E = 20$ kV/m. [Antw. $U = 20$ V]

Opg 2.1.5 *** Voor de spanning U over een *niet ideale* condensator blijkt de formule $U = \bar{E}l$ te kunnen gelden, waarbij \bar{E} de *gemiddelde* veldsterkte in de condensator is en l de grootte van de plaatafstand. Daartoe moet(en):

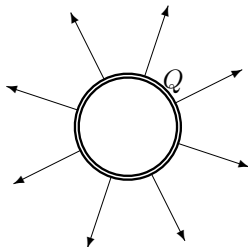
- A het veld homogeen zijn
- B het veld constant zijn
- C de platen op gelijke afstand zijn
- D de platen vlak en op gelijke afstand zijn

Potentiaal Experimenteel blijkt de spanning voor elke weg tussen twee plaatsen dezelfde uitkomst te geven—zoals het hoort. Tussen twee elektroden is dus één spanning, die door de *veldsterkte* en de afstand van de platen wordt bepaald. Nog preciezer: een **geleidend oppervlak** is een *potentiaalvlak* dat één potentiaalwaarde heeft op het gehele oppervlak. Spanning is het potentiaalverschil tussen twee potentiaalvlakken. Traditioneel wordt de ‘aarde’ gezien als een geleidend vlak ‘ver weg’ (positie ‘ ∞ ’), met een potentiaalwaarde 0. De *potentiaal* V_P in een punt P wordt (vergelijk paragraaf 1.8.3, pag. 66):

$$V_P = \int_P^\infty \underline{E} \cdot d\underline{l} = - \int_\infty^P \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Of een elektrode geaard is of niet, heeft géén invloed op de spanning of lading, maar wèl op de potentiaal.

Voorbeeld Bolcondensator Bepaal potentiaal V en veldsterkte E van het veld om een geleidende bolschil met straal R die op een spanning U staat ten opzichte van de aarde. Bepaal ook de lading Q op de bolschil.



Figuur 2.7 Bolcondensator (dwarsdoorsnede). Het oppervlak van de (geleidende) bol is de ene elektrode, de aarde (ver weg) de andere.

Een bollading kan worden opgevat als een puntlading Q in het midden van de bol, waarbij het veld naar buiten straalt vanaf het oppervlak. Immers, de *veldlijnen* zijn stralen, en de *potentiaalvlakken* zijn boloppervlakken. Volgens Gauss is de *flux* door ieder boloppervlak, ongeacht de straal r , gelijk aan de lading die binnen het oppervlak zit: Q . Daaruit volgt de *fluxdichtheid* D met behulp van de grootte van het potentiaaloppervlak, een boloppervlak met straal r , $A = 4\pi r^2$:

$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

De veldsterkte E is evenredig met de fluxdichtheid D volgens $D = \epsilon E$, zodat:

$$E = Q \frac{1}{4\pi \epsilon r^2} \quad (2.1)$$

Voor de potentiaal V van een punt op afstand r van het midden (dat kan dus ook $r = R$ op het geleidende boloppervlak zijn) integreren we het veld tot aarde:

$$V = - \int_\infty^P \underline{E} \cdot d\underline{l} = - \int_\infty^r E dr$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{\infty}^r dr/r^2 \\
&= - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-1}{r} \right]_{\infty}^r = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-1}{r} - \frac{-1}{\infty} \right) \\
&= - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{-1}{r} - 0 \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

In het bijzonder geldt voor de potentiaal 'van' de bol:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} \quad Q = (4\pi\epsilon R)U$$

Het veld uitgedrukt in de spanning wordt:

$$V = \frac{R}{r}U \quad E = \frac{V}{r}$$

Conclusie Een plaatcondensator, met plaatafstand l en plaatoppervlak A , waarover een spanning U staat heeft een lading Q op de positieve plaat en een homogeen veld E tussen de platen:

$$Q = \frac{\epsilon A}{l}U \quad E = U/l$$

Een bolcondensator met bolstraal R en potentiaal U_R tov. aarde heeft een lading Q :

$$Q = (4\pi\epsilon R)U_R$$

Het veld buiten de bolcondensator is radiaal; als functie van de afstand r tot het midden is potentiaal V en veldsterkte E_r :

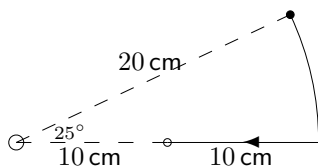
$$V = \frac{R}{r}U_R \quad E_r = \frac{V}{r}$$

Opg 2.1.6 * Een vierkant met zijden z heeft de achtereenvolgende hoekpunten A, B, C en D. In a zit een puntlading van $+q$, in c zit een puntlading van $-q$. Bepaal de uitwendige arbeid, nodig om een puntlading van $-2q$ vanuit het oneindig verre naar D te brengen. [Antw. $W = 0$ J]

Opg 2.1.7 *** Gegeven hetzelfde vierkant als in de vorige opgave. In B bevindt zich nu bovendien een bollading $+q$. Bepaal de uitwendige arbeid, nodig om vanuit oneindig ver een puntlading $-q$ naar D te brengen. [Antw. $W = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon z\sqrt{2}}$]

Opg 2.1.8 ** Twee puntladingen van $1 \mu\text{C}$ zijn 10 cm van elkaar. Bereken hoeveel arbeid het heeft gekost om de ladingen vanuit oneindig grote afstand zo dicht bij elkaar te brengen. Bereken daartoe de arbeid die het kost om een lading van $1 \mu\text{C}$ vanuit het oneindige tegen het veld in van de andere, vastgehouden, lading van $1 \mu\text{C}$, tot op 10 cm afstand te brengen. [Antw. $W = 0,09$ J]

Opg 2.1.9 ****

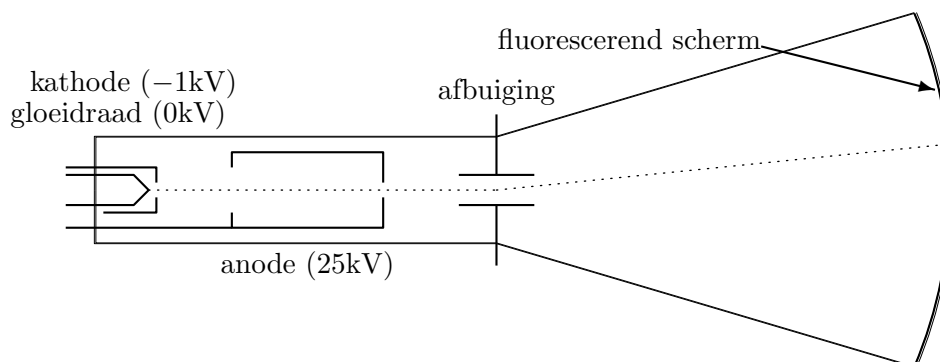


Bepaal de arbeid die nodig is om een puntlading van 10^{-8} C te verplaatsen, langs de getekende weg, in het veld van een bolvormige lading van een μC .

[Antw. $W = 0,45$ mJ]

2.1.2 Elektronenbuis

Principe elektronenbuis In principe bestaat een **elektronenbuis** uit een elektronenkanon, dat een elektronenstraal maakt, een afbuigingsysteem, dat de straal afbuigt, en een beeldscherm, dat de straal zichtbaar maakt. Het elektronenkanon begint met een gloeikathode: een



Figuur 2.8 Elektronenkanon met 25 kV versnelling. Min of meer symbolisch aangegeven zijn: de gloeikathode links, de anode met focusseerstelsel in het midden, een afbuiginrichting daarachter en het fluorescerende glazen beeldscherm rechts. Elektronen kunnen via de binnenkant van de buis terugvloeien naar de kathode

draad die op een kleine negatieve potentiaal staat, de **kathode**. Door de verhitting komen elektronen vrij. Die worden daar weggetrokken met een elektrisch veld veroorzaakt door de elektrische spanning tussen de kathode en een positieve 'plaat', de **anode**. Rond de kathode is een cilinder met kleine opening aangebracht, (Wehnelt-cilinder), die door de flinke negatieve spanning de elektronen naar één punt 'focus'seert en bundelt tot een elektronenstraal. De anode is zo gemaakt dat de versnelde elektronen er doorheen kunnen schieten. Ook zijn er extra voorzieningen getroffen om zoveel mogelijk elektronen door het gat(en) in de anode te krijgen; dat alles resulteert in het **elektronenkanon**.

De elektronen die de anode gepasseerd zijn kunnen op het fluorescerende **beeldscherm**, de voorkant van de glazen omhulling van het geheel, worden opgevangen. Daar veroorzaken zij een lichtverschijnsel: we

‘zien’ dan door het glas een elektron ‘inslaan’. Op weg naar het beeldscherm kan de baan van het elektron op verschillende manieren worden afgebogen. òf door elektrische *afbuiging*, òf door magnetische *afbuiging*.

Elektronvolt De spanning in een potentiaalvlak is, per definitie, gelijk aan de arbeid per lading die het veld verricht om vanaf dat vlak een positieve lading naar het nulpotentiaalvlak te brengen. Een elektron met lading $Q = -e$ wordt echter, omgekeerd, verplaatst van het potentiaalvlak van 0 V (kathode) tot dat van V (bijvoorbeeld, bij de anode is V maximaal 25 kV), omdat de negatieve lading wordt aangetrokken door de positieve anode. Het veld verricht daarbij een arbeid:

$$dW = -QdV = -(-e)V = eV$$

De arbeid om 1 elektron lading door 1 V te trekken is daarmee eV , wat wordt geschreven als 1 eV en uitgesproken als één **elektronvolt**; daarbij laat men ‘ eV ’ (lading \times spanning) als *eenheid van arbeid* staan:

$$1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{ J}$$

Elektron-bewegingsenergie De arbeid die het veld op het elektron heeft verricht wordt omgezet in bewegingsenergie van het elektron. Anders gezegd: de totale energie van het elektron zal, bij verwaarlozing van de thermische aanvangsenergie en mogelijke energieverliezen onderweg, steeds gelijk blijven. De bewegingsenergie heet **kinetische energie** E_k (grieks: ‘kineo’ is ‘bewegen’); ze is *klassiek* volgens de bewegingswetten van Newton (franse G. de Coriolis, 1829) bepaald door **massa** m en **snelheid** v :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Als een elektron op de geaarde kathode start is zijn energie nul. Dus zal steeds voor het elektron de **elektrische potentiële energie** $QV = -eV$ samen met de kinetische energie nul zijn. Uit dit energiebehoud volgt voor de omzetting:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV$$

Staat een anode op 1 kV , dan wordt de *elektronsnelheid* v : $v = \sqrt{2\frac{e}{m}10^3} = \sqrt{2 \cdot 1,76 \cdot 10^{11} \cdot 10^3} = 1,87 \cdot 10^7\text{ m/s}$.

Elektron-bewegingsenergie bij hoge snelheden In de TV-buis, met een anodespanning van 25 kV , gebeurt een dergelijke elektronversnelling, dat de snelheid $\sqrt{25} = 5$ keer $1,87 \cdot 10^7\text{ m/s}$ zou worden. Echter, een snelheid van $9,37 \cdot 10^7\text{ m/s}$ is zo dicht bij de *lichtsnelheid* c , dat we de

verzwaring van de massa door de snelheid moeten mee berekenen. Daartoe gebruiken we de preciezere uitdrukking voor bewegingsenergie; de **relativistische bewegingsenergie**. Einstein ontdekte dat de massa-energie *altijd* mc^2 is. Bewegingsenergie is massa-energie vermindert met massa-energie bij 'rust'; volgens Einstein is dus:

$$E_k = mc^2 - m_0c^2$$

m is de **relativistische massa**, dat wil zeggen de massa van het elektron zoals de waarnemer die ziet; de massa van het stilstaande elektron m_0 is de 'rustmassa' van het elektron. Einstein ontdekte ook:

$$m/m_0 = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

De zo gecorrigeerde snelheid na 25 kV versnelling wordt $9,06 \cdot 10^7$ m/s, dus 4% kleiner dan zonder massaverzwaring. Bij een buislengte van 20 cm wordt de vluchttijd ongeveer 2 ns. De snelheidsafhankelijke wortelfactor kan in verband worden gebracht met de verhouding tussen de bewegingsenergie 'volgens Newton' ($\frac{1}{2}mv^2$) en de bewegingsenergie 'volgens Einstein':

$$\frac{\frac{1}{2}mv^2}{E_k} = \frac{1}{2} \frac{v^2/c^2}{1 - \sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - (v/c)^2} \right)$$

Conclusie Een lading q krijgt, versneld tot snelheid v door een elektrische spanning U , een extra bewegingsenergie E_k :

$$E_k = qU$$

Bij niet te grote spanningen is $E_k \approx \frac{1}{2}mv^2$; algemeen, dus bij hoge spanningen, is $E_k = m_0c^2(1/\sqrt{1 - v^2/c^2} - 1)$

Opg 2.1.10 * Welke bewering is juist:

Een *elektronvolt* komt overeen met

- A een hoeveelheid potentiële energie
- B een hoeveelheid kinetische energie
- C een uitwendig verrichte arbeid
- D een door het elektrisch veld verrichte arbeid
- E alle beweringen zijn juist

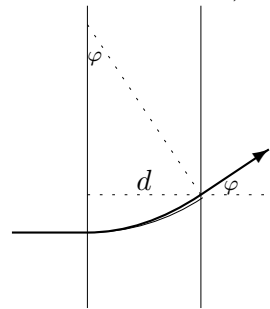
Opg 2.1.11 * Een elektron heeft een potentiaalverschil van +100 V doorlopen?

- a Welke energie heeft het dan in Joule? [Antw. $E = 1,6 \cdot 10^{-17}$ J]
- b Welke energie heeft het dan in eV? [Antw. $E = 100$ eV]

- Opg 2.1.12** ** Een gedeelte van de elektronen, die met lage snelheden door de kathode worden geëmitteerd, gaan door een klein gat in een plaat, die op 1 kV spanning tov de kathode staat.
- a Welke snelheid heeft het elektron wanneer het door het gat gaat?
[Antw. $v = 1,88 \cdot 10^7$ m/s]
- b Een tweede plaat, parallel aan de eerste en 20 cm daarvan verwijderd, heeft een potentiaal van -2 kV tov de kathode die op 0 V staat. Bereken hoeveel centimeter voorbij de anode een elektron door de negatieve plaat wordt gedwongen om te keren.
[Antw. 6,67 cm]

Elektrische afbuiging De Coulombkracht kan worden gebruikt om versnelde elektronen af te buigen. Dat vinden we bijvoorbeeld in de oscilloscoop (een samenstelling uit latijn: ‘oscillare’ is ‘slingeren’, en grieks: ‘scopeo’ is ‘bezien’), een instrument dat wordt gebruikt om elektrische signalen zichtbaar te maken op het beeldscherm. De horizontale afbuiging wordt dan ‘evenredig met de tijd’ gekozen. De verticale afbuiging wordt evenredig gekozen met de signaalspanning. De **afbuiging** zelf wordt verkregen door de elektronstraal een korte, vaste, afstand door een dwars elektrisch veld van de gewenste sterkte te laten lopen: een veld verticaal (voor de verticale afbuiging) en een veld horizontaal (voor de horizontale afbuiging—evenredig met de tijd—de tijdbasis).

De afbuigspanning geeft het elektron in de gewenste richting een versnelling, evenredig met de spanning. Door die versnelling komt het elektron eventjes in een parabolbaan: $y = cx^2$, waarin c evenredig is met de afbuigspanning. De afgebogen richting na een afstand d is de raaklijn aan de parabool, met rc: $y' = 2cx = 2cd$. Daaruit zien we dat de afbuiging evenredig wordt met c , dus met de afbuigspanning.



Figuur 2.9 Elektrische afbuiging: het elektron doorloopt een parabolsegment (vgl met het iets wijdere cirkelsegment

- Opg 2.1.13** **** Elektronen worden versneld met behulp van een elektrisch potentiaalverschil van U_0 . Ze worden dan, met de bewegingsenergie eU_0 , precies tussen twee horizontale platen horizontaal ingeschoten. De onderste plaat is geaard, de bovenste staat op een spanning $-V_1$. De afstand van de platen is y , de lengte van de platen is x . We bepalen hoe groot de potentiaal V_1 moet worden gekozen ten opzichte van de spanning U_0 om de elektronen precies langs de rand van de platen te kunnen afbuigen?



- a Welke arbeid wordt door het verticale veld uitgeoefend bij het afbuigen?
[Antw. $W = \frac{1}{2}eV_1$]
- b Bepaal de verticale eindsnelheid bij het verlaten van de platen met behulp van 'veldarbeid wordt bewegingsenergie'.
[Antw. $v = \sqrt{eV_1/m}$]
- c Bepaal de tijd die nodig is voor de afbuigingelektisch uit de verticale eindsnelheid
[Antw. $t = y/v = \sqrt{my^2/eV_1}$]
- d Welke horizontale bewegingsenergie heeft het elektron?
[Antw. $E_k = eU_0$]
- e Bepaal de tijd die nodig is om tussen de platen door te lopen uit de horizontale beginsnelheid
[Antw. $t = x/v_0 = \sqrt{mx^2/2eU_0}$]
- f Welk verband is er tussen de horizontale en verticale spanning?
[Antw. $\frac{1}{2}V_1/U_0 = (y/x)^2$]

2.1.3 Kracht tussen bolladingen 1

Wet van Coulomb In 1769 vond de schot J. Robinson experimenteel dat de kracht tussen *bolladingen* praktisch omgekeerd kwadratisch evenredig is met de afstand tussen de middelpunten. In 1770 vulde de brit Cavendish dat aan met evenredigheid met de grootte van de ladingen. In 1785 publiceerde de fransman C.A. de Coulomb de **wet van Coulomb**: de kracht F_C tussen bollading Q_1 en bollading Q_2 , met middelpuntsafstand r_{12} , is, onafhankelijk van de grootte van de bollen:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}$$

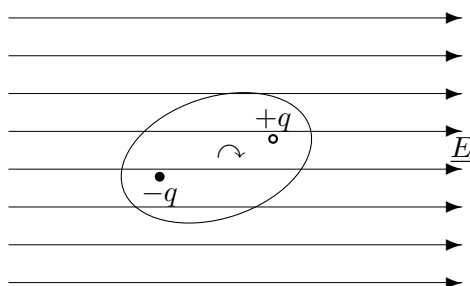
Veldsterkte en Coulombkracht De lijn waarop de de bollen liggen is een symmetrieas, zodat de Coulombkrachtbollading langs die lijn (x-as) ligt. Lading Q_2 heeft een veld ter sterkte E (zie vgl.2.1), waarvan alleen de fractie x/r langs de x-as ligt:

$$E_x = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \frac{x}{r};$$

r is de afstand tot het middelpunt van Q_2 en x die afstand langs de -x-as. Bolstraal R_2 speelt geen rol: bollading Q_2 kan als puntlading worden opgevat. Het veld is niet homogeen op bollading Q_1 , omdat ieder deel dQ_1 van de lading op een andere afstand ligt. De deelCoulombkracht $dF_C = dQ_1 E_x$ zal dus variëren. Gemiddeld zal x/r^3 gelijk moeten zijn aan $1/r_{12}^2$. Dat dat zo is zullen we later (pag. 198) aantonen.

2.2 Dipool in elektrisch veld

2.2.1 Coulombkrachtmoment op dipool

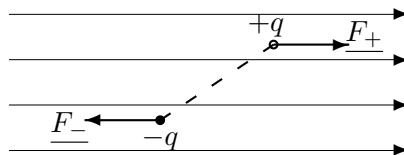


Figuur 2.10 Krachten op een 'neutraal' voorwerp in een elektrisch homogeen veld tgv een 'geïnduceerde' dipool: aan de positieve kant ontstaat negatieve lading.

Elektrische dipool Als een voorwerp neutraal is, totale lading $Q = 0$, dan kan een homogeen elektrisch veld geen netto kracht uitoefenen, omdat $F = QE = 0$ (zie figuur 2.10). Het neutrale voorwerp zal dus *niet verplaatsen* in een elektrische veld. Als het voorwerp echter elektrische ladingen bevat, positieve en negatieve ladingen die elkaar opheffen maar aan verschillende kanten van het voorwerp zijn, dan kan er wel een netto *moment van krachten* zijn. Dat merken we, doordat het neutrale voorwerp in een elektrisch veld kan *draaien* (zich richt). Denk bijvoorbeeld aan de haren die op de kam 'overeind' gaan staan. Het eenvoudigste geval van zulk een elektrisch neutraal voorwerp waarin toch ladingen aanwezig zijn is de elektrische dipool.

Coulombkracht op dipool

De **elektrische dipool** bestaat uit twee ladingen, de ene met lading $-q$, de andere met lading $+q$ op afstand a (de afstand-vector is van $-q$ naar $+q$). In een *homogeen* elektrisch veld met sterkte E ondervindt de gehele dipool twee krachten. De ene kracht grijpt aan op (het ladingszwaartepunt van) de positieve lading, de andere op de negatieve lading:

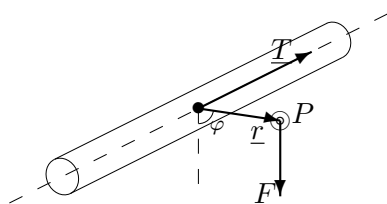


Figuur 2.11 Coulombkrachten op een elektrische dipool in een elektrisch veld: tegengestelde krachten op tegengestelde ladingen, waardoor de netto kracht nul is, maar een netto krachtmoment blijft.

$$\begin{array}{rcl} \underline{F}_+ & = & +q\underline{E} \\ \underline{F}_- & = & -q\underline{E} \\ \hline \underline{F} & = & 0 \end{array}$$

Conclusie *In een homogeen elektrisch veld voelt een elektrische dipool géén netto kracht. Echter, in een inhomogeen veld is een netto-kracht wèl mogelijk.*

Krachtsmoment vector Als een kracht aangrijpt in een punt P van het voorwerp dat vastverbonden is met een vast draaipunt, dan zal het voorwerp kunnen gaan draaien om dat draaipunt. We zeggen dan: de kracht heeft een **krachtsmoment** ten opzichte van het draaipunt. We kunnen het krachtsmoment ten opzichte van het draaipunt (dat kan ook het zwaartepunt zijn) als een vector aangeven. De vector \underline{r} , die gaat van het draaipunt náár het *aangrijpingspunt* van de kracht, noemen we de (vector) **arm** van de kracht. We denken ons in, dat de arm star is en met een kogelgewricht bevestigd aan het draaipunt (zie fig. 2.12).



Figuur 2.12 Draaias, met: arm \underline{r} , kracht \underline{F} en krachtsmoment \underline{T} . Merk op, dat de moment-richting die is van een rechts-draaiende schroef (kurketrekker).

Het krachtsmoment \underline{T} (van het engelse of franse ‘Torque’=‘koppel’) wordt de richting meegegeven van de (eventueel denkbeeldige) draaias waaromheen de kracht het voorwerp doet draaien. Op die manier is een krachtsmoment een vector geworden, waarvan we ook de verschillende componenten kunnen bekijken. De **eenheid van krachtsmoment** is Nm, dus is gelijk aan de *eenheid van energie* $J = \text{Nm}$.

De grootte van de momentvector is gelijk aan de grootte van het moment: arm maal kracht-loodrecht-op-de-arm. Immers, alleen de component van de kracht *loodrecht op de arm* veroorzaakt een draaiing; de component van de kracht langs de arm kan geen draaiende werking uitoefenen daar het draaipunt die kracht opvangt (mogen we hopen!).

Krachtsmoment en uitwendig vectorprodukt Het krachtsmoment kan wiskundig worden beschreven door het uitproduct van twee vectoren:

$$\underline{T} = \underline{r} \times \underline{F}$$

Het **uitwendig vectorprodukt** $\underline{r} \times \underline{F}$ is als volgt gedefiniëerd:

1. De *richting* van het vectorprodukt is loodrecht op het vlak door de beide vectoren, arm \underline{r} en kracht \underline{F} ; daarbij wijst het in de richting die een rechtsdraaiende schroef ('kurketrekkerregel') gaat als die, over de kòrtste hoek, van \underline{r} naar \underline{F} wordt gedraaid.

2. De *grootte* is $rF \sin \varphi$, waarbij φ de hoek is tussen \underline{r} en \underline{F}

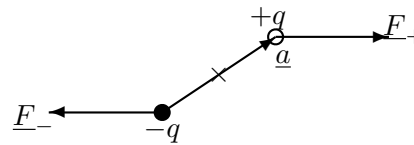
Hierdoor komt de richting van het krachtmoment overeen met de richting van de rechtsdraaiende schroef waarop we dat krachtmoment zetten. Verder komt de grootte van het krachtmoment overeen met het produkt van arm en kracht-loodrecht-op-de-arm. Immers $|\underline{r} \times \underline{F}| = rF \sin \varphi = r(F \sin \varphi)$

Coulombkoppel op dipool

Op een elektrische dipool, met twee (punt)ladingen, werken in een *homogeen* elektrisch veld \underline{E} twee tegengestelde *Coulombkrachten*. Die krachten werken meestal niet door het midden, zodat er een krachtmoment t.o.v. het midden van de dipool is.

Beide ladingen hebben een arm $\frac{1}{2}\underline{a}$ t.o.v. het midden van de dipool, zodat de krachtmomenten zijn:

$$\begin{aligned} \underline{T}_+ &= +\frac{1}{2}\underline{a} \times +q\underline{E} \\ \underline{T}_- &= -\frac{1}{2}\underline{a} \times -q\underline{E} \\ \hline \underline{T} &= +1\underline{a} \times q\underline{E} \\ \underline{T} &= q\underline{a} \times \underline{E} \end{aligned}$$



Figuur 2.13 Elektrische dipool met draaipunt in het midden van de arm \underline{a} . Op de ladingen de krachten \underline{F}_- en \underline{F}_+ .

Tezamen geven de Coulombkrachten een **Coulombkoppel** op de dipool.

Dipoolmoment Uit de formule voor het krachtmoment van het Coulombkoppel op de dipoolladingen blijkt dat bepalend voor het moment is de vector $q\underline{a}$, het **elektrische dipoolmoment** \underline{p}_e van de dipool:

$$\boxed{\underline{p}_e = q\underline{a}}$$

Merk op, dat hierbij de lading q positief is, en dat de arm van de dipool gaat van negatieve naar positieve lading (zie figuur 2.14a, pag 89). Dus ook het dipoolmoment \underline{p}_e is een vector die een richting heeft van de negatieve naar de positieve lading. De **eenheid van dipoolmoment** is Cm. Praktisch moeten we denken aan dipoolmomenten bij moleculen in



a Dipool: de ladingen $-q$ en $+q$ op afstand a vormen samen het dipoolmoment $p_e = qa$.

b Krachtmoment: het dipoolmoment p_e ondervindt in het veld E een krachtmoment $T = p_e \times E$.

Figuur 2.14 Een elektrische dipool in een homogeen elektrisch veld met sterkte E : dipoolmoment p_e en krachtmoment T .

de orde van 10^{-30} Cm. Tenslotte kan het moment van het *Coulombkoppel* rechtstreeks in het dipoolmoment worden uitgedrukt:

$$\underline{T} = \underline{p}_e \times \underline{E}$$

Vergelijk dit met de elektrische kracht op een puntlading: $\underline{F} = Q\underline{E}$: kracht wordt krachtmoment, lading wordt dipoolmoment.

Conclusie Een elektrisch veld oefent op een elektrische (punt)dipool een (netto) krachtmoment uit ter grootte: $\underline{T} = \underline{p}_e \times \underline{E}$

Verplaatsen draaipunt Neem nu eens aan, dat het draaipunt van de dipool niet het midden is, maar de negatieve lading. Het krachtmoment wordt dan alleen bepaald door het moment van de Coulombkracht $q\underline{E}$ op de positieve lading $+q$ met de arm \underline{a} ten opzichte van het draaipunt. Het krachtmoment wordt daarmee $qa \times \underline{E} = \underline{p}_e \times \underline{E}$. Maar dan is het nieuwe krachtmoment dus precies gelijk gebleven aan het krachtmoment ten opzichte van het midden. Dit is een bijzonder geval van de algemene regel dat, bij het evenwijdig verplaatsen van de draaias, het moment niet verandert *mits de netto kracht nul is*. Daaruit concluderen we, dat de positie van de werkelijke draaias niet gelijk hoeft te zijn aan de natuurlijke draaias van het koppel *zolang die assen maar evenwijdig zijn*. In geval de werkelijke draaias ietsje scheef staat, ontstaat een wringing: alleen de component van het krachtmoment langs de echte draaias telt voor het draaien rond die as.

Opg 2.2.1 * Een griesmeelkorreltje heeft een elektrisch dipoolmoment in de $+x$ richting. Een elektrisch veld staat in de $+y$ richting waardoor het korreltje een dipoolmoment koppel ondervindt. Het koppel staat in de richting:

- A $+y$
- B $-y$
- C $+z$
- D $-z$

Opg 2.2.2 *** De bewering dat het koppel \underline{T} op een elektrische dipool \underline{p}_e in een elektrisch veld \underline{E} gelijk is aan $\underline{p}_e \times \underline{E}$ geldt:

- A alleen in een homogeen veld
- B in een willekeurig veld voor een willekeurige dipool
- C in een willekeurig veld voor een dipool waarvan de arm klein is ten opzichte van de eventuele inhomogeniteit van het veld

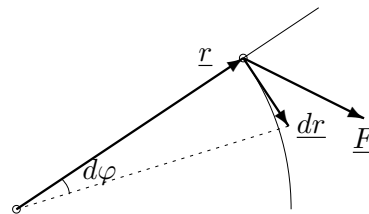
Opg 2.2.3 *** Een elektrische dipool met sterkte $5 \mu\text{Cm}$ ligt langs de x -as op de positie $x = 1 \text{ m}$ in een elektrisch veld in de x -richting waarvan de veldsterkte als functie van x verandert als $x \text{ V/m}$.

- a Wat is het koppel op de dipool? [Antw. $T = 0$]
- b Bereken de netto kracht op de dipool. [Antw. $F = 5,0 \mu\text{N}$]

Draaiarbeid Bij het draaien van een massa om een draaipunt onder invloed van een kracht wordt draaiarbeid verricht door die kracht. Bij een kleine verdraaiing verplaatst het aangrijpingspunt van de kracht, waardoor de arm-vector ‘verandert’ met een vectordeel \underline{dr} dat loodrecht op de arm \underline{r} staat. Noem de hoek tussen arm \underline{r} en kracht \underline{F} gelijk φ .

De component van de kracht die loodrecht op de arm staat, in de verplaatsingsrichting, is $F \sin \varphi$. De kracht verricht bij het draaien, het **draaiarbeidsdeel** dW , waarbij we mogen aannemen dat de kracht niet is veranderd, mits de verdraaiing maar klein is. Dus:

$$dW = \underline{F} \cdot \underline{dr} = F dr \sin \varphi$$



Figuur 2.15 Terwijl de kracht F een massa verplaatst over dr , zorgt de arm van het krachtmoment voor de hoekverdraaiing $d\varphi$.

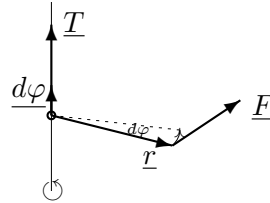
De verplaatsing van het aangrijpingspunt dr is langs een stukje cirkelboog met booglengte $dr = r d\varphi$, zodat in goede benadering

$$dW = F(r d\varphi) \sin \varphi = rF \sin \varphi d\varphi$$

In de laatste term herkennen we de grootte van het krachtmoment $T = rF \sin \varphi$ en de grootte van de *hoekverdraaiing* $d\varphi$. De arbeid kan dus rechtstreeks worden uitgedrukt in krachtmoment en hoekverdraaiing:

$$dW = T d\varphi$$

Aangezien het krachtmoment een vector is, ligt het voor de hand ook de **hoekverandering** als een vector $d\varphi$ te zien. De vector $d\varphi$ is gericht langs de draaias (volgens de kurketrekkerregel) met als lengte de hoek van draaien. Zo wordt de draaiarbeid van een *krachtmoment* gelijk aan het inwendige vectorproduct tussen het krachtmoment en de verdraaiing:

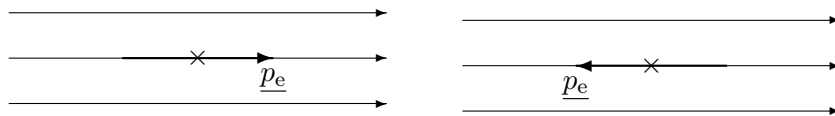


Figuur 2.16 Krachtmoment \underline{T} en hoekverdraaiing $d\varphi$ als vectoren langs de draaias met de richting bepaald door de 'kurketrekker' beweging.

$$dW = \underline{T} \cdot d\varphi$$

Vergelijk dit met de arbeid van verplaatsen door een kracht $dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$.

Stabiele en labiele dipoolstand



a *stabiel*: de dipool draait naar de stabiele stand toe.

b *labiel*: de dipool draait van de instabiele stand weg.

Figuur 2.17 Stabiele en labiele of instabiele stand van een dipool in een elektrisch veld.

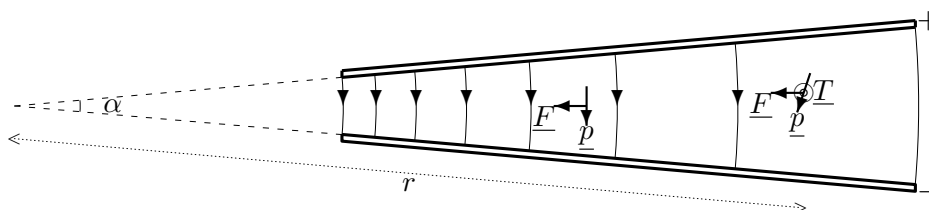
Als een dipool met het veld is meegericht, dan zal iedere verdraaiing de dipool doen terugdraaien naar de *stabiele* stand; die stand is **stabiel**. Het elektrische veld verricht overigens de draaiarbeid. Omgekeerd, als de dipool precies tegen het veld in is gericht, dan zal iedere verdraaiing de dipool verder doen wegdraaien van die *instabiele* stand, die stand is **labiel**. In het algemeen wordt de dipool naar de stabiele stand getrokken door het veld. Tengevolge van gebrek aan wrijving kan de dipool door de stabiele stand 'heenslingeren', maar uiteindelijk zal de dipool zich richten naar het veld.

Draaiarbeid in elektrisch veld Laat de richting van de dipool worden gemeten ten opzichte van het elektrische veld in richting x . Draait de dipool van de stabiele stand weg, dan moeten wij, tegen het veld in, arbeid verrichten. Omgekeerd, als de dipool naar de stabiel stand draait verricht het veld arbeid. Hoeveel draaiarbeid W is dat? De dipool is zó klein, veronderstellen we, dat het veld als homogeen is op te vatten. Dan

2.2.2 Sorteerplassen

Draaien door influentie Sommige materialen zijn gevoelig voor elektrische velden: ze worden in het veld *geïnfluenceerd* (in-fluentie komt van het latijnse ‘fluere’, dat is nederlands ‘stromen’ of ‘vloeien’; in-fluentie = in-vloed). Staafjes van zulk materiaal kunnen door een elektrisch veld gericht worden. Zo kan je een wanordelijke hoopje metalen staafjes, zoals spijkers, (metaal is immers een geleider, dus vol elektronen die op velden kunnen reageren) netjes allemaal evenwijdig krijgen door ze in een elektrisch veld te zetten. In zo’n staafje worden de elektronen tegen het veld in naar de ene kant gedreven, zodat het ene uiteinde negatief wordt en het andere positief: het **influentie** (beïnvloeding) verschijnsel. Het staafje krijgt zo een geïnfluenceerd elektrisch *dipoolmoment* p_e . Bijgevolg zal het in het elektrische veld E een koppel T ondervinden ter grootte $\underline{T} = \underline{p}_e \times \underline{E}$, waardoor het in de richting van het veld zal draaien.

Verplaatsen door influentie In een homogeen veld zullen de staafjes



Figuur 2.18 Sorteerplassenstelsel dat een inhomogeen elektrisch veld maakt waarmee de ladingen worden gericht en getransporteerd

alleen maar draaien. Is echter het veld *niet homogeen* (ten opzichte van de lengte van de staafjes), dan zal de kracht op de positieve lading verschillen van de kracht op de negatieve lading. Er is dan, naast het koppel dat het staafje doet draaien, ook nog een nettokracht die de staafjes doet verplaatsen. Een voorbeeld van een inhomogeen veld is in de figuur aangegeven. Dan hangt de veldsterkte af van de positie. De veldlijnen zijn cirkelbogen met een straal die wordt bepaald door de stand van de twee *sorteerplaten*. Als de straal r is en de openingshoek van het systeem α radialen, dan is de cirkelboog $r\alpha$ lang. De veldsterkte is de spanning tussen de platen gedeeld door de lengte van de veldlijn:

$$E = \frac{U}{r\alpha}$$

Wanneer de dipool langs een veldlijn ligt zullen de richtingen van de Coulombkrachten op de positieve en negatieve lading iets verschillen (door de kromming van de veldlijn). De hoekverandering is ongeveer

$\Delta\varphi = a/r$. Daardoor blijft er een nettokracht over die naar het middelpunt van de veldlijncirkel is gericht. Die radiale veldcomponent wordt bepaald door de afstand a van de dipooladingen:

$$E_r = \frac{a}{r} E$$

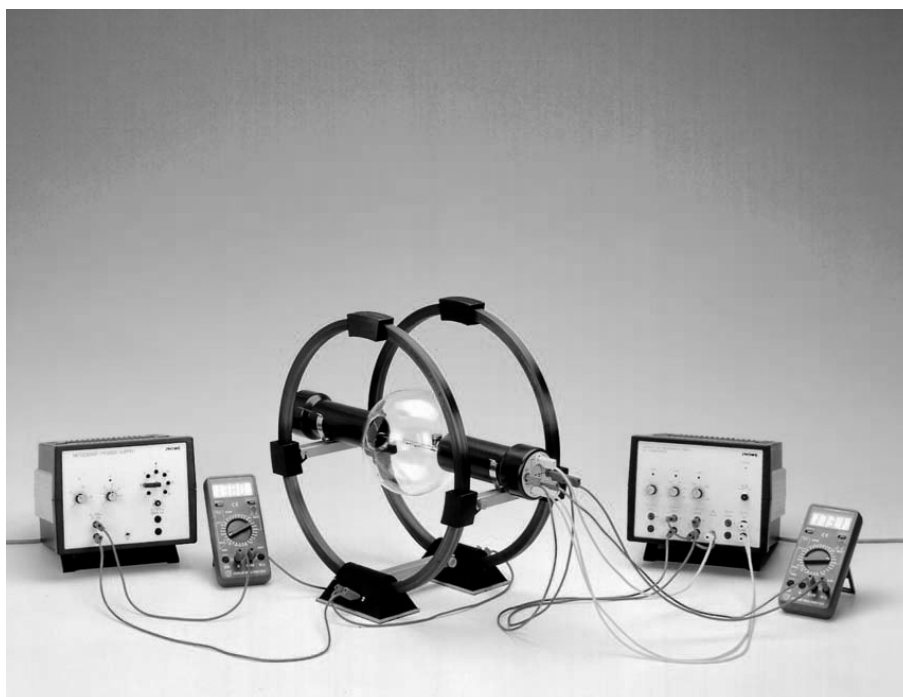
De nettokracht (van beide ladingen) wordt dan:

$$F_r = 2qE_r = \frac{2pU}{\alpha r^2}$$

evenredig met het geïnduceerde dipoolmoment p en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de veldlijnstraal r . Dus: in de hoek waar de straal kleiner is en het veld sterker, is de kracht op de dipolen groter. De dipolen worden door de smalle opening gedreven, loodrecht op de veldlijnen, maar wel gelijkgericht: evenwijdig aan de veldlijnen.

2.3 Bewegende lading in magneetveld

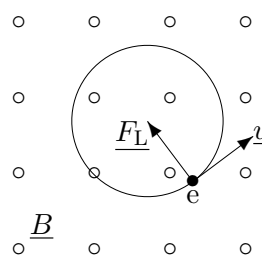
2.3.1 Lorentzkracht op vrije lading



Figuur 2.19 Proefopstelling waarbij met een paar Helmholtzspoelen een homogeen magneetveld wordt gemaakt, om de cirkelvormige baan van elektronen in vacuüm aan te tonen.

Lorentzkracht op vrij elektron

Als we elektronen een homogeen magneetveld inschieten, exact loodrecht op het veld, dan blijkt de bewegingsrichting (dat is de snelheidsrichting) te worden omgeboogen zodat de baan een cirkel wordt. De afbuigende **Lorentzkracht** \underline{F}_L blijkt enerzijds evenredig met de *lading* q en de snelheid v , voorzover dwars op het magneetveld, van het deeltje, anderzijds evenredig met de magnetische fluxdichtheid B .



Figuur 2.20 Cirkelbaan van een linksom bewegend elektron in een naar voren staand magneetveld.

Let er op, dat het *teken* van de lading van invloed is op de richting van de kracht. Al deze eigenschappen van de Lorentzkracht worden wiskundig uitgedrukt met het uitwendig vectorprodukt. De kracht van het magnetisch veld met fluxdichtheid \underline{B} op een vrije lading q met snelheid v is de Lorentzkracht \underline{F}_L (J.C. Maxwell, 1861):

$$\underline{F}_L = q\mathbf{v} \times \underline{B}$$

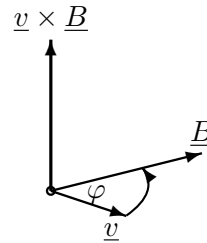


a negatieve lading: kracht omlaag.

b positieve lading: kracht omhoog.

Figuur 2.21 Lorentzkracht \underline{F}_L van een magneetveld B naar rechts op een positieve resp. negatieve lading die naar voren beweegt met snelheid v .

Vectorprodukt Het *uitwendig produkt* $\underline{v} \times \underline{B}$ heeft grootte $vB \sin \varphi$. Merk op, dat als \underline{v} rechtsonder naar \underline{B} draait, de sinus negatief is. Door het teken van de hoek mee te rekenen, bij het bepalen van de grootte van het uitwendig produkt, is het niet meer nodig om de kurketrekkerregel toe te passen—wel makkelijk natuurlijk. Uit de vergelijking voor de Lorentzkracht blijkt voor de eenheden: $N = C(m/s)T = AmT$; dus de *eenheid van magnetische fluxdichtheid* is $T = N/mA$. Met $Nm = J = VAs$ in elektrische eenheden: $T = Vs/m^2$.



Figuur 2.22 Kurketrekkerregel: draai van \underline{v} naar \underline{B} over de kortste hoek, dan gaat de kurketrekker in de richting van het uitwendig vectorprodukt.

Opg 2.3.1 * Een *elektron* beweegt van de positieve naar de negatieve x-as, een magneetveld loopt van de positieve naar de negatieve y-as. De Lorentzkracht staat in de richting:

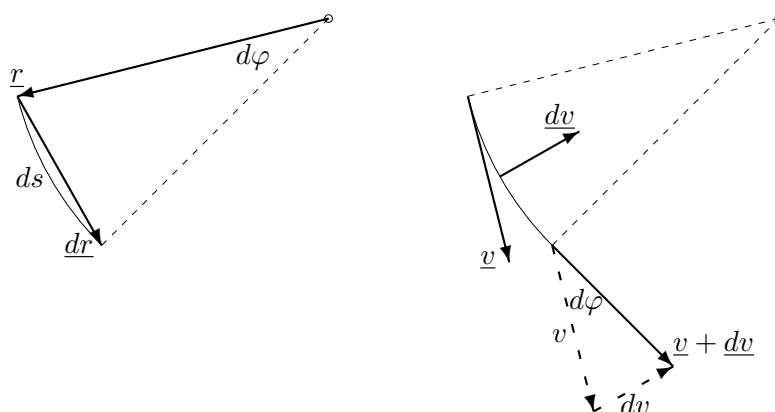
- A +x
- B +y
- C +z
- D anders

Centripetale kracht Doordat de *Lorentzkracht* loodrecht op de bewegingsrichting staat is de Lorentzkracht een centripetale (dwz ‘naar het centrum gerichte’) kracht, die een **centripetale versnelling** \underline{a}_r geeft:

$$\underline{a}_r = \frac{F_L}{m} = \frac{q}{m} \underline{v} \times \underline{B}$$

Een kracht loodrecht op de verplaatsing verricht geen arbeid, zodat de bewegingsenergie $\frac{1}{2}mv^2$ constant blijft. De *grootte* van de snelheid blijft constant, maar de *richting* van de snelheid verandert wel degelijk. Is de versnelling constant (hier dus) dan is een *cirkelbaan* het gevolg.

Hoeksnelheid en hoekversnelling Bij draaiende bewegingen, in dit geval in een cirkelbaan, is het praktischer om niet te werken in een (stilstaand) rechthoekig assenstelsel, maar om alles te bekijken in *poolcoördinaten*: de positie wordt daarbij uitgedrukt in de afstand r , tot het midden, en in de hoek φ , van de x-richting naar de voerstraal (van cirkelmidden naar punt).



a ‘Positiedriehoek’.

b ‘Snelheidsdriehoek’.

Figuur 2.23 Positie, snelheid en versnelling bij draaien op afstand r rond een vast punt. De ‘positiedriehoek’ en ‘snelheidsdriehoek’ zijn gelijkvormig met tophoek $d\varphi = \omega dt$, lange zijden r en v , korte zijden $ds = v dt = r d\varphi$ en $dv = a_r dt = v \varphi$.

Stel dat we een draaiende beweging hebben met **hoeksnelheid** ω en **baanstraal** r . Aan de hand van de gelijkvormigheid van ‘positiedriehoek’ en ‘snelheidsdriehoek’ (zie figuur 2.23) geldt voor de snelheid v (langs de baan of tangentiëel), respectievelijk de **radiale versnelling** a_r (‘radiaal’ is: langs de straal, en, ‘normaal’ is: loodrecht op de baan)

$$v = \omega r$$

$$a_r = \omega v = \omega^2 r$$

Bij een cirkelbeweging is dus de hoeksnelheid evenredig met de radiale (centripetale) versnelling: $\omega = a_r/v$; hoe groter de radiale versnelling, hoe groter de hoeksnelheid. De cirkelstraal is omgekeerd evenredig met de hoeksnelheid: $r = v/\omega = v^2/a_r$, dus: hoe groter de radiale versnelling, hoe kleiner de straal.

Hoeksnelheid en baanstraal We zagen dat een lading die met constante snelheid beweegt in een loodrecht erop staand magneetveld een cirkelbaan gaat beschrijven. Uitgaande van de Lorentzkracht $\underline{F}_L = q\underline{v} \times \underline{B}$ wordt in dat geval de radiale kracht $F_r = qvB$, en dus de radiale versnelling $a_r = qvB/m$. De hoeksnelheid ω van het draaien in de cirkelbaan, $\omega = a_r/v$, en de baanstraal r , $r = v/\omega$, volgen daaruit:

$$\omega = \frac{q}{m} B \quad r = \frac{m v}{q B}$$

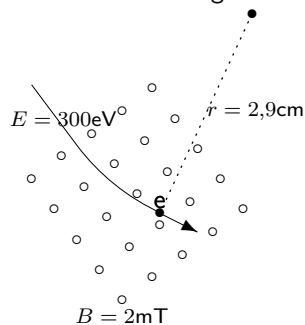
Dat komt overeen met wat te verwachten was:

een grotere snelheid is moeilijker om te buigen \rightarrow grotere r
 een sterker veld geeft grotere ombuigkracht \rightarrow kleinere r

Conclusie Een bewegende lading in een magneetveld B ondervindt een kracht loodrecht op de snelheid die leidt tot cirkelvormige banen. De verhouding van lading q en massa m van de lading bepalen baanstraal r en hoeksnelheid ω :

$$r = \frac{m v}{q B} \quad \omega = \frac{q}{m} B$$

Voorbeeld Elektronencirkelbaan Bereken de snelheid en de straal van de cirkel die een elektron krijgt als het is versneld met 300 V en in een magneetveld geschoten met een magnetische fluxdichtheid van $B = 2 \text{ mT}$



Figuur 2.24 Baan van een met 300 V versneld elektron in een magnetisch veld van 2 mT.

Elektronen ($q = -e$) die een 300 V spanning hebben doorlopen hebben bewegingsenergie verkregen $\frac{1}{2}mv^2 = 300 \text{ eV}$. Als die dan een magnetische veld binnenkomen met een magnetische fluxdichtheid $B = 2 \text{ mT}$ dan kunnen we een baanstraal $r = 2,9 \text{ cm}$ berekenen. Immers:

$$v = \sqrt{2 \cdot 300 \frac{e}{m}}$$

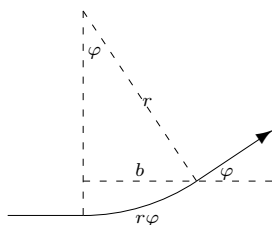
$$r = \frac{m v}{e B} = \sqrt{\frac{m}{e} \frac{\sqrt{600}}{B}}$$

Voor elektronen is $m/e = 9,110 \cdot 10^{-31} / 1,602 \cdot 10^{-19} = 5,686 \cdot 10^{-12}$, zodat $r = 2,385 \cdot 10^{-6} \sqrt{600} / 2 \cdot 10^{-3} = 2,92 \cdot 10^{-2}$

- Opg 2.3.2 **** Hoe sterk moet het magneetveld zijn om elektronen een omwenteling te laten maken in 10^{-8} s? [Antw. $B = 3,6$ mT]
- Opg 2.3.3 **** Een éénwaardig ion wordt versneld mbv 1 kV spanningsverschil, en geschoten in en homogeen magneetveld dwars op haar bewegingsrichting. Als de magnetische fluxdichtheid 0,1 T is, en het ion een cirkelbaan krijgt met 0,6 m diameter, bereken dan de ionmassa. [Antw. $m = 7,2 \cdot 10^{-26}$ kg]
- Opg 2.3.4 ****** In een cyclotron draaien protonen rondjes, met toenemende straal r , in een magneetveld van 0,5 T. Bij iedere halve omwenteling worden ze versneld (in enkele cm's) door een potentiaalverschil van 20 kV.
 a Bepaal de protonen energie bij $r = 1$ m. [Antw. $E = 12$ MeV]
 b Hoeveel omwentelingen zijn er nodig geweest om tot die baan te komen? [Antw. 300 omwentelingen]

Magnetische afbuiging Toepassing van de Lorentzkracht vinden we bij de *magnetische afbuiging*, bijvoorbeeld veel toegepast bij beeldschermen (TV-buis, monitor). Bij het beeldscherm moet de elektronenstraal precies gericht kunnen worden op het gewenste gedeelte van het scherm (pixel). Daar zit een fluorescerende stof die op gloeit als het door de elektronenstraal wordt getroffen. Met behulp van twee, regelbare, elektromagneetvelden (één horizontaal veld voor de verticale afbuiging, en één verticaal veld voor de horizontale afbuiging) dwars op de as van de buis kan de elektronenstraal iedere gewenste afbuiging worden gegeven. Helaas is de afbuiging voor grotere hoeken niet evenredig met het veld.

Voorbeeld Beeldscherm sturing Bereken de magnetische *fluxdichtheid* B die nodig is om met 25 keV versnelde elektronen een afbuighoek van 30 graden te geven als het magneetveld een breedte van 1 cm heeft.



Figuur 2.25 Magnetische afbuiging: cirkelsegment.

In het afbuigende magneetveld doorloopt het elektron een deel van een cirkel met straal $r = mv/eB$. De sin van de afbuighoek φ na de breedte b is evenredig met B :

$$\sin \varphi = b/r = ebB/mv$$

Voor een afbuiging van 30° bij een magnetische veldbreedte van $b = 1$ cm volgt $r = 0,01/\sin 30^\circ = 2$ cm. Bij 25 kV is de snelheid $v = 9,06 \cdot 10^7$ m/s (zie pag. 83). Daaruit volgt een afbuigend veld met fluxdichtheid $B = (m/e)(v/r) = 5,69 \cdot 10^{-12}(4,53 \cdot 10^9) = 26$ mT.

Opg 2.3.5 ** Een van links komende elektronenstraal (+x-richting) moet omhoog worden afgebogen (+y-richting) d.m.v. magnetische afbuiging.

a Moet het magneetveld naar voren of naar achteren staan?

[Antw. Het magneetveld staat in de +z-richting]

Het magneetveld (tussen twee poolschoenen) heeft in de x-richting een diepte van 1 cm, en wordt homogeen verondersteld met dichtheid B . We schieten de elektronen met een snelheid van $3 \cdot 10^7$ m/s op het midden van het veld.

b *** Hoe groot moet r worden gemaakt teneinde bijna 90° af te kunnen buigen? [Antw. $r = 1$ cm]

c Hoe groot moet B worden gemaakt teneinde bijna 90° af te kunnen buigen? [Antw. $B = 17,1$ mT]

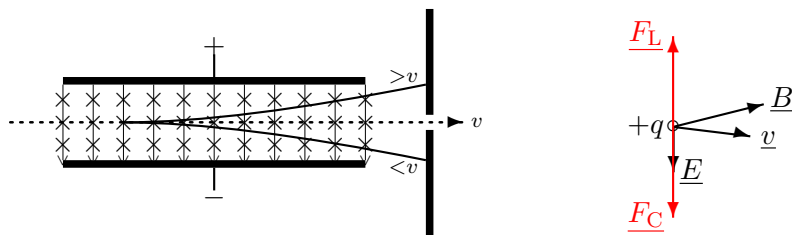
Opg 2.3.6 *** Een stroom negatief en positief geladen deeltjes (zoals in de lichtboog van een schakelaar) beweegt langs de x-as in de +x-richting. Rond de x-as wordt een passend magnetisch veld veroorzaakt, dat om de x-as heen draait (rechtsom).

Tengevolge van een botsing krijgt een *elektron* een snelheid in de radiale richting bijvoorbeeld de +y-richting omhoog. Hoe beweegt het elektron verder? Het elektron :

- A blijft zich in de radiale richting naar buiten bewegen
- B gaat in een bocht naar links, maar blijft radiaal naar buiten bewegen
- C gaat in een bocht naar rechts, maar blijft radiaal naar buiten bewegen
- D gaat in een gesloten baan draaien in een vlak loodrecht op de as

2.3.2 Lorentzkracht en Coulombkracht

Snelheidsmeter



a Algemene opstelling: elektronen worden tussen de platen geschoten, waar-tussen een elektrisch veld staat, met gekruist een magnetisch veld naar achter (\times). Het diafragma verzorgt de selectie.

b Krachtbalans van de Coulombkracht en Lorentzkracht op een + lading die loodrecht op de gekruiste velden beweegt: slechts bij één bepaalde snelheid zijn de krachten in evenwicht.

Figuur 2.26 Bij de snelheidsmeter worden de elektrische en magnetische velden samen gebruikt om ladingen op hun snelheid te selecteren.

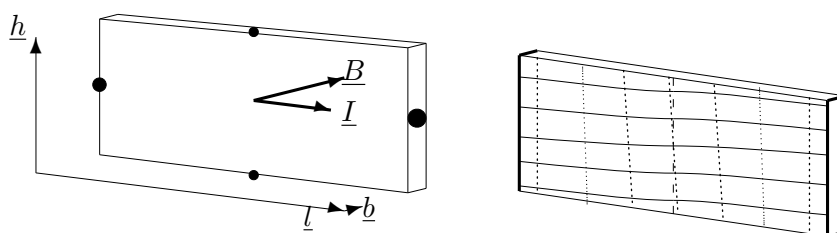
In de condensatorruimte maken we **gekruiste velden** door loodrecht op

het elektrische veld, maar evenwijdig aan de platen, een magnetische veld te maken. Schiet een lading q dwars op beide velden de ruimte binnen. Dan ondervindt de lading q van het elektrische veld met sterkte \underline{E} een *Coulombkracht* $\underline{F}_C = q\underline{E}$, naar een plaat toe. Dezelfde lading q zal door zijn snelheid \underline{v} van het magnetische veld met fluxdichtheidmagnetisch \underline{B} een *Lorentzkracht* ondervinden: $\underline{F}_L = q\underline{v} \times \underline{B}$, van die plaat af. In het algemeen blijft er een netto kracht naar de plaat over, waardoor de lading wordt afgebogen. Bij één speciale snelheid van de lading zullen de twee krachten elkaar precies opheffen, waarbij de lading rechtdoor gaat. Dat is als $\underline{F}_C = -\underline{F}_L$, of

$$\underline{E} = -\underline{v} \times \underline{B}$$

Merk op dat de velden noodzakelijk gekruist moeten zijn, daar de uitwendig produktvector in het rechterlid altijd loodrecht op \underline{B} is. De snelheid mag natuurlijk willekeurig zijn in de richting van het magnetische veld, maar loodrecht op beide velden, in de richting van $\underline{E} \times \underline{B}$, moet de snelheid de grootte hebben $v = E/B$. Bij die snelheid werkt er netto geen kracht op een lading, en stroomt de lading ongestoord door, ongeacht de massa of de lading! Vandaar de naam 'snelheidskiezer' voor deze opstelling.

Halleffect



a Afmetingen en magneetveld.

b stroomlijnen en potentiaalvlakken.

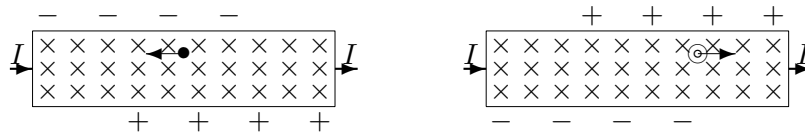
Figuur 2.27 Overzicht situatie stroom, magneetveld en afmetingen bij meting van het Halleffect in een strip.

Een effect omgekeerd aan dat van de snelheidskiezer treedt op als we een stroom I door een *geleider* 'sturen'. Als de geleider in een magneetveld \underline{B} is, zal de stroom, die bestaat uit bewegende ladingen, een Lorentzkracht ondervinden. De ladingen kunnen slechts dan ongestoord doorstromen, als er een compenserende kracht ontstaat: loodrecht op het magneetveld en de stroom ontstaat een elektrisch veld, dat **Hallveld** \underline{E}_H wordt genoemd. Omdat het Hallveld een *Coulombkracht* veroorzaakt,



a Negatieve lading (elektron): omhoog. b Positieve lading (gat): omhoog.

Figuur 2.28 Lorentzkracht op negatieve en positieve ladingen in een dunne geleider als de stroom naar rechts is en het magneteveld dwars op geleider (en stroom).



a elektronstroom naar links geeft oppervlakkading bovenzijde negatief. b gatenstroom naar rechts geeft oppervlakkading bovenzijde negatief.

Figuur 2.29 De oppervlakkading op een dunne geleider in een magneteveld als de stroom naar rechts is.

die de Lorentzkracht compenseert, geldt, met de snelheid van bewegende lading \underline{v} en ongeacht teken van de lading:

$$\underline{E}_H = -\underline{v} \times \underline{B}$$

Het Hallveld zal al snel na het inschakelen van de stroom op de volgende manier ontstaan. De stromende lading zal in de richting van de Lorentzkracht worden afgebogen. Daardoor zal aan de ene kant van de draad (bijvoorbeeld de bovenkant) een overschot aan lading ontstaan en aan de andere kant een tekort. Tussen deze oppervlak ladingen staat het extra elektrische veld, en dus is er een elektrische spanning tussen bovenkant en onderkant van de draad: de **Hallspanning** U_H tussen boven en onderkant van de draad. Het bijzondere is, dat als de meerderheid van de ladingen in de stroom positief is de Hallspanning evenzo positief is; is daarentegen de Hallspanning negatief, dan zijn de ladingen in meerderheid ook negatief! Het meten van de Hallspanning leert ons dus naast de snelheid van de ladingen, ook het teken van de lading.

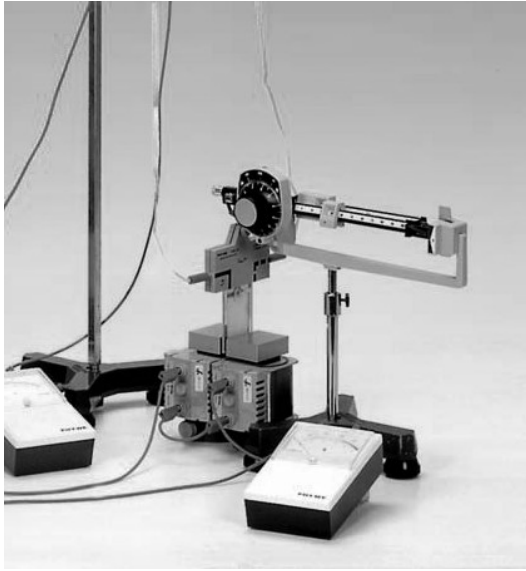
B-veldmeter Meten we de Hallspanning U_H over de draadhoogte h , dan berekenen we een Hallveld $E_H = U_H/h$, waarvan we weten dat het gelijk moet zijn aan vB . De *magnetische fluxdichtheid* wordt:

$$B = \frac{U_H}{hv}$$

Omdat de snelheid evenredig is met de stroomsterkte kan de stroom zodanig worden afgesteld, dat de magnetische fluxdichtheid evenredig is met de Hallspanning. De spanningsmeter kan dus als magnetische *fluxdichtheid* meter worden geijkt. Omdat deze spanningen karakteristiek in de orde van microvolt zijn, is een nauwkeurige spanningsmeter nodig.

- Opg 2.3.7** * Bij een snelheidskiezer staan het elektrische veld en het magnetische veld in de kiezer loodrecht op elkaar, waardoor deeltjes geselecteerd kunnen worden ten aanzien van hun snelheid, en wel met betrekking tot de snelheid:
- A de totale grootte
 - B de component in de richting van B
 - C de component in de richting van E
 - D de component in de richting loodrecht op B en E
- Opg 2.3.8** ** Ten behoeve van elektrische energieopwekking is de M.H.D. generator (Magneto Hydro Dynamica) ontwikkeld. Een stroom positief geladen ionen en negatief geladen elektronen, een *plasma*, wordt met een snelheid van 280 m/s in de z-richting geperst, tussen twee platen door. Loodrecht op de snelheid en evenwijdig aan de platen, in de y-richting, staat een magnetisch veld van 6,0 Tesla. Wat moet dan de elektrische spanning tussen twee platen zijn, die op een afstand van twee meter van elkaar staan in de x-richting, aannemende dat de geladen deeltjes ongestoord door stromen.
[Antw. $U = 3,36$ kV]
- Opg 2.3.9** ** Een magneetveldmeter, geconstrueerd uit een strip InSb met een doorsnede van 1 mm \times 1 mm, is zodanig ingesteld, dat de snelheid van de elektronen door de strip 100 m/s is. Bereken de schaalfactor van deze meter: de magnetische veldsterkte per Hallspanning.
[Antw. $B/U_H = 10$ T/V = 10μ T/ μ V]
- Opg 2.3.10** **** Tijdens een Hall experiment gaat een stroom van 10 A door een geleider van 0,5 cm \times 0,5 cm doorsnede in een dwars magneetveld van 2 T. De Hallspanning blijkt $2,5 \cdot 10^{-6}$ V te zijn.
- a ** Bereken de ladingssnelheid v . [Antw. $v = 0,25$ mm/s]
 - b ** Bereken de hoeveelheid ladingen die per seconde door een vierkante meter dwarsoppervlak gaan. [Antw. $N = 2,5 \cdot 10^{24}$ /m²s]
 - c **** Bereken de hoeveelheid ladingen die in het materiaal per kubieke meter aanwezig zijn, de *ladingsdichtheid* n . [Antw. $n = 10^{28}$ /m³]

2.4 Stroom in magneetveld

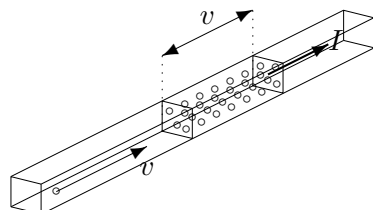


Figuur 2.30 Meting van de Lorentzkracht op een stroomgeleider met de stroombalans. Via flexibele stroomdraden en verticale stroomgeleiders wordt de horizontale geleider (tussen de poolschoenen) van stroom voorzien. Door het eveneens horizontale magneetveld dwars op de geleider ontstaat een verticale Lorentzkracht op de geleider, die met de balans in deze opstelling wordt gemeten.

Lorentzkracht op stroomgeleider We kunnen een elektrische lading in een baan dwingen, bijvoorbeeld door de lading in een geleider te laten stromen. Staat de geleider in een magneetveld, dan zal de *Lorentzkracht* de in de geleider stromende ladingen willen afbuigen. Echter: de ladingen stromen kennelijk ‘ongehinderd’ door, dus moet er een of andere tegenkracht zijn, van de geleider op de ladingen, die de Lorentzkracht opheft. Maar, dan zal omgekeerd—volgens de wet van actie = reactie—de lading een kracht uitoefenen op de stroomgeleider, die gelijk is aan de oorspronkelijke Lorentzkracht op de ‘vrije’ lading! Een deel van de stroomgeleider, met lengte \underline{dl} in de stroomrichting, staat in het magneetveld \underline{B} . Het deel van de Lorentzkracht $d\underline{F}_L$ op dat deel van de stroomgeleider is gelijk aan de lading daarin, dQ , maal de gemiddelde snelheid van die ladingen \underline{v} :

$$d\underline{F}_L = dQ \underline{v} \times \underline{B}$$

Ladingtransport en stroom

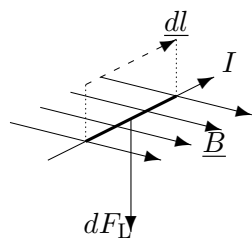


Figuur 2.31 De ladingen in de geleider die binnen één seconde door het doorsnedeoppervlak bij I zullen gaan bevinden zich binnen een afstand van v meter daarvan.

In het genoemde stuk geleider met lengte $dl = v \cdot 1$ bevindt zich een deel-lading $dQ = I \cdot 1$ van ‘vrije’ ladingen. We concluderen dat de stroomsterkte I wordt bepaald door $I = vdQ/dl$. Omgekeerd geldt dan voor de verplaatste lading, vectoriëel geschreven:

$$dQ \underline{v} = I \underline{dl}$$

Lorentzkracht op deel stroomgeleider



Figuur 2.32 Detailschets van de stroombalans opstelling: getekend zijn het Lorentzkrachtdeel dF_L op een deel dl van de horizontale stroomgeleider in het verticale magneetveld B . Let op de kurketrekkerregel voor de kracht: ‘van $I \underline{dl}$ naar B draaiend’ gaat de kurketrekker (of rechtsdraaiende schroef) in de richting van de kracht.

De totale lading per meter draad, die beschikbaar is voor stroomgeleiding, hangt af van de stroomsterkte door de draad. De stroomsterkte is bij afspraak: *de lading die per seconde door een potentiaalvlak gaat*. Dat zijn alle ladingen die, bij het begin van het tellen, te vinden zijn in het stuk geleider vóór het potentiaaloppervlak tot op een afstand van v meter. Immers de lading op v meter zal na 1 seconde (gemiddeld) door het potentiaalvlak stromen en nog juist geteld worden.

We kunnen de betrekking voor de kracht van de, in de geleider stromende, ladingen (tgv het magneetveld) op de stroomgeleider combineren met de betrekking, die het verband geeft tussen lading en stroom. Vullen we de hierboven gevonden betrekking $\underline{v}dQ = I \underline{dl}$ in, dan wordt de **Lorentzkracht**deel op een deel van de stroomvoerende geleider:

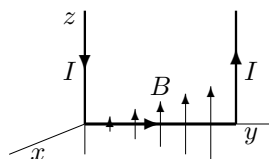
$$\underline{dF}_L = I \underline{dl} \times \underline{B}$$

$$dF_L = I dl B \sin \varphi$$

De bekende Lorentzkracht formule in vectorprodukt vorm. Deze formule geldt *altijd*.

Als het veld niet homogeen is, *moeten* we gebruik maken van zulke korte lengtedelen dat over die afstand het veld constant is. Als het veld homogeen is kunnen we deze wet óók gebruiken. Immers, volgens de wet van Kirchhoff blijft de stroom constant, zodat we de lengtedelen zo groot kunnen nemen als het veld homogeen is. De formulering die je vaak ziet: $\underline{F}_L = BIl \sin \varphi$ is sterk af te raden, omdat die alleen maar correct is in homogene velden voor *rechte* geleiders. Let echter op wat nog volgt!

- Opg 2.4.1** ** Een rechte draad van 16 cm lengte, waardoor een stroom gaat van 4 A, staat loodrecht op een homogeen magneetveld van 0,2 T. Hoe groot is de kracht die de geleider ondervindt? [Antw. $F = 0,128$ N]
- Opg 2.4.2** ** Een rechte draad, 20 cm lang, staat onder een hoek van 60° met een homogeen magneetveld van 50 mT. Als de kracht op de draad 0,025 N is, bereken dan de stroomsterkte in de draad. [Antw. $I = 2,87$ A]
- Opg 2.4.3** ** De stroom gaat vanuit de oorsprong in de richting $(1, 1, 0)$, en het magneetveld staat in de richting $(1, 0, 0)$ van $y = 0$ tot $y = 1$ m. Bereken de grootte van de Lorentzkracht als $I = 1$ A en $B = 1$ T.
- A $F = 1$ N
 B $F = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ N
 C $F = \sqrt{2}$ N
- Opg 2.4.4** **** Een stroom van 1 Ampere loopt over een lengte van 2 meter door een geleider in de y -richting van $y = 0$ naar $y = 2$; de aansluitingen zijn in de z -richting en verstoren het veld niet. Deze stroom bevindt zich in een inhomogeen magnetisch veld in de z -richting dat verandert met 1 Tesla/meter: $B_z = y$. (zie figuur)



Bereken de grootte van totale uitwendige kracht in de x -richting op deze stroom. [Antw. $F = 2,0$ N]

Stroomgeleider in een homogeen magneetveld Voor een stroomgeleider in een homogeen magneetveld vinden we, door alle krachtdelen op te tellen, de totale Lorentzkracht van een homogeen magneetveld op een stroomgeleider:

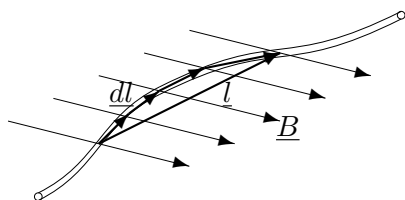
$$\underline{F}_L = I \underline{l} \times \underline{B}$$

Daarbij is \underline{l} de vector die loopt van het punt waar de geleider het veld ingaat tot aan het punt waar het veld wordt verlaten. Immers de stroom I en het veld \underline{B} blijven steeds dezelfde, zodat alleen de lengtedelen $d\underline{l}$

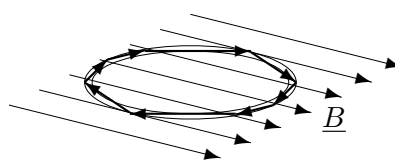
(als vectoren) behoeven te worden gesommeerd. Merk op, dat het er niet toe doet of de geleider recht of krom is: de lengtedelen moeten immers *vector el* worden opgeteld:

$$\underline{l} = \int_{\text{in}}^{\text{uit}} \underline{dl}$$

Dat betekent dus, dat als we naast elkaar een rechte geleider en een spoel (met vele windingen) door het magneetveld laten lopen, de krachten op beiden gelijk zijn, ongeacht het enorme lengte verschil van de stroomdraad!



Figuur 2.33 Een geleider die door een homogeen magneetveld met een bepaalde breedte loopt voelt een Lorentzkracht die, onafhankelijk van zijn vorm, wordt bepaald door de veldbreedte.



Figuur 2.34 Een kringvormige geleider die in zijn geheel in een homogeen magneetveld ligt ondervindt geen netto Lorentzkracht (maar w el een Lorentzkoppel!).

Stroomkring in een homogeen magneetveld Als de gehele *stroomkring* in het homogene magneetveld is gelegen, dan kan het veld g en kracht uitoefenen. Denk eraan dat voor de totale kracht  lle delen van de kring meetellen:

$$\underline{F_L} = \oint dF = I \cdot \left(\oint \underline{dl} \right) \times \underline{B} = I \cdot (0) \times \underline{B} = 0$$

omdat de som van alle lengtedelen *als vector* nul is bij rondgaan. Denk daarbij aan de kop-staart methode van optellen van vectoren. Dat betekent bijvoorbeeld dat het aardmagneetveld geen netto kracht kan uitoefenen op elektrische stromen, maar wel koppels: magneten kunnen wel draaien maar blijven op hun plaats.

Conclusie In een homogeen magneetveld B ondervindt een elektrische geleider met stroom I een Lorentzkracht:

$$\underline{F_L} = I \underline{l} \times \underline{B},$$

waarbij \underline{l} de vector is van het punt waar de geleider het veld ingaat tot het punt waar de geleider het veld uitgaat. Alleen de lengte loodrecht op het magneetveld telt. Voor een stroomkring is $\underline{F_L} = 0$.

Opg 2.4.5 * I 'De formule voor de Lorentzkrachtdeel $d\underline{F_L} = I d\underline{l} \times \underline{B}$ geldt alleen in een homogeen veld'.

II In de formule voor de Lorentzkracht $F = BIl \sin \varphi$ is l de lengte van de geleider.

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

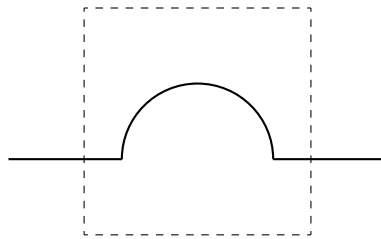
Opg 2.4.6 * Voor de totale kracht op een stroomgeleider in een magneetveld \underline{B} , waarbij \underline{l} de vector is van het beginpunt van de geleider in het veld tot het eindpunt, geldt $\underline{F_L} = I(\underline{l} \times \underline{B})$ alleen voor:

- A een rechte geleider in een willekeurig B -veld
- B een willekeurige geleider in een homogeen B -veld
- C een rechte geleider in een homogeen B -veld
- D is algemeen waar

Opg 2.4.7 * De totale kracht op een gesloten stroomkring die geheel in een B -veld ligt is:

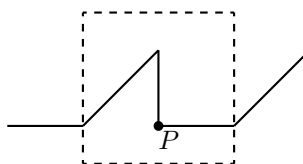
- A voor ieder B -veld gelijk aan nul
- B alleen in een homogeen B -veld gelijk aan nul
- C alleen bij een cirkelvormige stroomkring in een homogeen B -veld gelijk aan nul
- D nooit gelijk aan nul

Opg 2.4.8 ***



Een stroomdraad heeft in een begrensd homogeen magneetveld een half-cirkelvormige gedaante, met cirkelstraal 1 cm. $B = 0,1$ T en $I = 20$ A. Het magneetveld staat loodrecht op het vlak van de (halve) cirkel en is 3 cm breed. Bereken de Lorentzkracht op de draad. [Antw. $F = 60$ mN]

Opg 2.4.9 **



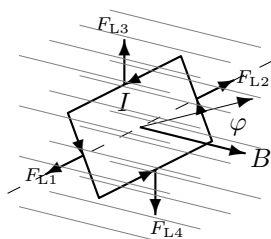
Een geleider met een stroom van 2 A gaat op de getekende wijze door een magneetveld (naar achteren gericht, dus loodrecht op de geleider) met een sterkte van 0,5 T. De afmetingen van het veld zijn 2 cm x 2 cm.

a Bereken de Lorentzkracht op de geleider. [Antw. $F = 0,02 \text{ N}$]

b Bereken het Lorentzkrachtmoment tov P op de geleider.

[Antw. $T = 0$]

Opg 2.4.10 ****



Een rechthoekig raam, lengte 30 cm, breedte 20 cm, heeft een as door de middens van de korte zijden. Om het raam zijn 25 windingen van een stroomdraad waardoor 8 A gaat. Loodrecht op de as staat een magneetveld van 0,6 T; het veld maakt een hoek van 30° met (de normaal van) het vlak.

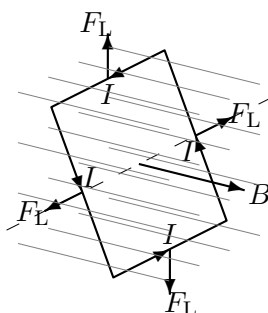
Bereken het koppel op deze stroomkring door eerst de krachten op ieder van de zijden te berekenen. [Antw. $T = 3,6 \text{ Nm}$]

2.5 Stroomkring in magneetveld

2.5.1 Lorentzkoppel op stroomkring

Inleiding We hebben gezien, dat een homogeen magneetveld op een gesloten stroomkring (die in zijn geheel in het veld is) géén netto Lorentzkracht uitoefent. Toch heeft een magnetische veld wél invloed op de stroomkring: op ieder deel van de stroomkring werkt wel degelijk een Lorentzkracht. De stroom gaat rond, waardoor de stroom*richting* van de verschillende delen van de stroomgeleider verschillend zijn. Daardoor heeft het Lorentzkrachtdeel in de verschillende delen een andere richting èn een ander aangrijpingspunt (zie fig. 2.35). Zo ontstaat een *krachtmoment* dat de kring kan doen *draaien*, rond de draaias van de kring.

We bekijken eerst een eenvoudig geval: een rechthoekige stroomkring met een draaias door het midden van twee overstaande zijden. Het magneetveld kiezen we *loodrecht op de draaias*. We bezien de Lorentzkrachten op de verschillende zijden.

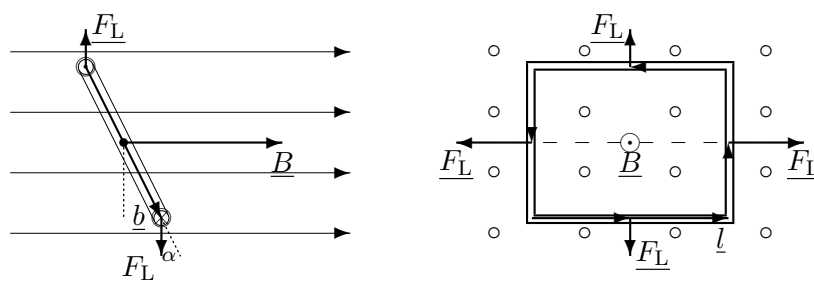


Figuur 2.35 Totaalaanzicht van de krachten op een rechthoekige stroomkring, met een draaias loodrecht op een homogeen magneetveld. Let op de richting van de stromen door de zijden en de bijpassende richting van de Lorentzkracht.

Lorentzkoppel op evenwijdige stromen Stromen door evenwijdige zijden van een stroomkring zijn tegengesteld, daardoor zijn de Lorentzkrachtdelen op die zijden—als die verder precies dezelfde lengte hebben—tegengesteld. Dus vormen de twee Lorentzkrachtdelen op de twee evenwijdige zijden een koppel van krachten (zie fig. 2.36a). Maar niet ieder koppel heeft een ‘arm’. Op de zijden van de stroomkring die loodrecht op de draaias staan grijpt de Lorentzkrachtdeel precies aan in het midden, het punt waar de draaias door die zijde gaat (zie fig. 2.36a en b). De Lorentzkrachtdelen daar zijn precies lángs de draaias gericht, hebben zo dezelfde werklíjn, waardoor ze elkaars werking opheffen. Het Lorentzkoppel op de zijden loodrecht op de draaias is nul.

Lorentzkracht op zijden evenwijdig draaias De zijden van de rechthoekige stroomkring die evenwijdig zijn aan de draaias, hebben ook tegengestelde krachten, maar de werklijnen gaan in het algemeen (bij een willekeurige stand) *nièt door de draaias*. Die Lorentzkrachtdelen geven beide een gelijk krachtmoment ten opzichte van (het midden van) de draaias. De grootte is eenvoudig af te lezen uit figuur 2.36b. Stel dat de zijde evenwijdig aan de draaias wordt voorgesteld met de vector \underline{l} . De Lorentzkracht op zijde \underline{l} is: $\underline{F}_L = I \underline{l} \times \underline{B}$, dus $F_L = IlB \sin \varphi$, waarbij volgens definitie φ de hoek is van de vector \underline{l} naar \underline{B} . In dit geval is \underline{l} evenwijdig aan de draaias, zodat φ gelijk is aan de hoek tussen draaias en het magneetveld. Maar het veld staat juist loodrecht op de draaias, dus $\varphi = \frac{1}{2}\pi$! Samengevat: het *Lorentzkrachtdeel* op de zijde evenwijdig aan de draaias is

$$F_{Ll} = IlB$$



a Projectie op een vlak loodrecht op de draaias. De Lorentzkrachtdelen hebben een arm naar de draaias. Het magneetveld staat naar rechts.

b Projectie op een vlak loodrecht op het veld. De Lorentzkrachtdelen staan alle naar buiten. Het magneetveld komt naar voren.

Figuur 2.36 Krachten op een rechthoekige stroomkring met een draaias loodrecht op een magneetveld in twee projecties.

Lorentzkoppel op rechthoekige stroomkring Het moment van het Lorentzkrachtdeel op de zijde evenwijdig aan de draaias is $\underline{T}_l = \underline{r} \times \underline{F}_{Ll}$. De arm \underline{r} wordt bepaald door de afstand van het draaipunt (draaias) tot de zijde \underline{l} , dat is precies de helft van de zijde \underline{b} waardoor de draaias gaat. De arm is dus $\underline{r} = \frac{1}{2}\underline{b}$. Voor de grootte van het koppel vinden we: $T_l = \frac{1}{2}bF_{Ll} \sin \alpha$, met α de hoek tussen arm (\underline{b}) en kracht (\underline{F}_{Ll}). Gelukkig is α gelijk aan de hoek tussen het veld en de normaalvector van het vlak van de kring, zoals op figuur 2.36b te zien is. Het totale krachtmoment van het Lorentzkrachtdeel op één zijde

is dan: $T_l = \frac{1}{2} b \sin \alpha I l B = \frac{1}{2} I l b B \sin \alpha$. Nu is $l b = A$ het oppervlak van de stroomkring. We kunnen de twee krachtmomenten, die samen het koppel vormen, op tellen tot het totale krachtmoment T_L van het **Lorentzkoppel**:

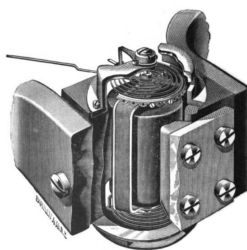
$$T_L = IAB \sin \alpha$$

Lorentzkrachtmoment op stroomkring De vergelijking die het Lorentzkoppel geeft lijkt in veel opzichten op het soort vergelijkingen die voor krachtmomenten gelden. In het bijzonder telt van de magnetische *fluxdichtheid* B de component die dóór het oppervlak gaat $B \sin \alpha$. Daaruit volgt dat het Lorentzkoppel wiskundig kan worden beschreven met het uitwendige vectorprodukt. Laat \underline{A} de oppervlakvector van de kring zijn, met grootte A gelijk aan het oppervlak en gericht loodrecht op het oppervlak, bij de stroomrichting passend volgens de ‘kurketrekkerregel’. Het totale krachtmoment van het magneetveld met homogene fluxdichtheid \underline{B} op de stroomkring met stroom I is het **Lorentzkrachtmoment** \underline{T}_L :

$$\underline{T}_L = I \underline{A} \times \underline{B}$$

Een krachtmoment T is aanleiding voor draaien, net zoals een kracht F aanleiding is voor verplaatsen. Daarom moet de formule voor het Lorentzkoppel $\underline{T}_L = I \underline{A} \times \underline{B}$ worden vergeleken met de formule voor de Lorentzkracht $\underline{F}_L = I \underline{l} \times \underline{B}$. Deze uitdrukking voor het Lorentzkrachtmoment op een stroomkring geldt alléén voor *homogene* velden.

Conclusie *Het krachtmoment van een homogeen magneetveld op een gesloten stroomkring is, voor iedere as die loodrecht op het magneetveld staat $\underline{T}_L = I \underline{A} \times \underline{B}$.*



Figuur 2.37 **Draaispoelmeter**. Door de vorm van de kern is de magnetische flux door de spoel ongeveer constant, zodat het Lorentzkoppel evenredig is met de stroom I . De uitslag waarbij het Lorentzkoppel in evenwicht is met het veerkoppel is evenredig met I .

- Opg 2.5.1** ** Een rechthoekig raam, lengte 30 cm, breedte 20 cm, heeft een as door de middens van de korte zijden. Om het raam zijn 25 windingen van een stroomdraad waardoor 8 A gaat. Loodrecht op de as staat een magneetveld van 0,6 T; het veld maakt een hoek van 30° met (de normaal van) het vlak. Bereken het koppel op deze stroomkring (maar doe het nu handiger dan in opgave 2.4.10! [Antw. $T = 3,6 \text{ Nm}$]

Magnetisch dipoolmoment De combinatie van stroomsterkte en oppervlakvector heet het **magnetisch dipoolmoment** magnetisch \underline{p}_m :

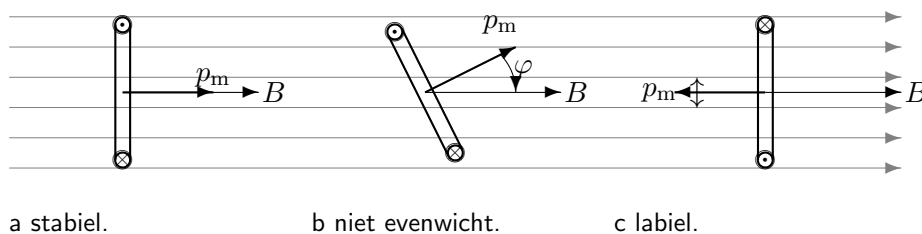
$$\underline{IA} = \underline{p}_m$$

De **eenheid van magnetisch moment** is kennelijk Am^2 . Dit magnetische dipoolmoment kan worden vergeleken met het *elektrisch* dipoolmoment $p_e = Qa$ van een tweetal tegengestelde ladingen die op een afstand a zijn; de eenheid daarvan was Cm. Kennelijk kan een kringstroom worden gezien als een magnetisch dipooltje, zoals een kompasnaaldje. Het krachtmoment van een magnetisch veld \underline{B} op een magnetisch dipoolmoment \underline{p}_m wordt na invullen:

$$\underline{T} = \underline{p}_m \times \underline{B}$$

- Opg 2.5.2** * De formule voor het koppel $\underline{T} = \underline{IA} \times \underline{B}$ geldt alleen als
- A de as door het midden van de kring gaat
 - B de stroom constant is
 - C het veld homogeen is
- Opg 2.5.3** * De formule voor het Lorentzkoppel op een stroomkring $\underline{T}_L = \underline{IA} \times \underline{B}$, en de formule voor de Lorentzkracht op een stroomgeleider $\underline{F}_L = \underline{Il} \times \underline{B}$:
- A zijn beide geldig mits het veld homogeen is
 - B is alleen voor de kring geldig mits het veld homogeen is
 - C is alleen voor de geleider geldig mits het veld homogeen is
 - D zijn beide geldig bij willekeurig veld
- Opg 2.5.4** * De normaalvector van een stroomkring (bepaald door de richting van de stroom) staat omhoog gericht. Het magnetische veld is naar links gericht. Dan is het krachtmoment op de kring (als vector):
- A 0
 - B naar voren gericht
 - C naar achteren gericht
 - D geen van de vorige
- Opg 2.5.5** ** Een winding heeft de vorm van een ruit, zijden 20 cm, lange diagonaal 32 cm. De draaias van de winding is de genoemde diagonaal. De winding ligt in een magneetveld van $0,8 \text{ Wb/m}^2$, met een richting dwars op de as en een hoek van 30° insluitend met het vlak (dus: met de normaal van het vlak). Als het koppel $0,6 \text{ Nm}$ is, bereken dan de stroom door de winding. [Antw. $I = 39,1 \text{ A}$]

Stabiele en labiele dipolen Een magnetisch dipooltje ondervindt van een magneetveld een krachtmoment, waardoor het dipooltje zich richt naar het veld. Het moment verdwijnt alleen als de dipoolmomentmagnetischvector (loodrecht op het vlak van de stroomkring) langs het magneetveld ligt. Immers, het moment $\underline{T} = \underline{p}_m \times \underline{B}$. Daaruit volgt dat alleen de component van het magneetveld loodrecht op het dipoolmoment—dus langs het vlak van de kringstroom—telt voor het koppel. Het koppel is nul als de hoek tussen magneetveld en dipoolmoment $\varphi = 0$ de **stabiele** stand, of als $\varphi = \pi$ (**labiel**). In de stabiele stand gaat zoveel mogelijk magnetische flux door de kring van de kringstroom.



Figuur 2.38 Stabiel en labiel evenwicht naast een niet-evenwicht stand van een magnetisch dipoolmoment in een magneetveld.

Conclusie Een **stroomkring** probeert in een magneetveld zoveel mogelijk ‘passende’ flux te omvatten; daartoe zal de kring verdraaien, verplaatsen en zo mogelijk vervormen.

Opg 2.5.6 * Het magnetisch dipoolmoment van een stroomkring is \underline{p}_m . De stroomkring is in stabiel evenwicht in het magnetisch veld \underline{B} , als de vector \underline{p}_m een hoek maakt met de vector \underline{B} van

- A -180°
- B -90°
- C 0°
- D 90°
- E 180°

Opg 2.5.7 * Om een elektromotor goed te laten lopen is het noodzakelijk om de stroomrichting op het juiste moment om te keren (waardoor de motor in dezelfde richting blijft draaien). De hoek tussen (de normaal op) het vlak van de wikkeling en het magneetveld is dan:

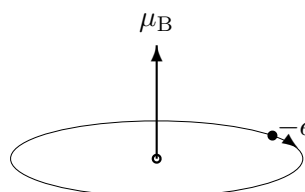
- A 0
- B $\frac{1}{2}\pi$
- C π
- D $-\frac{1}{2}\pi$

Het elementair magnetisch dipoolmoment

Het kleinste magnetische dipoolmoment is het magnetische dipoolmoment van een elektron dat in een waterstofatoom rond de kern draait. Een elektron dat met een hoge frequentie f ronddraait is op te vatten als een kringstroom. Door een oppervlakje dwars op de baan komt de lading $-e$ per seconde f keren voorbij. Per definitie is de stroomsterkte $I = f(-e)$.

In het hoofdstuk 'Atoom en elektron' kunnen we precies zien hoe het elektron ronddraait in het waterstofatoom, namelijk in de Bohrbaan. Het daarbij behorende magnetische dipoolmoment wordt bepaald door de verhouding van elektronlading en elektronmassa, en de constante van Planck. Het **elementair magnetisch dipoolmoment** is het **Bohr-magneton** μ_B met de berekende waarde:

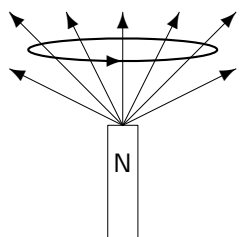
$$\mu_B = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \hbar = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$



Figuur 2.39 Het elementair magnetisch dipoolmoment van het elektron in de grondtoestand van een waterstofatoom: het Bohr-magneton μ_B .

2.5.2 Lorentzkracht op stroomkring van inhomogeen veld

Opg 2.5.8 **** Een cirkelvormige stroomkring, diameter 2 cm, is horizontaal

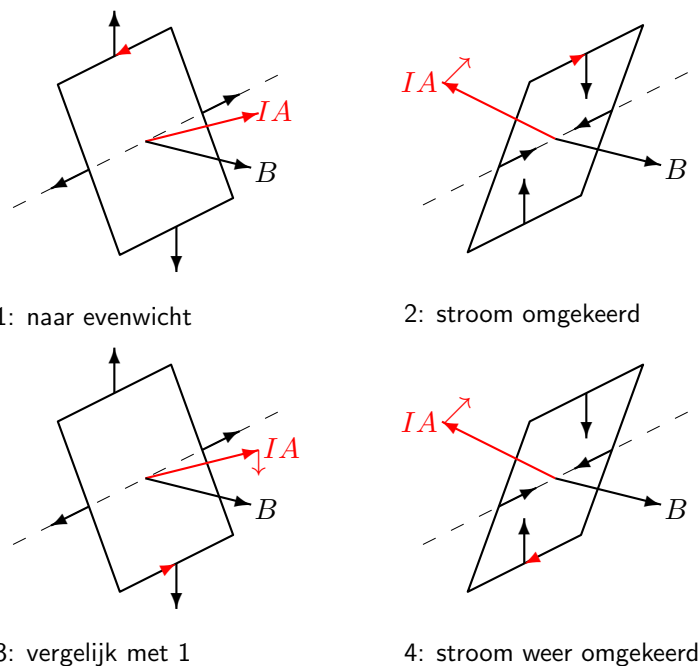


opgesteld, zodanig dat het middelpunt juist 2 cm boven de noordpool van een verticaal opgestelde staafmagneet is. Neem aan dat het veld radiaal is, en ter plaatse van de stroomkring een sterkte van 4 mT heeft. Doordat het veld niet homogeen is *wat de richting betreft* zal er wél een resulterende kracht op de stroomkring zijn als er 10 A stroom door de winding gaat.

- Bereken de *grootte* van het Lorentzkrachtdeel per meter. [Antw. $dF/dl = 40 \text{ mN/m}$]
- Bereken de verticale component van het Lorentzkrachtdeel per meter. [Antw. $dF_z/dl = 17,9 \text{ mN/m}$]
- Bereken de kracht op de winding. [Antw. $F = 1,12 \text{ mN}$]

2.5.3 Elektromotor

De **elektromotor** is gebaseerd op het richten van een stroomkring in een magneetveld. Er zijn veel wikkelingen nodig, omdat het krachtmoment van één kring te klein is. Verder wordt rond een magnetiseerbaar materiaal gewikkeld ('anker'), om het effect van het magneetveld



Figuur 2.40 Achtereenvolgende standen van één rechthoekige stroomkring in een magneetveld. De rode vector is het magnetische *dipoolmoment* stroomkring IA , dat zich naar het magneetveld B richt. De rode pijlpunt in de kring geeft de stroomrichting aan. Tussen de posities 1 en 2 (resp. 3 en 4) passeert het dipoolmoment de stabiele stand (\underline{A} langs \underline{B}), waarbij de stroom wordt omgekeerd, opdat het koppel in dezelfde richting blijft.

enorm te versterken. Het geheel is draaibaar om een soepel lopende as, en bevindt zich in een magnetisch veld, loodrecht op de as staande (bijvoorbeeld tussen de afgeronde poolschoenen van twee elektromagneten). Wat gebeurt er bij stroomvoering: het magnetische veld richt de wikkeling tot die de *maximale magnetische flux* omvat (\underline{A} parallel \underline{B}). Dán wordt de stroomrichting omgekeerd (idee van engelse W.Sturgeon, 1832), **stroomomkeren** of commuteren genoemd, en het proces herhaalt zich. Door de massa van het magnetiseerbare materiaal gaat de motor gelijkmatiger lopen. Om dat verder te bevorderen kunnen, naast het bundelen van het veld door het ijzer, meerdere spoelen met wikkelingen in verschillende vlakken (meerfasen motor) worden gebruikt.

Opg 2.5.9 ** Een spoel met 100 cirkelvormige windingen, diameter 32 cm, voert 0,12 A stroom. De as van de spoel is langs een middellijn, die loodrecht op een homogeen magnetisch veld met een magnetische fluxdichtheid van 0,4 T, staat. Bereken het Lorentzkoppel op de spoel op het moment dat de hoek tussen veld en spoelvlak gelijk is aan 30° . [Antw. $T = 0,33 \text{ Nm}$]

2.6 Draaiende stroomkring in magneetveld

2.6.1 Inductiewet van Faraday

Magnetische draaiarbeid Als een magnetische dipool, een kompasnaaldje bijvoorbeeld, een hoek φ maakt met een magnetisch veld, dan gaat het draaien waarbij er door het magnetische veld draaiarbeid wordt verricht. Bij een kleine verdraaiing van de dipool $d\varphi$ is die arbeid eenvoudig te berekenen—net zoals de draaiarbeid van een elektrische dipool in een elektrisch veld. Algemeen geldt voor een draaiarbeidsdeel dW ten gevolge van een krachtmoment \underline{T} dat $dW = \underline{T} \cdot d\varphi$. In dit geval is \underline{T} een Lorentzkoppel, waarvoor geldt: $T = IAB \sin \varphi$. Het **draaiarbeidsdeel** wordt daarmee: $dW = IAB \sin \varphi d\varphi$. Is de hoekverdraaiing heel klein, dan is de *toename* van de hoek op te vatten als een *differentiaal* van de hoek, zodat we gebruik kunnen maken van de differentiaalrekening (en de ‘afgeleide’ gebruiken):

$$\frac{d \cos \varphi}{d\varphi} = -\sin \varphi \quad \Rightarrow \quad -d \cos \varphi = \sin \varphi d\varphi$$

Op grond daarvan kan het draaiarbeidsdeel worden geschreven als: $dW = -IAB d \cos \varphi = -Id(AB \cos \varphi)$. Nu is $AB \cos \varphi = \underline{A} \cdot \underline{B} = \Phi_{\text{door}}$, met Φ_{door} de door de kring, met oppervlak A , **omvatte flux**. De arbeid die verricht wordt om de stroomkring in het veld te richten wordt daardoor in de fluxafname uitdrukbaar:

$$dW = -Id\Phi_{\text{door}}$$

De draaiarbeid *per seconde* is het **draaivermogen** P van de, in een magnetische veld draaiende, stroomkring:

$$P = \frac{dW}{dt} = -I \frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt}$$



a Stroom I passend bij veld B :

$$\Phi_{\text{door}} > 0, d\Phi_{\text{door}} > 0$$

b Stroom I niet passend bij veld B :

$$\Phi_{\text{door}} < 0, d\Phi_{\text{door}} > 0$$

Figuur 2.41 Teken van flux Φ_{door} en fluxtoename $d\Phi_{\text{door}}$ als de stroomrichting wel of niet past bij het veld en de kring naar het veld draait.

Inductiewet van Faraday Waar is dat vermogen, dat het draaien van de stroomkring in het magnetische veld veroorzaakte, vandaan gekomen? Het magnetische veld is onveranderd gebleven! Het vermogen moet dus uit de stroomkring zijn gekomen—dus uit het elektrische vermogen van de stroomkring. Nu is bekend wat het elektrisch vermogen is, dat vrijkomt als een stroom I een spanning(sverandering) U (gemeten in dezelfde richting) doorloopt: $P = IU$. Omdat volgens het voorgaande $P = -Id\Phi_{\text{door}}/dt$ moet dus wel gelden

$$U = -\frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt}$$

Er ontstaat, door het draaien van de stroomkring in het magneetveld, in de stroomkring—over de gehele kring rond—een **inductiespanning** $U_{\text{m rond}}$: de door *inductie* in de kring (opgewekte) spanning. We weten echter hiermee nog niet precies waar die spanning zit, alleen wat het totaal effect is. Kennelijk geldt voor de totale *inductiespanning* in de *gehele kring* de **inductiewet van Faraday**:

$$U_{\text{m rond}} = -\frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt}$$

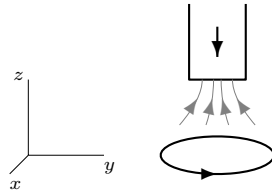
In woorden: ‘De inductiespanning is gelijk aan de afname van de magnetische *flux* door de kring per seconde.’

Tekenafpraak Het blijkt dat deze wet voor *iedere* kring (dus ook niet geleidende kringen!), en *iedere* fluxverandering (dus ook door veranderingen van de kring zelf) geldt. De inductiewet van Faraday is een *algemene natuurwet*, te vergelijken met de wetten van Gauss voor velden. Het $-$ teken in de gegeven formulering van de wet heeft natuurlijk alleen maar zin als we afspreken dat *spanning* en *stroom* in *dezelfde kringrichting* worden bepaald. Diezelfde kringrichting bepaalt ook de richting van de *oppervlakvector*—namelijk door de kurketrekkerregel—en dus de richting van de **flux** door de kring. Dáárom kunnen we spreken over het ‘passen’ van een flux bij een *stroomkring*.

Opg 2.6.1 * De inductiewet van Faraday is geldig:

- A alleen in een homogeen magneetveld
- B alleen voor een vlakke kring
- C alleen voor een geleidende kring
- D voor een willekeurige kring in een willekeurig magneetveld.

Opg 2.6.2



Een geleidende kring in het xy vlak, kringrichting linksom (vanaf de positieve z -as gezien), wordt vanaf diezelfde positieve z as benaderd door een magnetische *zuidpool*. We onderzoeken de flux grootte, die door de kring gaat tijdens de nadering van de zuidpool.

- a * Voor het teken van de flux geldt: $\Phi_{\text{door}} > 0$
 A waar B onwaar
- b *** Voor het teken van de inductiespanning geldt: $U_{\text{m rond}} > 0$
 A waar B onwaar

Opg 2.6.3 ** Een spoel van 15 windingen, 20 cm bij 30 cm, staat eerst loodrecht op een homogeen magneetveld met dichtheid 0,16 T. In 0,1 s wordt de spoel 90° gedraaid, zodat er dan geen veld meer door de spoel gaat. Bereken de (gemiddelde) inductiespanning in spoel tijdens deze actie.

[Antw. $U_{\text{m rond}} = +1,44 \text{ V}$]

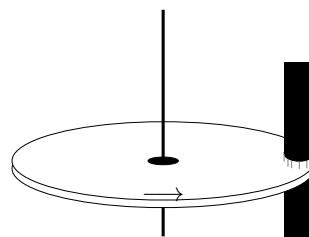
Opg 2.6.4 *** Op een houten ring is een precies evengrote koperen ring gemonteerd. Als we in de koperen ring, onder invloed van veranderende magnetische inductie, een inductiespanning van 1 mV meten, dan kunnen we in de houten ring een inductiespanning meten van:

- A 0 mV
 B 1 mV
 C afhankelijk houtsoort

Voorbeeld Inductiedemping Een draaiende schijf heeft een rand met geleidende segmenten. De schijf wordt afgeremd door een *deel* van de rand in een magnetisch veld te plaatsen.

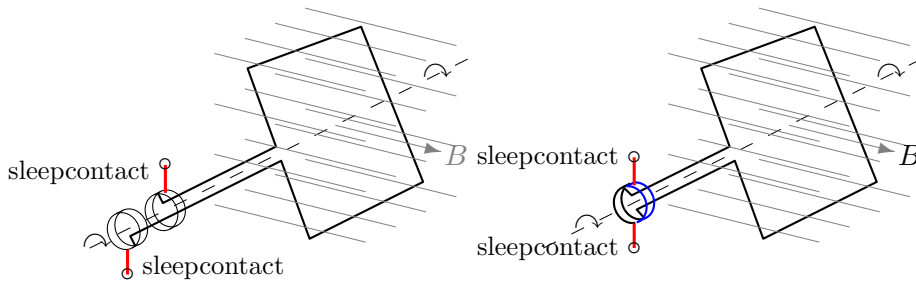
Als de schijf draait zullen de geleidende gedeelten van de rand steeds in en uit het veld gaan. In zo'n segment is dan een veranderende magnetische flux, die in het geleidende gedeelte een inductiespanning opwekt. Daardoor gaan er kringstromen, wervelstromen, vloeien. Die stromen zijn zodanig gericht dat ze van het veld een *Lorentzkoppel* ondervinden dat tegen de draaiing ingaat: de schijf remt af. Om deze **inductiedemping** te onderdrukken kunnen we de kringgrootte zo klein mogelijk maken door verdere segmentering en lamellering.

Om wervelstromen te voorkomen worden de onderdelen van transformatorijzerverliesen en inductiegeneratoren die in een magneetveld draaien—of



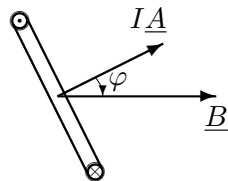
Figuur 2.42 Inductiedemping van magnetisch veld door een geleidende schijf: het magneetveld veroorzaakt enerzijds inductiestroom(en), en anderzijds een Lorentzkoppel dat afremt.

2.6.2 Inductiegenerator

a *wisselspanning*.b *gelijkspanning*.

Figuur 2.43 Symbolische voorstelling van een generatorwikkeling met aansluitpunten voor wissel- of gelijkspanning.

Inductiespanning generator Het *inductiegenerator*, of dynamo, principe is een geleidende kring die in een statisch magnetisch veld rond wordt gedraaid. De kring is één wikkeling van de vele die tezamen een spoel vormen, rond een kern van magnetisch materiaal. Stel dat op een zeker moment de oppervlakvector van de kringen \underline{A} is, de richting van het magnetische veld \underline{B} , en de hoek tussen \underline{A} en \underline{B} gelijk φ .



Figuur 2.44 Grootheden bij generator: magnetische fluxdichtheid \underline{B} , kringoppervlakvector \underline{A} en hoek φ (van \underline{A} naar \underline{B}).

De magnetische *flux* door een wikkeling is $\Phi_{\text{door}} = AB \cos \varphi$; A is het oppervlak van de kring, en B de fluxdichtheid van het veld. Door het ronddraaien neemt de hoek toe met $d\varphi = \omega dt$ (merk op dat in de figuur de *negatieve* φ minder negatief wordt, zodat $d\varphi > 0$, dus $\omega > 0$). De hoeksnelheid $d\varphi/dt = \omega$ hoeft niet noodzakelijk op alle momenten dezelfde waarde behoeft te hebben; men spreekt daarom van **momentane hoeksnelheid**.

De *fluxverandering* van de omvatte flux per seconde is dan:

$$\frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt} = -AB \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\omega AB \sin \varphi$$

Volgens de wet van Faraday is de opgewekte *inductiespanning* (= EMK = elektromotorische kracht) per kring is $-d\Phi_{\text{door}}/dt$. Als er N kringen achter elkaar door zijn gewikkeld, dan is de totale opgewekte spanning in de inductiegenerator:

$$U_{\text{ind}} = -N\omega AB \sin \varphi$$

- Opg 2.6.10 **** Een halve kring wordt, rond haar uiteinden, rondgedraaid met hoeksnelheid 500 (rad)/s in een magneetveld van $0,4 \text{ T}$. De inductiespanning (wissel-) tussen de uiteinden wordt gemeten. Hoe groot is die, als de straal van de (halve) kring 1 cm is? [Antw. $U_{\text{ind}} = 31,4 \sin(500t) \text{ mV}$]
- Opg 2.6.11 **** Een rechthoekig raam, dat 16 windingen draagt, wordt eenparig gedraaid rond om een der langste zijden, welke loodrecht staat op een homogeen magnetisch veld van $0,5 \text{ T}$. Het raam is 40 cm bij 25 cm . Als het toerental 900 rpm is ('*revolutions per minute*', dus omwentelingen per minuut), en de totale kringweerstand 15Ω , bereken dan:
- a de maximale inductiespanning [Antw. $U_{\text{ind}} = 75,4 \text{ V}$]
 b de maximale inductiestroom [Antw. $I = 5,03 \text{ A}$]
 c het maximale koppel [Antw. $T = 4,02 \text{ Nm}$]
- Opg 2.6.12 ****** Een gouden ring, 2 cm diameter en 4 mm^2 doorsnede, wordt zodanig opgeworpen, dat een wenteling ontstaat om een horizontale as met een hoeksnelheid 100 /s . Neem aan dat het aardmagneetveld verticaal staat en $0,5 \text{ mT}$ is. Bereken de maximale *inductiestroom* in de ring. [Antw. $\hat{I} = 46 \text{ mA}$]

Aandrijfkoppel bij belasting Wordt de inductiegenerator eenvoudig belast, met een weerstand R (in de totale kring), dan levert de inductiespanning een stroom I :

$$I = \frac{U_{\text{ind}}}{R}$$

Doordat die stroom ook door de stroomkring in het veld loopt, zal daar een tegenwerkend Lorentzkoppel ontstaan. In iedere wikkeling apart heeft het Lorentzkoppel de sterkte: $I \underline{A} \times \underline{B} = -IAB \sin \varphi$. Het totale *tegenkoppel* T wordt daarmee:

$$T = -NIAB \sin \varphi$$

Omdat $U_{\text{ind}} = N\omega AB \sin \varphi$, geldt voor het tegenkoppel:

$$T = -\frac{IU_{\text{ind}}}{\omega}$$

Dit koppel zal het draaien afremmen, tenzij we dat 'opvangen' met een toegevoerd koppel, het **aandrijfkoppel** T_i (de 'i' van het engelse 'input' = 'invoer'), ter sterkte $-T$. Merk op, dat het produkt $IU_{\text{ind}} = P_{\text{ind}}$

het door de generator afgegeven elektrische **inductievermogen** P_{ind} is, omdat de inductiespanning $-U_{\text{ind}}$ over de belasting staat. Voor het Lorentzkrachtmoment T_i van de belaste generator geldt:

$$T_i = -\frac{P_{\text{ind}}}{\omega}$$

Omgekeerd kunnen we de momentane hoeksnelheid berekenen uit de verhouding van afgegeven vermogen en toegevoerd krachtmoment:

$$\omega = \frac{P_{\text{ind}}}{-T_i}$$

Opg 2.6.13 ** Een cirkelvormige wikkeling van 40 windingen met 35 cm diameter draait met 800 rpm rond in een magneetveld van 0,3 T. De draaias is langs een middellijn, loodrecht op het veld. De kringweerstand is 24Ω . Bereken het Lorentzkoppel op de wikkeling op het moment dat de hoek tussen veld en wikkelvlak (normaal) 30° is. [Antw. $T = 1,163 \text{ Nm}$]

Opg 2.6.14 ** Een inductiegenerator, draaiend met een toerental van 300 rpm, levert een effectieve spanning van 220 V bij een effectieve stroom van 2 A. Het effectieve aandrijfkoppel is dan:

- A 7,0 Nm
- B 10,0 Nm
- C 14,0 Nm
- D 88 Nm

Afgegeven krachtmoment bij inductiemotor Worden dezelfde wikkelingen gebruikt als **inductiemotor**, dan moet de kring naast de weerstand een spanningsbron U_b bevatten; bovendien is een commutator nodig om de stroomrichting door de kringen te doen omkeren op het moment dat door de stabiele stand wordt gedraaid. We krijgen uiteindelijk het volgende: de door het draaien ontstane inductiespanning U_{ind} , als boven $U_{\text{ind}} = -N\omega AB \sin \varphi$, vermindert de spanning over de weerstand tot $U_b + U_{\text{ind}}$, zodat de stroom wordt:

$$I = \frac{U_b}{R} + \frac{U_{\text{ind}}}{R}$$

Natuurlijk is volgens de *wet van Lenz*—inductie werkt de verandering tegen—, en dankzij de werking van de commutator, de *inductiespanning altijd* tegen de bronspanning in. Het Lorentzkrachtmoment is als bij de generator, zodat een **afgegeven Lorentzkrachtmoment** T_o (met de ‘o’ van het engelse ‘output’ = ‘uitvoer’) ontstaat:

$$T_o = \frac{I(-U_{\text{ind}})}{\omega}$$

Merk op, dat in de teller *niet* het *toegevoerd* vermogen door de spanningsbron IU_b staat, maar opnieuw het slechts veel geringere ‘inductievermogen’ $I(-U_{\text{ind}}) = P_{\text{ind}}$. Immers, van het bronvermogen gaat een deel over de weerstand verloren: $IU_b = I^2R - IU_{\text{ind}} = I^2R + P_{\text{ind}}$.

- Opg 2.6.15** ** Een rechthoekig raam, 20 cm lang en 12 cm breed, draagt 15 windingen en draait met 750 rpm rond in een magnetisch veld van 0,5 T. De draaias, een der langste zijden, staat loodrecht op het veld. De aandrijving gebeurt door een 20 V gelijkspanning; de kringweerstand is $2\ \Omega$ en de stroomrichting wordt iedere halve omwenteling omgekeerd. Bereken de antwoorden voor het moment dat de hoek tussen veld en de normaal op het raam 30° is.
- Bereken de momentane inductiespanning. [Antw. $U_{\text{ind}} = 12,8\ \text{V}$]
 - Bereken de momentane stroomsterkte. [Antw. $I = 3,6\ \text{A}$]
 - Bereken het momentane aandrijfkoppel. [Antw. $T = 0,582\ \text{Nm}$]
- Opg 2.6.16** **** Een spoel met 500 windingen draait om een as die ligt in het vlak van de windingen; het windingoppervlak is $1,5\ \text{cm}^2$. Het magneetveld staat loodrecht op de draaias en heeft een sterkte van 0,7 T. De windingen worden aangedreven door een 24 V gelijkspanning (iedere halve omwenteling wordt de stroomrichting aangepast) bij een kringweerstand van $20\ \Omega$. Een minimale stroom wordt verkregen bij een momentaan toerental 300 rpm; op dat moment is het aandrijfkoppel:
- 3,2 mNm
 - 9,0 mNm
 - 58 mNm
 - 92 mNm
- Opg 2.6.17** **** Een cirkelvormig raam, 40 m diameter, draagt 25 windingen en draait rond een middellijn, die loodrecht op een magnetisch veld van 0,3 T staat. De aandrijving geschiedt met 50 V gelijkspanning over $2\ \Omega$ kringweerstand. Na iedere halve omwenteling wordt de stroomrichting omgekeerd. Als de kleinste stroomwaarde in de kring 4 A blijkt te zijn, hoe groot is dan het momentane toerental? [Antw. $n = 426\ \text{rpm}$]

MEERKEUZEANTWOORDEN**Hoofdstuk 2 Ladingen en stromen
in velden****2.1 Lading in elektrisch veld**

- 2.1.1 B
- 2.1.2 B
- 2.1.3 D
- 2.1.5 C
- 2.1.10 E beste keus

2.2 Dipool in elektrisch veld

- 2.2.1 C
- 2.2.2 C
- 2.2.4 B
- 2.2.5 D

**2.3 Bewegende lading in magneet-
veld**

- 2.3.1 D $-e(-x) \times (-y) = -z$
- 2.3.6 B
- 2.3.7 D

2.4 Stroom in magneetveld

- 2.4.3 A
- 2.4.5 D l is de afstand tussen de
punten waar I het veld in-
en uitgaat
- 2.4.6 B
- 2.4.7 B

2.5 Stroomkring in magneetveld

- 2.5.2 C
- 2.5.3 A
- 2.5.4 B
- 2.5.6 C
- 2.5.7 A

**2.6 Draaiende stroomkring in mag-
neetveld**

- 2.6.1 D
- 2.6.2a A
- 2.6.2b B
- 2.6.4 B
- 2.6.5a A
- 2.6.5b B
- 2.6.6 B
- 2.6.14 C
- 2.6.16 C



Sebastian P.I.A.
Ziani de Ferranti
(1864–1930)

Ondanks zijn zuidelijke naam een in Liverpool geboren engelsman, die een belangrijke invloed heeft gehad op de ontwikkeling van de sterkstroom elektrotechniek. In de periode 1878 (hij was toen 14 jaar!) tot 1887 was hij degene die consequent wisselstroom gebruikte—omdat hij er het nut van inzag—zodat het in één klap mogelijk werd om drie verschillende dingen in een netwerk te doen:

1. ‘opwekken’ van elektrische energie met een (eenvoudige) dynamo;
2. ‘transformatie’ van die energie naar hoge ‘druk’ (spanning);
3. ‘transport’ van elektrische energie over grote afstand met weinig energieverlies.

Eerst was hij technisch medewerker van de (Carl Wilhelm) Siemens vestiging in Engeland. Daarna richtte hij met Thomson en Ince een bedrijf op. Hij

construeerde samen met Thomson een dynamo, en voor hoogspanningsgebruik een transformator, een kabel en beveiligingen: de hoekstenen voor de sterkstroom industrie. De eerste dynamo was weliswaar al eerder, in 1841, na de ontdekking van inductie door M. Faraday, ontwikkeld in Engeland. Ook werd de eerste demonstratie van een wisselspanningstransformator in Londen gehouden, in 1881, door J.D. Gibbs en L. Gaillard, die het ontwerp verkochten aan Westinghouse in de Verenigde Staten van Amerika (1883). Het eerste wisselspannings transportnetwerk ontstond daardoor in de USA (1886). Even daarvoor, in 1885, werd de eerste inductiemotor uitgevonden door de italiaan G. Ferraris. De wereld lag toen open voor de ontwikkeling van de zware industrie, die sterke krachtbronnen nodig had. Van 1887–1891 werkte Ziani de Ferranti aan de eerste elektrische energiecentrale in Londen.

Hoofdstuk 3

INDUCTIE

DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de volgende begrippen en verbanden zodanig te hebben verwerkt, dat u die kan toepassen op eigenschappen van kringen bij hoge frequenties, van spoelen, gekoppelde kringen, transformatoren of vergelijkbare componenten.

- elektrische inductie en fluxverandering, verplaatsingsstroom;
- inductiewet van Maxwell;
- wederzijdse inductie verschijnselen bij gekoppelde spoelen;
- zelfinductie en wederzijdse inductie(coëfficiënten);
- meekoppeling, tegenkoppeling, koppelfactor;
- wederzijdse inductie-energie;
- extreme koppeling: maximale meekoppeling en tegenkoppeling;
- vervangingsinductie bij serie en parallel schakelen van spoelen, effectieve zelfinductie;
- ideale transformator, fluxverlies, ijzerverliezen;
- wikkelverhouding, koppelfactor en spanningsversterking ideaal;
- nullaststroom, wikkelverhouding en stroomversterking;
- complexe methode, amplitude en fase;
- wikkelverhouding en amplitudeversterking, belasting en faseverdraaiing;
- stroomverdringing, hoogfrequente oppervlaktestroom, indringdiepte;
- supergeleiding, supergeleidende toestand, kritieke temperatuur;
- magnetische veldsterkte en stroomdichtheid;
- Meissner-effect, magnetische fluxverdringing;
- supergeleiding van type I en II, fluxdraden, magnetische fluxkwantisatie;

3.1 Inleiding

Inductiewet van Maxwell In het hoofdstuk ‘Ladingen en stromen in velden’ is aan de hand van de Lorentzkracht uitgelegd hoe een veranderende magnetische flux door een kring een elektrische spanning in die kring veroorzaakt. Dat *inductie* verschijnsel wordt beschreven door de *inductiewet van Faraday* (zie paragraaf 2.6.1, pag. 118). Verder hebben we in deel 1, hoofdstuk ‘Polarisatie en magnetisatie’, kennis kunnen maken met de *wet van Ampère*, die aangeeft hoe een elektrische stroom door een draad een magnetische spanning rond die draad veroorzaakt. J.C. Maxwell heeft (1861) laten zien, hoe die laatste wet moet worden uitgebreid tot een echte *inductiewet*: de *inductiewet van Maxwell*. Toepassing daarvan leidt tot het golfkarakter van tijdafhankelijke elektrische en/of magnetische velden. Deze zullen echter niet in dit hoofdstuk, maar apart, worden besproken—vooral, omdat die een nogal diepe analyse vergen. In dit hoofdstuk zullen we verder ingaan op aspecten van het inductieverschijnsel.

Wederzijdse inductie We zullen dieper ingaan op de inductie-coëfficiënten, die we reeds leerden kennen bij de behandeling van de spoel. Naast de *zelfinductie*—de inductie-invloed van een kringstroom op de spanning in *dezelfde* kring—bezien we de *wederzijdse inductie*: de inductie-invloed van een kringstroom op de spanning in een *andere* kring. Algemeen zullen we laten zien, dat de wederzijdse inducties van twee kringen op elkaar wordt beperkt door de zelfinducties; dat leidt tot het begrip *koppelfactor* voor het beschrijven van de wederzijdse beïnvloeding. In het bijzonder zullen we laten zien dat bij het in serie schakelen van spoelen de onderlinge beïnvloeding in rekening kan worden gebracht door de zelfinducties te verhogen met de wederzijdse inductie. Bij parallel schakelen van spoelen moeten we de wederzijdse inducties juist op de zelfinducties in mindering brengen.

Transformator De belangrijkste toepassing van wederzijdse inductie is de *transformator*, als eerste in Londen gedemonstreerd in samenwerking door de engelsman J.D.Gibbs en de fransman L.Gaulard (1881). Ze verkregen hierop echter geen patent, omdat ook Ziani de Ferranti zijn rechten deed gelden. Het transformeren slaat zowel op (wissel)spanning als op (wissel)stroom. Als uitgangspunt dient de ideale transformatorideale, waarbij geen fluxverlies optreedt, maar wel andere soorten. Zo blijkt de nullaststroom een aanwijzing voor ijzerverliezen te zijn. De belasting van de transformator blijkt invloed te hebben op zowel de amplitude als de fase, leidend tot amplitudeversterking en faseverdraaiing.

Stroomverdringing Als een ander aspect van het inductie verschijnsel bespreken we de *stroomverdringing*, waardoor een hoogfrequente elektrische stroom zich aan de rand van de geleider concentreert als oppervlakstroom. In het bijzonder wordt afgeleid hoe de *indringdiepte* bepaald wordt door frequentie, geleiding voor stroom en geleiding voor magnetisch veld (magnetische permeabiliteit). Dit verschijnsel is van invloed bij hoogfrequente signaalverwerking.

Supergeleiding Een wat vreemde eend in de bijt is het laatste onderwerp van dit hoofdstuk: de elektrische supergeleiding (zie ook). In het hoofdstuk ‘Kristal en elektron’ hebben we laten zien dat de geleiding, zoals we die meestal ervaren, samenhangt met een weerstandskracht op elektronen, die evenredig is met de elektrondriftsnelheid. In 1911 vond Kamerlingh Onnes in Leiden dat bij (zeer) *lage temperaturen* het weerstandsmechanisme totaal anders werkt, of zelfs verdwijnt: er is dan supergeleiding. Bij supergeleiding blijkt er een zeer sterke koppeling te zijn tussen elektrische en magnetische verschijnselen: magnetische fluxen worden door de supergeleider ‘uitgestoten’—of slechts in de vorm van ‘fluxdraden’ toegelaten.

3.2 Elektrische inductie

Inductiewet van Faraday We zijn *inductie* allereerst tegengekomen, in paragraaf 2.6.1, in de vorm van de *inductiewet van Faraday*: voor een willekeurig kringoppervlak geldt

$$U_{\text{rond}} = \frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt}$$

- een veranderende *magnetische flux* induceert een *elektrische* spanning rond die flux

‘Induceren’ is ‘veroorzaken’, dus kortweg: een magnetische oorzaak heeft een elektrisch gevolg. Van het laatste kennen we ook een omkering: een elektrische oorzaak heeft een magnetisch gevolg.

Wet van Ampère Als het ware het omgekeerde van de inductiewet van Faraday bleek de *wet van Ampère*, die is besproken in deel 1 paragraaf 4.4 (zie voor magnetische potentiaal ook paragraaf 1.7.2). Voor een willekeurig kringoppervlak geldt

$$U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$$

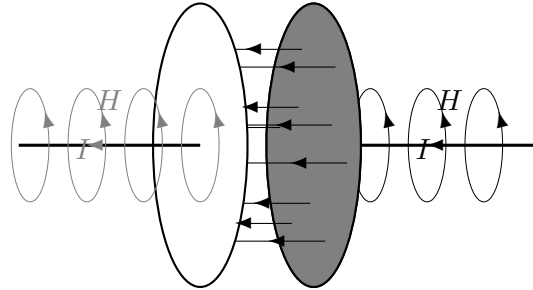
- een *elektrische* stroom I_{door} induceert een *magnetische* spanning rond die stroom;

Als we bovenstaande karakterisering van de inductiewet van Faraday en de wet van Ampère vergelijken, dan zal de overeenkomst opvallen. Het verschil is voornamelijk, dat *elektrisch* en *magnetisch* van rol verwisselen. Maar er is nog een verschil: de inductiewet van Faraday gaat over een flux, dus ‘veld’stroom—de wet van Ampère gaat over een ‘stroom ladingen’.

Analogie inductiewetten Wanneer in bovenstaande karakterisering het woord ‘magnetisch’ en ‘elektrisch’ verwisseld wordt ontstaat:

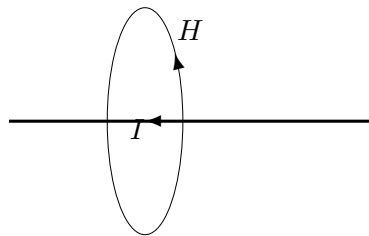
- een veranderende *elektrische* flux induceert een *magnetische* spanning rond die flux;
- een *magnetische* stroom induceert een *elektrische* spanning rond die stroom;

De éérste van deze twee zinnen blijkt juist te zijn; ze leidt tot de uitbreiding van de wet van Ampère naar de inductiewet van Maxwell. De tweede zin heeft (vooralsnog) geen inhoud. Immers, er bestaat geen netto magnetische stroom, omdat magnetische polen *niet apart*—dus als noordpool of als zuidpool—voorkomen. Magnetische polen komen altijd voor *in paren*, als magnetische dipolen. Zolang dat zo is, zal de inductiewet van Faraday niet veranderen.



Figuur 3.1 Magnetische veldlijnen rond de toe- en afvoerdraden van een condensator volgens de wet van Ampère: in de condensator is géén magnetisch veld (?).

Wet van Ampère bij ideale condensator We zullen nu nagaan hoe een veranderende elektrische flux een magneetveld rond die flux induceert. Daartoe nemen we een alledaagse situatie onder de loep: een vlakkeplaten-condensator tijdens het opladen. *Tussen* de condensatorplaten is een elektrische *flux*, die door het voortdurend opladen groeit in de tijd. Let nu eens op de aan- en afvoerdraden *buiten* de platen.



Figuur 3.2 De wet van Ampère voor een oppervlak dat wordt begrensd door een cirkelvormige magnetische veldlijn; let op de richting van de stroom en de 'passende' draairichting van het veld.

de veldlijn overal even sterk, dus constant, is. We gebruiken het eenvoudige principe: 'kracht \times weg', en vinden dan $U_{\text{m rond}} = \int H dl = Hl$, met de lengte van de veldlijn $l = 2\pi r$. Volgens de wet van Ampère is dan $H2\pi r = I$, dus $H = I/2\pi r$.

Vanwege het opladen loopt er een stroom I naar, of van, de plaat. Daardoor is er rond de draden een cirkelvormig magnetisch veld ter sterkte $H = I/2\pi r$, met r gelijk aan de afstand van de cirkelvormige veldlijn naar het hart van de draad. Om dat in te zien bekijken we het cirkeloppervlak dat begrensd wordt door die veldlijn. De **stroom die door de kring gaat** I_{door} is de stroom I zelf: $I_{\text{door}} = I$. De **magnetische kringspanning** $U_{\text{m rond}}$ rond de veldlijn is eenvoudig te bepalen, omdat het veld op

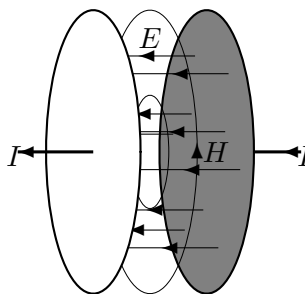
Onvolledigheid van de wet van Ampère Overal om de toe- en afvoerdraden vinden we dus een cirkelvormig magnetisch veld. Zit er dan geen magnetisch veld *tussen* de condensatorplaten? Zou er een gat zitten in het magnetische veld als we tussen de platen zitten? Hoe dan

ook, we weten dat uit het superpositiebeginsel volgt: de stroom door de draden maakt *overal* een cirkelvormig magnetisch veld, óók *tussen* de platen! Het mag daar dan misschien wat zwakker zijn, omdat het wat verder weg is, maar het stopt zeker níet daar, waar de draad over gaat in de plaat, en zelfs, tussen de platen in. Neem nu zo'n veldlijn tussen de platen—die is ook cirkelvormig—en pas de wet van Ampère er op toe. Er gaat géén stroom door het oppervlak van de kring, $I_{\text{door}} = 0$; maar er is wél een magnetische spanning als we rond gaan: $U_{\text{m rond}} = H \cdot 2\pi r$. *Maxwell* heeft in 1861 laten zien waaraan die magnetische rondspanning $U_{\text{m rond}}$ gelijk zou moeten zijn.

Verplaatsingsstroom Uit de wet van behoud van lading volgt dat de lading Q op de platen per seconde toeneemt met de waarde van de stroomsterkte I :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

De *wet van Gauss* zegt dat de elektrische flux úit de plaat, Ψ_{uit} , gelijk is aan de lading Q op de plaat (eigenlijk: binnen het volume dat om de plaat gaat). De elektrische flux die door een magnetische veldlijn gaat is deel van flux Ψ tussen de tegengestelde ladingen op de twee platen. Kennelijk is $\Psi = Q$, en daardoor $d\Psi/dt = I$. Deze flux Ψ loopt over de volle breedte met het plaatoppervlak A , terwijl wij geïnteresseerd zijn in de **flux door het oppervlak van de veldlijn** Ψ_{door} . Nemen we eerst eens aan, dat de veldlijn *buiten* de flux omloopt; dan is $\Psi_{\text{door}} = \Psi = Q$. Dat leidt tot de volgende toename van de flux-door-de-kring per seconde:



Figuur 3.3 Magnetische veldlijnen om de condensatorruimte en de elektrische flux die er doorheen gaat.

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{\text{door}}}{dt} &= I \quad \text{voor een magnetische veldlijn rond de tussenruimte} \\ I_{\text{door}} &= I \quad \text{voor een magnetische veldlijn rond de stroomdraad} \end{aligned}$$

Het lijkt of toename van elektrische flux een elektrische stroom is; Maxwell noemde deze $d\Psi_{\text{door}}/dt$ de **verplaatsingsstroom**.

Conclusie *Bij afwezigheid van elektrische stroom is de magnetische spanning rond een kring is gelijk aan de verplaatsingsstroom: de toename per seconde van de elektrische flux door een kring.*

Inductiewet van Maxwell De toename van elektrische flux maakt een magnetisch veld: elektrische **inductie**. Het is duidelijk dat, om onder alle omstandigheden juist te zijn, de wet van Ampère moet worden uitgebreid met een term, gelijk aan *de toename van de elektrische flux per seconde*. In volle glorie wordt dan de **inductiewet van Maxwell**:

$$U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} + \frac{d\Psi_{\text{door}}}{dt}$$

Merk op, dat de verplaatsingsstroom een plusteken heeft (in tegenstelling tot het minteken in de magnetische inductiewet van Faraday). Let op de éenheden: de **eenheid van magnetische spanning** is Ampère (A), de *eenheid van elektrische stroomsterkte*; de elektrische flux heeft als eenheid Coulomb, C=As(!), de ladingseenheid.

Wanneer de inductiewet van Maxwell wordt toegepast op een *magnetische veldlijn* rond de stroomdraad zal alleen de term I_{door} een bijdrage geven, nl. I . Voor een veldlijn rond de tussenruimte heeft alleen de verplaatsingsstroom een bijdrage. Alleen als de veldlijn rond de gehele tussenruimte is zal ook de verplaatsingsstroom I zijn. We concluderen, dat de magnetische spanning op voldoende grote afstand, namelijk voorbij de platen de waarde I heeft. Maar dan is, voorbij de platen, ook de magnetische veldsterkte overal even sterk: het veld loopt daar (buiten de platen) gewoon door.

Gaan we echter *tussen de platen* naar binnen, dan zullen we daar slechts een gedeelte van de totale verplaatsingsstroom door een magnetische veldlijn krijgen, dus is de bijdrage van de verplaatsingsstroom kleiner dan I . Kennelijk geldt: *de veldsterkte in de binnenruimte van de condensator is kleiner dan daar buiten*. Dat is niet helemaal onverwacht: de stroom is tussen de platen als het ware *verbreed*; we zitten daar binnenin de stroom, niet erbuiten, en het veld is navenant *zwakker*.

Exacte bepaling magnetisch veld Een interessante vraag is: Hoe *lóópt* eigenlijk het magnetische veld, dat door inductie wordt opgewekt? Het antwoord is niet altijd gemakkelijk te geven. Hierboven maakten we gebruik van de symmetrie om tot het cirkelvormige (eigenlijk cilindrische) veld te komen. Maar als de platen niet rond, maar vierkant zijn? Vergelijk de situatie met die bij de inductiewet van Faraday. In het algemeen zijn we tevreden met kennis over U_{rond} , en behoeven we niet precies te weten hoe het elektrische veld E loopt. In een stroomkring wordt immers de stroomsterkte bepaald door de totale *kringspanning*; de totale bijdrage van het inductieveld is U_{rond} . Dan maakt het niet uit wèlk deel van de kring tot de spanning bijdraagt; alleen het totaál telt. Net zo maakt het—in de meeste gevallen—niet uit wèlk gedeelte van een kring bijdraagt tot de magnetische rondspanning: alleen het totaal telt.

Opg 3.2.1 * De goede uitdrukking van de inductiewet van Maxwell is:

- A $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} - d\Phi/dt$
- B $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} + d\Phi/dt$
- C $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} - d\Psi/dt$
- D $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} + d\Psi/dt$

Opg 3.2.2 * Welke van de volgend twee uitspraken zijn juist of onjuist

I Tussen twee condensatorplaten zijn de magnetische veldsterkte H en de elektrische veldsterkte E parallel aan elkaar.

II De magnetische veldsterkte tussen twee condensatorplaten is evenredig met de afstand tot de centrale as r .

- A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

Voorbeeld Veld in condensator Bepaal het magnetische veld in een ijzeren ring, straal r , in de condensatorruimte, straal platen R , bij een oplaadstroom I .

Volgens Maxwell is in de condensator: $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} + d\Psi/dt$. De flux door de ring is evenredig met het ringoppervlak, dus evenredig met de straal in het kwadraat. Door de hele condensator gaat de 'verplaatsingsstroom' I , dus door de ring het deel $I_{\text{door}} = (r/R)^2 I$. De magnetische spanning is opgebouwd door de magnetische veldsterkte H die door de ring cirkelt (om de elektrische flux heen) over een afstand $l = 2\pi r$. Dus is $U_{\text{m rond}} = Hl = 2\pi r H$. We concluderen:

$$H = (r/R)^2 I / 2\pi r = \frac{1}{2} r (I / \pi R^2) = \frac{1}{2} r J$$

De magnetische veldsterkte is evenredig met de stroomdichtheid en de straal van de ring. Merk op, dat dit magneetveld gewoon de stroom volgt, ook bij wisselstroom.

Opg 3.2.3 ** Een stroom van 1 A loopt door een rechte stroomdraad; deze is cilindervormig met straal 2 mm.

a Bereken de magnetische veldsterkte $H(r)$ als functie van de afstand r van veldpunt tot de as van de stroomdraad; neem achtereenvolgens:

$r = 2, 4, 8, 16$ en 32 mm.

[Antw. $H(r) = 79,58, 39,79, 19,89, 9,95$ en $4,97$ A/m]

b Teken de grafiek van $H(r)$

Opg 3.2.4 ** Een plaatcondensator wordt opgeladen met een stroom van 1 A; de stroomdraden zijn cilindervormig met een straal van 2 mm. De platen zijn cirkelvormig met een straal van 16 mm; de afstand tussen de platen is zeer klein.

a Bereken de magnetische veldsterkte $H(r)$ in de condensator voor punten op afstand r van de as van symmetrie; neem achtereenvolgens: $r = 2, 4, 8, 16$ en 32 mm. [Antw. $H(r) = 1,24, 2,49, 4,97, 9,95$ en $4,97$ A/m]

b Vergelijk de gevonden waarden met de waarde van de veldsterkte voor punten buiten de condensator op dezelfde afstand van de as (=draad).

c Teken de grafieken $H(r)$ voor punten binnen en buiten de platen

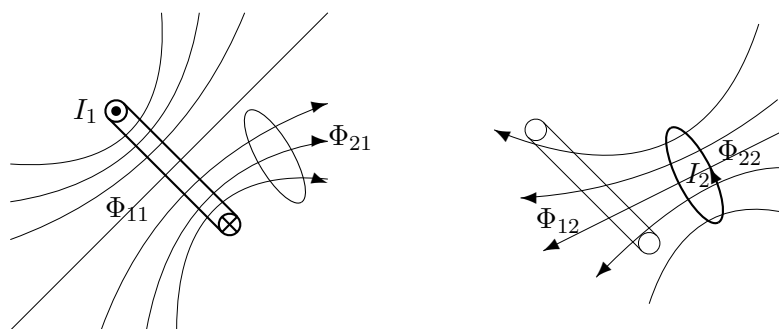
- Opg 3.2.5 **** Tussen de twee platen van een plaatcondensator wordt een spanning aangelegd van $u = 311 \sin(314t)$. De platen zijn cirkelvormig met een straal van 100 mm en de afstand tussen de platen is 10 mm. Het diëlektricum tussen de platen is lucht.
Bereken de topwaarde van de magnetische veldsterkte in A/m op afstand van 50 mm van de as van symmetrie. [Antw. $\hat{H} = 2,16 \cdot 10^{-6}$ A/m]
- Opg 3.2.6 ***** Een plaatcondensator heeft platen met een diameter van 4 cm op een afstand van 4 mm. Tussen de platen hangt een dunne koperen ring met een diameter van 1 cm; het vlak van de ring is evenwijdig aan de platen. Als de platen worden opgeladen met een stroom van $1 \mu\text{A}$, bereken dan *na 1 minuut opladen*:
- de elektrische flux Ψ door de ringopening. [Antw. $\Psi_{\text{door}} = 3,75 \mu\text{C}$]
 - de magnetische flux Φ door de ringopening. [Antw. $\Phi_{\text{door}} = 0$]
 - de veldsterkte van het circulerende elektrische veld in de koperen ring. [Antw. $E = 0$]
 - de veldsterkte van het circulerende magnetische veld in de koperen ring. [Antw. $H = 1,989 \mu\text{A/m}$]
- Opg 3.2.7 ****** In een plaatcondensator wordt een ijzeren ring gehangen, zodat de gehele elektrische flux door de ringopening kan gaan. De diameter van de platen is 30 mm, die van de ring 15 mm. De platen zijn aangesloten op een wisselstroombron van 1 A topwaarde en 50 Hz frequentie.
- Bereken de magnetische veldsterkte H in de ring (topwaarde). [Antw. $\hat{H} = 5,31$ A/m]
 - Uit de ring wordt een segmentje gezaagd van 1 mm. Beantwoord dezelfde vraag als in a. Neem aan dat de relatieve magnetische permeabiliteit van de ring gelijk aan 1000 is. [Antw. $\hat{H} = 0,239$ A/m]

3.3 Wederzijdse inductie

Inleiding In deel 1 hoofdstuk ‘Polarisatie en magnetisatie’ hebben we kennis gemaakt met de begrippen *capaciteit* en *zelfinductie*. Hier zullen we het laatste begrip verder uitbreiden, en wel naar ‘*wederzijdse inductie*’. Feitelijk zouden we op precies dezelfde manier ook de ‘wederzijdse capaciteit’ kunnen invoeren. Het is al te zien, aan het afwezig zijn van het voorvoegsel ‘*zelf*’ bij capaciteit, dat het niet gebruikelijk is om over ‘wederzijdse’ capaciteit te praten. Kennelijk is alleen de *magnetische wederzijdse inductie* technisch interessant. Voor de zelfinductie lieten we, door de wikkelingen van een spoel, een elektrische stroom lopen en bekeken de magnetische flux, die door de wikkelingen van die ‘*zelf*’de spoel ging. We zullen nu óók letten op dat deel van de flux, dat door een *andere* spoel gaat. Omgekeerd zal een stroom in de andere spoel een magnetische flux veroorzaken die voor een deel door de eerste spoel gaat. De spoelen beïnvloeden elkaar daarbij ‘*wederzijds*’, namelijk via de fluxen door de andere spoel.

Twee spoelen en fluxen We zullen twee spoelen nemen, die *vast* aan elkaar zitten (zodat het niet al te ingewikkeld wordt). Nummer de spoelen spoel1 resp. spoel2. Door de wikkelingen van spoel1 loopt een elektrische stroom I_1 , resp. I_2 door spoel2. We maken de volgende *index-afspraak* bij de magnetische flux (zie ook fig. 3.4):

- Φ_{11} is de flux door spoel1 tengevolge van stroom I_1 ;
- Φ_{12} is de flux door spoel1 tengevolge van stroom I_2 ;



a Linkerspoel, stroom I_1 , flux Φ_{11} : slechts het deel Φ_{21} gaat door spoel 2. b Rechterspoel, stroom I_2 , flux Φ_{22} : slechts de flux Φ_{12} gaat door spoel 1.

Figuur 3.4 Twee spoelen die een deel van elkaars flux bevatten, waarbij om beurten één spoel stroom voert. Let op de volgorde van de indices: ze staan in de volgorde ‘*gevolg*’-‘*oorzaak*’.

- Φ_{21} is de flux door spoel2 tengevolge van stroom I_1 ;
- Φ_{22} is de flux door spoel2 tengevolge van stroom I_2 .

Dat betekent dat de indices in de volgorde ‘gevolg’-‘oorzaak’ staan. Lopen door de beide spoelen stromen, dan tellen de verschillende velden, dus ook fluxen, op. Voor de flux door spoel1 resp. spoel2 krijgen we:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} \quad \Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$$

Zelfinducties en wederzijdse inducties Een stroom I veróorzaakt een flux Φ . Bij de behandeling van de spoel is uitgelegd dat de *eigenflux*, door de eigen spoel, *evenredig* moet zijn met de stroom I door dezelfde spoel. De evenredigheidsconstante wordt genoemd **zelfinductie** L , ook wel zelfinductie ‘*coëfficiënt*’. Noteren we

$$L_1 = L_{11} \quad \text{en} \quad L_2 = L_{22},$$

dan worden de evenredigheden:

$$\boxed{N_1 \Phi_{11} = L_{11} I_1} \quad \boxed{N_2 \Phi_{22} = L_{22} I_2}$$

Op dezelfde manier kunnen we betogen, dat de flux door spoel1 tgv de stroom door spoel2 daarmee evenredig is. De daarbij behorende evenredigheidsconstante is de **wederzijdse inductie** L_{12} (soms ook wederzijdse inductie ‘coëfficiënt’):

$$\boxed{N_1 \Phi_{12} = L_{12} I_2} \quad \boxed{N_2 \Phi_{21} = L_{21} I_1}$$

In geval de flux niet door iedere kring van een spoel dezelfde waarde zal hebben, moeten we natuurlijk zoiets als de *gemiddelde flux* nemen. Hoe dan ook: in plaats van te praten over fluxen kunnen we, in een gegeven *vaste situatie* van spoelen, praten over de stromen (die de magnetische velden veroorzaken).

Opg 3.3.1 * De koppeling van twee spoelen bij het optreden van wederzijdse inductie vindt plaats, doordat er koppeling is van

- A de stromen
- B de elektrische velden
- C de magnetische velden

Opg 3.3.2 * De juiste formule voor de wederzijdse inductie is

- A $L_{12} = N_2 \Phi_{12} / I_2$
- B $L_{12} = N_1 \Phi_{12} / I_2$
- C $L_{12} = N_2 \Phi_{21} / I_2$
- D $L_{12} = N_1 \Phi_{21} / I_1$

Wederzijdse inductiespanningen Verándert de stroom door een van beide spoelen, of allebei, dan zullen er inductiespanningen ontstaan, die de veranderingen in de kring tegengaan. Met de *inductiewet van Faraday* voor spoelen $V = -Nd\Phi/dt$ krijgen we dan de volgende inductiespanningen in de kring van spoel1 resp. spoel2 (aangenomen dat de flux door alle kringen van de spoel gelijk blijft):

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{d(N_1\Phi_{11})}{dt} - \frac{d(N_1\Phi_{12})}{dt} \\ V_2 &= -\frac{d(N_2\Phi_{22})}{dt} - \frac{d(N_2\Phi_{21})}{dt} \end{aligned}$$

Middels de wederzijdse inducties kan de fluxverandering worden omgezet in stroomverandering:

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{d(L_{11}I_1)}{dt} - \frac{d(L_{12}I_2)}{dt} \\ V_2 &= -\frac{d(L_{22}I_2)}{dt} - \frac{d(L_{21}I_1)}{dt} \end{aligned}$$

Zoals we eerder benadrukten hebben de spoelen een vaste stand ten opzichte van elkaar (ze mogen dus wel tezamen draaien!). De L -coëfficiënten zijn alle constant, en kunnen voor de differentiaal worden gehaald:

$$V_1 = -L_{11}\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{dI_2}{dt} \quad V_2 = -L_{22}\frac{dI_2}{dt} - L_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

Merk op, dat de spanning de som is van twee termen. De eerste term wordt alléén bepaald door de stroom in de spoel zelf; of de andere spoel er is of niet, de zelfinductie term is *altijd* aanwezig. De tweede term is het gevolg van de invloed van de stroom in de éne spoel op de andere spoel, en drukt de wederzijdse beïnvloeding uit; die term is *niet altijd* aanwezig.

Opg 3.3.3 * De spoelen 1 en 2 hebben resp 200 en 800 windingen. Een stroom van 2 A in spoel 1 geeft een magnetische flux van $1,8 \cdot 10^{-4}$ Wb door elke winding van spoel 2.

a de wederzijdse inductie L_{21} [Antw. $L_{21} = 0,072$ H]

b de in spoel 2 opgewekte spanning als in spoel 1 de stroom van 3 A tot 1 A afneemt in 0,3 s [Antw. $V_2 = 0,48$ V]

Opg 3.3.4 *** Een spoel (2) met N_2 windingen is gewonden om een solenoïde (1) met zeer grote lengte l_1 , aantal windingen N_1 en zelfinductie L_1 . Laat zien dat de wederzijdse inductie L_{21} van dit stelsel gelijk is aan:

$$L_{21} = \frac{N_2}{N_1}L_1$$

Wederzijdse inductie M Het bijzondere van de op bovenstaande manier gedefiniëerde wederzijdse inducties is, dat niet alleen twee ervan zelfinducties zijn: $L_{11} = L_1$ en $L_{22} = L_2$, maar dat de twee coëfficiënten L_{12} en L_{21} feitelijk gelijk zijn. Daarom werken we met de **wederzijdse inductie M** (engels ‘mutual’, ‘wederzijds’):

$$M = L_{12} = L_{21}$$

In de volgende paragraaf zullen we de gelijkheid van de beide wederzijdse inducties aantonen door middel van een energiebeschouwing. De vergelijking voor de wederzijdse inductiespanningen kan nu worden uitgedrukt in drie inducties, de twee zelfinducties L_1 , L_2 en de wederzijdse inductie M .

Conclusie *Bij magnetisch gekoppelde spoelen zal een stroomverandering in de ene spoel een inductiespanning in beide spoelen tengevolge hebben evenredig met de inducties:*

$$V_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad V_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

Koppelfactor k Uit de energiebeschouwing zal tevens blijken, dat de wederzijdse inductie niet los kan worden gezien van de twee zelfinducties: de grootte van de *wederzijdse inductie wordt beperkt door de grootten van de zelfinducties:*

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

Op grond daarvan is het zinvol om te praten over de **koppelfactor k** tussen de twee spoelen:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad \text{met} \quad |k| \leq 1$$

Wie zich erover verwondert dat er niet gewoon staat $k \leq 1$, heeft nog niet in de gaten gekregen, dat de koppeling negatief kan zijn. Bij *negatieve koppeling* is de koppelfactor k *negatief*, en dus ook de wederzijdse inductie M . Dat gebeurt als de richting van de flux Φ_{12} *tégen* de richting van de eigenflux van spoel 1 (bepaald door de positieve stroom) is. Houdt goed in de gaten, dat de afspraak over het teken van de stroom ook twee ándere tekens vastlegt: het teken van de *flux* (met de rechterschroefregel); en het teken van de *spanning* in de kring (spanningsrichting = stroomrichting).

Conclusie *De koppelfactor k bepaalt de wederzijdse inductie M in termen van de zelfinducties L_1 en L_2 : $M = k\sqrt{L_1 L_2}$. k wordt bepaald door de afmetingen, vorm en dergelijke; echter is $|k| \leq 1$.*

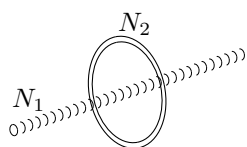
Opg 3.3.5 * Wanneer twee spoelen, genummerd a en b, gekoppeld zijn geldt *altijd*

1. $L_a > 0$ en $L_{ab} > 0$;
2. $L_b \geq 0$ en $L_{ba} = L_{ab}$;

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

Opg 3.3.6 ** Twee gekoppelde spoelen I en II hebben respectievelijk 100 en 300 windingen. Een stroom van 2 A in spoel I geeft in spoel II een magnetische flux van $5,0 \cdot 10^{-3}$ Wb door elke winding. Als in spoel I de stroom in 0,1 seconde afneemt van 2 tot 0 A, wat is dan de opgewekte spanning in spoel II? [Antw. $V_2 = +15$ V]

Opg 3.3.7 **

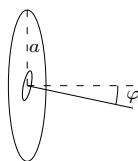


Een solenoïde (1) van 2 m lengte heeft 1000 windingen met een doorsnede van 12 cm^2 . Rond het midden gedeelte is een spoel (2) van 300 windingen aangebracht.

a Bereken de wederzijdse inductie L_{21} ; neem daartoe aan, dat er een stroom van 1 A door de solenoïde gaat, en bereken dan de flux door de spoel. [Antw. $L_{21} = 0,226$ mH]

b Als een stroom van 2 A in de solenoïde in 0,2 s van richting omkeert, bereken dan de spanning in de spoel. [Antw. $V_2 = +4,52$ mV]

Opg 3.3.8 ***



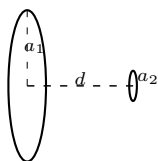
Langs een cirkel met straal a worden N_1 windingen gelegd, spoel 1 vormend. In het middelpunt van de cirkel wordt een klein spoeltje opgesteld; het vlak van het kleine spoeltje maakt een klein hoekje φ met het vlak van de cirkel. Het spoeltje heeft N_2 windingen met oppervlak A_2 . Laat zien dat de wederzijdse inductie is:

$$M = \frac{1}{2} \mu N_1 N_2 \frac{A_2}{a} \cos(\varphi)$$

Aanwijzing: een cirkelvormige stroomkring, met stroomsterkte I en straal R , geeft in een punt van de as op afstand r van de kring een veldsterkte:

$$H = \frac{1}{2} \frac{IR^2}{r^3} \quad \text{cirkelstroom}$$

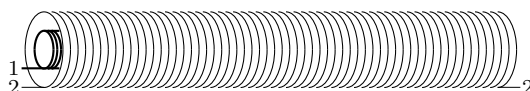
Opg 3.3.9 ****



Twee cirkelvormige stroomkringen zijn coaxiaal opgesteld. Neem aan dat de grootste cirkel 1 een veel grotere straal a_1 heeft dan de kleinste cirkel 2 met straal a_2 . De afstand tussen de cirkelvlakken is d . Bepaal de wederzijdse inductie op de handigste manier (welke kring neem je als de primaire?).

$$[\text{Antw. } M = 1,97 \cdot 10^{-6} \frac{(a_1 a_2)^2}{r^3}, \quad r^2 = a_1^2 + d^2]$$

Voorbeeld Rhumkorff-transformator Bepaal de koppelfactor tussen twee *cilindrische spoelen* met gemeenschappelijke as en gelijke lengte.



Als de spoelen direct op elkaar zijn gewikkeld spreken we van **Rhumkorff-transformator**. We hebben een iets algemenere combinatie van spoelen dan die van de Rhumkorff-transformator. De spoelen zijn concentrisch gewikkeld. De binnenste spoel1 heeft een wikkelstraal r_1 en een wikkel-dichtheid N_1/l_1 ; de buitenste spoel2 heeft wikkelstraal r_2 en wikkel-dichtheid N_2/l_2 . Beiden hebben een lengte l die groot is vgl met de stralen r . Daardoor zijn beide *zelfinducties* 'ideaal':

$$\begin{aligned} L_1 &= N_1 \Phi_{11} / I_1 = N_1 (BA_1) / I_1 = N_1 (\mu H) A_1 / I_1 \\ &= N_1 \mu (N_1 I_1 / l_1) A_1 / I_1 = \mu A_1 N_1^2 / l_1 \\ L_2 &= \mu A_2 N_2^2 / l_2 \end{aligned}$$

We bepalen de wederzijdse inductie M uit L_{12} . Daartoe voeren we stroom door de buitenste spoel2. Door de gehele spoel loopt dan een flux, waarvan een deel door de binnenste spoel1 loopt. Dat deel is evenredig met het oppervlak2, zodat moet gelden

$$\Phi_{12} = \frac{A_1}{A_2} \Phi_{22}$$

Daarmee kunnen we L_{12} in L_2 uitdrukken:

$$\begin{aligned} L_{12} &= N_1 \Phi_{12} / I_2 = N_1 \frac{A_1}{A_2} \Phi_{22} / I_2 \\ &= \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} L_2 \end{aligned}$$

De wederzijdse inductie wordt nu bepaald door èn de wikkelverhouding èn de oppervlakverhouding van de spoelen; door de vgl voor L_2 in te vullen verkrijgen we:

$$M = \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} \mu A_2 N_2^2 / l_2 = N_1 N_2 \mu A_1 / l_2$$

Voor de koppelfactor vinden we in dit geval:

$$\begin{aligned} k &= M / \sqrt{L_1 L_2} \\ &= \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} L_2 / \sqrt{L_1 L_2} = \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} \sqrt{L_2 / L_1} \\ &= \frac{N_1 A_1}{N_2 A_2} \sqrt{A_2 l_1 / A_1 l_2} \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{A_1 l_1 / A_2 l_2} \\ k &= \sqrt{V_1 / V_2} \end{aligned}$$

Daaruit blijkt zonneklaar dat de koppelfactor niet groter dan 1 kan zijn; het binnenste volume V_1 is nu eenmaal kleiner dan het buitenste volume V_2 . En hoe zit dat met negatieve koppeling? De oplettende lezer zal al hebben gezien, dat we, bij het vergelijken van de fluxen, stiekem hebben aangenomen dat de binnenste en buitenste flux gelijkgericht waren. Dáárom kregen we 'automatisch' positieve koppeling. Voor *negatieve koppeling*, *tégenkoppeling* genoemd, moeten we de fluxen van de twee spoelen tegengesteld maken.

- Opg 3.3.10** ** Een toroïde (ringvormige spoel) is in twee lagen gewikkeld. De binnenste laag is spoel1 met een spoeldiameter van 2 cm. De buitenste laag is spoel2 met een spoeldiameter van 2,5 cm. De diameter van de hartlijn van de toroïde is 12 cm. Spoel1 bevat 800 windingen, spoel2 bevat 300 windingen.
- a bereken de zelfinducties L_1 en L_2 van de spoelen. [Antw. $L_1 = 0,670$ mH, $L_2 = 0,147$ mH]
- b Bereken de wederzijdse inductie M . [Antw. $M = 0,251$ mH]
- c Bereken de koppelfactor. [Antw. $k = 0,800$]
- Opg 3.3.11** Twee lange cilindrische solenoïden zijn coaxiaal opgesteld zodat de grootste de kleinste omsluit. De kleinste spoel heeft 1000 windingen met een diameter van 2 mm en een lengte van 40 cm; ze is verder gevuld met een ijzeren kern met een relatieve magnetische permeabiliteit 1000. De grootste spoel heeft 200 windingen met een diameter van 4 cm (over dezelfde lengte 40 cm).
- a ** bereken L_1 van de binnenste solenoïde. [Antw. $L_1 = 9,87$ mH]
- b ** bereken $M = L_{21}$ [Antw. $M = 1,97$ mH]
- c **** bereken L_2 van de buitenste solenoïde (pas op de kern) [Antw. $L_2 = 0,552$ mH]
- d ** bereken k [Antw. $k = 0,845$]
- Opg 3.3.12** *** Spoel1 is een korte spoel met N_1 cirkelvormige windingen in een vlak. Spoel2 is een smalle lange spoel (lengte l_2 meter) met N_2 windingen. Het midden van de as van spoel2 doorsnijdt het vlak van spoel1 in het middelpunt van de cirkel onder een hoek van 30 graden met de normaal op het vlak van spoel1.
- De wederzijdse inductie M is:
- A $N_1 \mu \frac{A_2}{A_1} \frac{N_2}{l_2}$ B $N_1 \mu \frac{A_2}{A_1} \frac{N_1}{l_2} \cos(30^\circ)$
- C $N_1 \mu A_2 \frac{N_2}{l_2}$ D $N_1 \mu A_2 \frac{N_2}{l_2} \cos(30^\circ)$

3.4 Wederzijdse inductie-energie

3.4.1 Inductie-energie gekoppelde spoelen

Inleiding In deze paragraaf zullen we, zoals beloofd, nagaan hoe het is met de *inductie* bij de koppeling van de twee spoelen. Twee argumenten worden gebruikt om twee eigenschappen (in de vorige paragraaf genoemd) te vinden:

omkeerbaarheid Verwisseling van de spoelen leidt tot dezelfde koppeling. Bijgevolg zijn de wederzijdse inducties gelijk.

positieve energie Tegenkoppeling kan niet leiden tot het verdwijnen van velden. Daarom is de koppelfactor beperkt.

Omdat de argumenten ‘algemeen’ zijn, zullen ook de conclusies ‘algemeen geldig’ zijn. De enige beperking is dat de spoelen ten opzichte van elkaar niet bewegen; ze mogen dus wel tezamen draaien—om één as bijvoorbeeld. *De spoelen zitten als het ware in één vast frame.* We nemen de situatie met twee spoelen, genoemd spoel1 en spoel2.

Eerste spoel vullen: inductie-energie zelfinductie Voor het bepalen van de energie die zit in het veld van beide spoelen totaal, zullen we dezelfde strategie gebruiken als in deel 1, paragraaf 4.5., toen het om de inductie-energie van een spoel ging. Het bleek daar dat de elektrische energie W , nodig om de stroom van 0 naar I te doen groeien, gelijk is aan de inductie-energie van de zelfinductie:

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Die energie is gelijk aan de veldenergie in de spoel. Uitgaande van twee stroomloze spoelen, kost het ‘aanzetten’ van de stroom I_1 door spoel1 de energie:

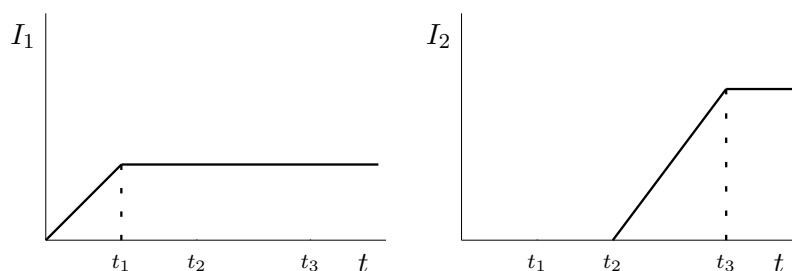
$$W_{11} = \frac{1}{2}L_1I_1^2$$

Daarna tweede spoel vullen Vanuit deze situatie gaan we de stroom in spoel2 aanzetten, er op lettend dat de stroom in spoel1 *constant* I_1 blijft. Doordat een gedeelte van de flux uit de tweede spoel door de eerste zal gaan, veroorzaakt het aanzetten van I_2 een inductiespanning in spoel1. *Die inductiespanning moet worden gecompenseerd*, en dat kost energie. Per seconde zijn daarom twee soorten energie nodig: de energie om de tweede spoel te vullen, en de energie om het veld in de eerste spoel constant te houden. Voor het laatste geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{12}}{dt} &= V_{12}I_1 = -(-L_{12}\frac{dI_2}{dt})I_1 \\ dW_{12} &= L_{12}I_1dI_2 \\ W_{12} &= L_{12}I_1I_2 \end{aligned}$$

De laatste integratie was eenvoudig, omdat bij het vullen in alle tijdsdelen I_1 constant is gebleven. Het aanzetten van I_2 , onder het gelijktijdig constant houden van I_1 , heeft *in spoel2* nog een energie gekost:

$$W_{22} = \frac{1}{2}L_2I_2^2$$



Figuur 3.5 Grafische voorstelling van het vullen van de twee gekoppelde spoelen. Eerst wordt de eerste spoel gevuld door de stroom I_1 op het juiste niveau te brengen, en daarna zo te houden. Daarna wordt de tweede spoel verder gevuld (door de koppeling er is reeds enige vulling) door de stroom I_2 in de tweede spoel te verhogen.

Beide spoelen gevuld: wederzijdse inductie-energie De *geleverde* elektrische energie:

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

is gelijk aan de totale *veldenergie*, opgeslagen in het veld van beide spoelen. Er is iets merkwaardigs aan deze uitdrukking voor de totale energie: in de middelste term met de inductie-energie van de wederzijdse inductie is de *volgorde van het aanzetten* terug te vinden, doordat er L_{12} staat (en niet L_{21}). Maar energie mag niét van de volgorde van vullen afhangen! Daarom mogen L_{12} en L_{21} gelijk zijn, genaamd de *wederzijdse inductie* M , en is de **wederzijdse inductie-energie**:

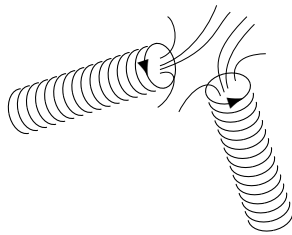
$$\boxed{M = L_{12} = L_{21}} \quad \boxed{W_M = MI_1I_2}$$

Deze ‘omkeerbaarheid’ is heel goed te vergelijken met het principe uit de mechanica: ‘actie is reactie’. In beide gevallen is de achterliggende gedachte dat uit een totaal systeem geen arbeid kan worden verkregen door in een of andere volgorde te handelen.

Conclusie De magnetische veld **inductie-energie** van twee gekoppelde ideale spoelen met zelfinducties L_1 en L_2 en wederzijdse inductie M bij stromen I_1 en I_2 door de spoelen is:

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

Positieve veldenergie In de inleiding merkten we al op, dat *de totale veldenergie niet negatief kan worden*. Voor wie denkt, dat dat geen informatie van betekenis is, is het goed zich twee spoelen in te denken waarvan de uiteinden naar elkaar toe zijn gekeerd. De ‘eigen’ flux en de ‘andere’ flux lopen precies tegen elkaar in, en er resulteert een veld, dat—bij een geschikte stroomkeuze—praktisch verdwijnt.



Figuur 3.6 Twee spoelen zijn zó tov elkaar geplaatst, dat de fluxen elkaar binnen een spoel tegenwerken (dat geldt wederzijds).

Dan hebben we extreme *tegenkoppeling*, met *negatieve* wederzijdse inductie M . Sterkere wederzijdse ‘tegenwerking’ dan waarbij de veldenergie verdwijnt is niet denkbaar. We kunnen het zoeken naar een minimum van de energie als volgt doen. In de uitgangspositie staan de spoelen in een bepaalde stand—de wederzijdse inducties zijn dan waardevast. Vandaar kunnen we de stroom $x = I_1$ in spoel1 variëren terwijl we de stroom I_2 in spoel2 vasthouden.

Ongeacht de uitgangspositie zal nu *altijd* de energie *positief* moeten zijn.

Beperking wederzijdse inductie Een vergroting of verkleining van de waarde van de stroom I_2 in spoel2 zal niets veranderen aan het positief of negatief zijn van de totale energie W . Het is dus voldoende om het geval met $I_2 = 1$ te bekijken. De **totale energie** $y = W$, als $I_2 = 1$, kan dan in $x (= I_1)$ worden uitgedrukt:

$$y = \frac{1}{2}L_1x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2$$

Het is een positieve tweedegraadsfunctie, waarvan de grafiek een dalparabool is die geheel boven de as moet liggen. Eerst ‘kwadraat afsplitsen’:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}L_1\left(x^2 + 2\frac{M}{L_1}x\right) + \frac{1}{2}L_2 \\ &= \frac{1}{2}L_1\left(x + \frac{M}{L_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{L_1}(L_1L_2 - M^2) \end{aligned}$$

Voor $x = -M/L_1$ is y minimaal, met minimum waarde $y = \frac{1}{2}\frac{1}{L_1}(L_1L_2 - M^2)$. Dat is positief mits:

$$\boxed{M^2 \leq L_1L_2}$$

- de *wederzijdse inductie* M wordt in absolute waarde begrensd door de zelfinducties L_1 en L_2 .

Koppelfactor Op grond van de begrenzing van de wederzijdse inductie M maken we gebruik van de *koppelfactor* k met de waarde

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

Uit de ongelijkheid voor M volgt direct de koppelfactor-begrenzing:

$$k^2 \leq 1$$

Als $0 < k \leq 1$ zeggen we dat er **meekoppeling** is, als $k = 0$ is er geen koppeling, en als $-1 \leq k < 0$ dan is er **tegenkoppeling**.

Laagste inductie-energie We zullen nagaan hoe en wanneer de koppeling extreem is, door het minimum (laagste waarde) van de inductie-energie te zoeken. De dalparabool heeft een minimum bij $x = -M/L_1 = -k\sqrt{L_1 L_2}/L_1 = -k\sqrt{L_2/L_1}$. De minimale waarde van y dan: $y = -\frac{1}{2}M^2/L_1 + \frac{1}{2}L_2 = \frac{1}{2}L_2(1 - k^2)$. Bijgevolg kan de veldenergie slechts dan totaal *verdwijnen*, als de uitgangspositie zo is gekozen dat de koppelfactor extreem is:

maximale meekoppeling $k = 1$ of $M = +\sqrt{L_1 L_2}$

maximale tegenkoppeling $k = -1$ of $M = -\sqrt{L_1 L_2}$

Bovendien moet de stroom geschikt worden gekozen. Denk eraan, dat dit slechts ging over de laagste energie bij een vaste stroom door spoel2: $I_2 = 1$. Dat is ook te zien aan de uitdrukkingen voor de minimale y (alleen L_2) en de bijpassende stroomwaarde x (volgorde van L_1 en L_2).

Opg 3.4.1 * Via de totale veldenergie van twee gekoppelde spoelen is aan te tonen dat de wederzijdse inducties van de twee spoelen gelijk zijn. Dat is zo, omdat

- A de vergelijking voor W_{totaal} hetzelfde blijft als we eerst spoel1 aanzetten en daarna spoel2, of eerst spoel2 en daarna spoel1.
- B de vergelijking voor W_{totaal} hetzelfde blijft, met uitzondering van de wijziging van L_{12} naar L_{21} , als we eerst spoel1 aanzetten en daarna spoel2, of eerst spoel2 en daarna spoel1
- C de totale veldenergie in de beide spoelen niet negatief mag worden

Opg 3.4.2 ** Een spoel1 met $L_1 = 1$ mH en een spoel2 met $L_2 = 16$ mH zijn zo opgesteld, dat er een variabele koppeling is.

a * bereken de minimale veldenergie W . [Antw. $W = 0$]

Verder is de stroom in spoel1 gelijk 2 A en $M = 2$ mH.

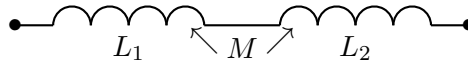
b bereken de minimale veldenergie W . [Antw. $W = 1,5$ mJ]

c bereken de bij de minimale veldenergie behorende stroom in spoel2.

[Antw. $I_2 = -0,25$ A]

3.4.2 Vervangingsinductie geschakelde spoelen

Spoelen in serie We bezien een serieschakeling van twee spoelen met zelfinducties L_1 en L_2 die gekoppeld zijn door een wederzijdse inductie M , waarover een spanning U staat.



Figuur 3.7 Serieschakeling van twee spoelen met wederzijdse beïnvloeding doordat de fluxen in de andere spoel dringen.

Allereerst merken we op, dat de inductiespanning V in een spoel leidt tot een *spanningsval* $U = -V$ over de spoel. Door beide spoelen gaat dezelfde stroom $I = I_1 = I_2$. Over beide spoelen staat de spanning $U = U_1 + U_2$. Over elk der aparte spoelen wordt de spanning:

$$\begin{aligned} -U_1 &= -L_1 dI_1/dt - M dI_2/dt \\ &= -(L_1 + M) dI/dt \\ -U_2 &= -L_2 dI_2/dt - M dI_1/dt \\ &= -(L_2 + M) dI/dt \end{aligned}$$

De spanning verdeelt zich over de spoelen in de verhouding:

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1 + M}{L_2 + M}} \quad U_1 + U_2 = U$$

Serie-inductie De totale spanning U over de **vervangingsinductie** L moet voldoen aan de inductievergelijking en aan de somvergelijking:

$$U = L dI/dt = (L_1 + 2M + L_2) dI/dt$$

Uitgedrukt in de afzonderlijke zelfinducties en wederzijdse inductie wordt de **serie-inductie** L_s van gekoppelde spoelen in serie:

$$\boxed{L_s = (L_1 + M) + (L_2 + M)}$$

Merk op dat, vergeleken met de situatie zonder koppeling, de aparte zelfinducties zijn *verhoogd met de wederzijdse inductie* M . Neem bijvoorbeeld de totale energie W van de vervangingsinductie:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 = \frac{1}{2} L_1 I^2 + M I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 \\ &= \frac{1}{2} (L_1 + 2M + L_2) I^2 = \frac{1}{2} L_s I^2 \end{aligned}$$

Conclusie Bij spoelen in serieschakeling die gekoppeld zijn kunnen we de koppeling in rekening brengen door de zelfinducties L_1 en L_2 te vervangen door effectieve zelfinducties $L_1 + M$ en $L_2 + M$.

Koppelfactor en effectieve zelfinducties De ‘effectieve’ inducties $L_1 + M$ en $L_2 + M$ kunnen in de *koppelfactor* worden uitgedrukt. Dan geldt $L_1 + M = L_1 + k\sqrt{L_1L_2} = (\sqrt{L_1/L_2} + k)\sqrt{L_1L_2}$ en $L_2 + M = (\sqrt{L_2/L_1} + k)\sqrt{L_1L_2}$. Neem nu aan dat de tweede spoel de kleinste is. Dan is $L_1/L_2 > 1$ en $L_2/L_1 < 1$. Bijgevolg kan de koppeling zo worden gekozen dat de kleinste spoel effectief nul wordt, maar de grootste spoel blijft effectief altijd positief. De grootste waarde van de vervangingsinductie ontstaat bij totale *meekoppeling*, en de kleinste waarde bij totale *tegenkoppeling*—die waarde is echter altijd positief (tenzij de spoelen gelijk waren).

Opg 3.4.3 *** Twee spoelen, 1 en 2, met zelfinducties L_1 en L_2 , en wederzijdse inductie M , staan in serie geschakeld. Voor de serieinductie L_s van de gekoppelde spoelen kan gelden:

1. $L_s > L_1 + L_2$
2. $L_s < L_1 + L_2$

- A alleen eerste kan waar zijn
 B alleen tweede kan waar zijn
 C beide zouden waar kunnen zijn

Opg 3.4.4 ** Twee zelfde spoelen staan in serieschakeling. Ze zijn zodanig opgesteld, dat de helft van de flux uit de ene spoel doordringt in de andere spoel. Als de zelfinductie van één spoel L is, wat is dan de waarde van de zelfinductie van de schakeling? [Antw. $L_{\text{totaal}} = 3L$]

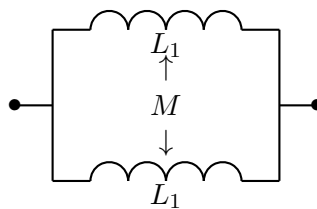
Parallele spoelen We bezien twee parallel geschakelde gekoppelde spoelen met zelfinducties L_1 en L_2 en wederzijdse inductie M waardoor een stroom I wordt gevoerd. Bij parallelschakeling moet de spanning over de spoel gelijk zijn aan de spanning over elk der spoelen: $U = U_1 = U_2$. De totale stroom daarentegen is de som van de stromen door de afzonderlijke spoelen: $I = I_1 + I_2$.

Over elk der aparte spoelen, en over de vervangingsinductie L van de parallel geschakelde, wordt de spanning:

$$U_1 = L_1 dI_1/dt + M dI_2/dt$$

$$U_2 = M dI_1/dt + L_2 dI_2/dt$$

$$U = L dI/dt$$



Figuur 3.8 Parallelschakeling van twee spoelen met koppeling van de velden. Let erop, dat het veld van de ene spoel ‘omgekeerd’ door de andere spoel gaat, dwz dat ze ‘normaal geschakeld’ tegenkoppelen.

Rekening houdend met de gelijkheid der spanningen krijgen we:

$$\begin{aligned}L_1 dI_1/dt + M dI_2/dt &= L dI/dt \\M dI_1/dt + L_2 dI_2/dt &= L dI/dt\end{aligned}$$

We kunnen I_2 uit de eerste vergelijking elimineren door de substitutie: $I_2 = I - I_1$, en analoog I_1 uit de tweede:

$$\begin{aligned}(L_1 - M) dI_1/dt &= (L - M) dI/dt \\(L_2 - M) dI_2/dt &= (L - M) dI/dt\end{aligned}$$

Dit zijn vergelijkingen voor de *veranderingen* van de twee onbekende stroom-afgeleiden. Dat kan alleen maar *altijd* een correcte oplossing geven als ook tussen de stromen zelf eenzelfde vaste verhouding geldt:

$$\boxed{\frac{I_1}{I} = \frac{L - M}{L_1 - M}} \quad \boxed{\frac{I_2}{I} = \frac{L - M}{L_2 - M}}$$

De stromen verhouden zich als de *omgekeerde effectieve zelfinducties* $L_1 - M$ en $L_2 - M$:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2 - M}{L_1 - M} \quad I_1 + I_2 = I$$

Parallelinductie Een uitdrukking voor de vervangingsinductie L van parallel geschakelde gekoppelde spoelen vinden we door de gevonden takstromen in te vullen in de stroom vergelijking: $I_1 + I_2 = I$ en de stroom I weg te delen:

$$\frac{L - M}{L_1 - M} + \frac{L - M}{L_2 - M} = 1$$

Delen we de factor $L - M$ uit, dan vinden we de vergelijking voor de **parallelinductie** L_p uitgedrukt in omgekeerde effectieve inducties:

$$\boxed{\frac{1}{L_p - M} = \frac{1}{L_1 - M} + \frac{1}{L_2 - M}}$$

Merk op dat, vergeleken met de situatie zonder koppeling, de zelfinducties effectief zijn *verlaagd met de wederzijdse inductie* M . Het verschil met de serieschakeling is, dat dáár de wederzijdse inductie bij de zelfinducties moest worden opgeteld, terwijl die bij de parallelschakeling moet worden afgetrokken. In werkelijkheid zal echter het resultaat toch in dezelfde richting gaan, omdat bij parallelle schakeling meestal tegenkoppeling ontstaat.

Conclusie *Bij parallelle spoelen die gekoppeld zijn kunnen we de koppeling in rekening brengen door de zelfinducties L_1 en L_2 te vervangen door effectieve zelfinducties $L_1 - M$ en $L_2 - M$.*

Koppelfactor en effectieve zelfinducties Analooq aan de behandeling van de serieschakeling, kunnen we laten zien dat van de effectieve inducties $L_1 - M$ en $L_2 - M$ de grootste altijd positief blijft, maar dat de kleinste wel degelijk negatief kan worden. De vervangingsinductie kan worden opgelost als:

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

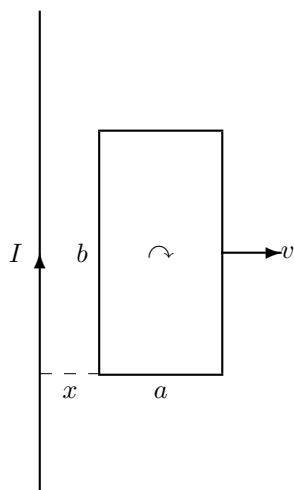
zodat dus

$$L_1 - L_p = \frac{(L_1 - M)^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad L_2 - L_p = \frac{(L_2 - M)^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Omdat $L_1 - L_p$ en $L_2 - L_p$ altijd positief zijn, kan L_p slechts ten hoogste gelijk worden aan de *kleinste zelfinductie*, zeg L_2 . De *maximale* parallelinductie wordt inderdaad bereikt als $M = L_p = L_2$, de *kleinste* van de zelfinducties, waarbij dus $L_2 - M = 0$. Door nog sterker mee te koppelen, worden de effectieve zelfinducties $L_1 - M$ en $L_2 - M$ *tegengesteld* van teken, dus ook de takstromen zodat $I_2 > I_1$! Aan de andere kant wordt de *minimale* parallelinductie $L_p = 0$ bereikt bij *extreme koppeling* $M^2 = L_1 L_2$.

- Opg 3.4.5** ** Twee spoelen zijn magnetisch gekoppeld; de zelfinducties zijn $L_1 = 10$ mH en $L_2 = 25$ mH, de wederzijdse inductie is $M = 15$ mH. Wat is de vervangingsinductie L_p bij parallelschakeling? [Antw. $L_p = 8,75$ mH]
- Opg 3.4.6** ** Twee spoelen van 1 mH en 9 mH resp. worden parallel geschakeld, waarbij ze elkaar wederzijds beïnvloeden met koppelfactor k .
- Bepaal de zelfinductie van de schakeling als functie van k .
[Antw. $L_p = 9(1 - k^2)/(10 - 6k)$ mH]
 - Bepaal de minimum waarde van L_p en de bijbehorende k -waarden uit de gevonden uitdrukking. [Antw. $L_p = 0$, $k = -1$ of $k = 1$]
 - Bepaal de maximum waarde van L_p en de bijbehorende k -waarde.
[Antw. $L_p = 1$ mH, $k = \frac{1}{3}$]
- Opg 3.4.7** *** Twee spoelen, 1 en 2, met zelfinducties L_1 en L_2 , en wederzijdse inductie M , staan parallel geschakeld. Voor de zelfinductie L_p van het geheel kan gelden:
- $\frac{1}{L_p} > \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
 - $\frac{1}{L_p} < \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
- alleen eerste kan waar zijn
 - alleen tweede kan waar zijn
 - beide zouden waar kunnen zijn

Opg 3.4.8 ****



Een rechthoekige stroomkring met zijde a in de x -richting en zijde b in de y -richting wordt, loodrecht op een stroomdraad in de y -richting, weggetrokken met een constante snelheid v . De stroomdraad voert stroom I . De afstand tussen draad en kring $x = vt$.

a Bepaal de wederzijdse inductie M tussen draad en kring, als functie van de afstand x , door de flux te bepalen die door de kring gaat.

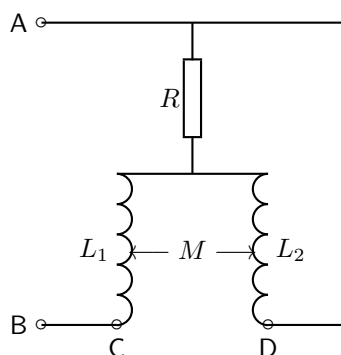
$$[\text{Antw. } M = 2 \cdot 10^{-7} b \ln(1 + a/x)]$$

b Bepaal de inductiespanning in de kring door de uitdrukking te gebruiken

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -I \frac{dM}{dt}$$

$$[\text{Antw. } U = 2 \cdot 10^{-7} abv \frac{I}{(a+x)x}]$$

Opg 3.4.9 ***



De spoelen L_1 en L_2 zijn gekoppeld met een variabele koppelfactor k .

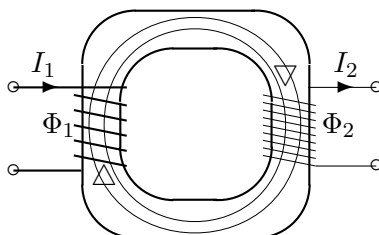
a Sluit tussen de klemmen A en B een gelijkspanning U_i aan en bepaal de waarde van k waarbij door R geen stroom loopt. ($L_1 > L_2$)

$$[\text{Antw. } k = -\sqrt{L_2/L_1}]$$

b Verwissel, bij dezelfde waarde van k , de aansluitingen van de spoelen bij de punten C en D. Laat zien, na lange tijd, dat er een stroom U_i/R zal gaan lopen.

3.5 Transformator

Inleiding De belangrijkste toepassing van de wederzijdse beïnvloeding van spoelen is de transformator. Ideaal is een zo groot mogelijke koppeling tussen de twee spoelen in de transformator. In geval van extreme koppeling, meestal bereikt door gebruik te maken van een gelamelleerde weekijzeren kern, spreekt men van een **ideale transformator** (franse Gaulard en engelse Gibbs, 1881). De naam transformator is ontleend aan het latijn: ‘trans-formare’ is ‘van vorm doen veranderen’. De spoel aan de ingang wordt de **primaire spoel** genoemd, de spoel aan de uitgang de **secundaire spoel**. Door inductie zal een variabele ingangsspanning altijd een uitgangsspanning geven: de transformator heeft *spanningsversterking*. Bij een belaste uitgang heeft de transformator ook *stroomversterking*.



Figuur 3.9 De ideale transformator bestaat uit een kringvormige magnetiseerbare kern waardoor een magnetische flux Φ gaat. Aan de ingang gaat de kern door de primaire spoel, en aan de uitgang door de secundaire spoel.

Wikkelverhouding transformator Omdat de spoelen beide om dezelfde kern zijn gewikkeld, wordt de verhouding van de zelfinducties alleen bepaald door de wikkelverhouding. Dat geldt *algemener* dan alleen voor de ideale transformator, waar $k = 1$. Immers, de fluxen binnen de spoel gaan door hetzelfde ijzer, met dezelfde doorsnede en dezelfde ijzerlengte (dat geldt ook als de kern niet gesloten is, en er fluxverliezen optreden). Volgens de theorie van de magnetische kring (deel 1, par 4.5.2) is er een enkele magnetische weerstand R_m voor beide kringen, waarvoor geldt

$$R_m = \frac{N_1^2}{L_1} = \frac{N_2^2}{L_2}$$

zodat voor de *wikkelverhouding* van de transformator geldt:

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}$$

3.5.1 Ideale transformator

Kenmerk ideale transformator Waardoor wordt nu de ideale transformator gekenmerkt? Wel, bij de ideale **transformator** gaat *alle* flux, die in de ene spoel wordt opgewekt, door de andere spoel en omgekeerd:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$$

Bijgevolg is er eigenlijk maar één flux : de flux Φ die door beide spoelen gaat. Anders gezegd: er is géén **fluxverlies** als de flux van de ene naar de andere spoel gaat. Dat wordt bijvoorbeeld bewerkstelligd door een kringvormige magnetiseerbare kern, die *door beide spoelen* gaat, en gemaakt is van ideaal 'verliesvrij' magnetiseerbaar materiaal (geen 'ijzer verliezen': geen hystereseverlies, geen inductiestroomverlies).

De flux door ieder van de spoelen kan worden uitgedrukt in de stroomsterkten door de wikkelingen van beide spoelen, I_1 en I_2 : $N_1\Phi_{12} = L_{12}I_2$ enz. De evenredigheidsconstanten zijn de zelfinducties van de primaire en secundaire kring, primair L_1 en secundair L_2 , en de wederzijdse inductie M (volgens paragraaf 3.3 zijn L_{12} en L_{21} gelijk zijn aan M).

Dus worden de fluxen uitgedrukt in de stromen:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_{11} + \Phi_{12} = (L_1 I_1 + M I_2) / N_1 \\ \Phi_2 &= \Phi_{21} + \Phi_{22} = (M I_1 + L_2 I_2) / N_2\end{aligned}$$

Maximale koppeling ideale transformator We zullen nu laten zien dat de *ideale* transformator *maximale meekoppeling* heeft, dus een koppelfactor +1 tussen de primaire en de secundaire zijde. Zoals gezegd zullen de beide fluxen *altijd* gelijk zijn, ongeacht de *stroomsterkten*. Maar dat kan alleen als de constanten, waarmee de stromen vermenigvuldigd worden, bij beide spoelen dezelfde waarde hebben. Dat is, als

$$\frac{L_1}{N_1} = \frac{M}{N_2} \quad \frac{M}{N_1} = \frac{L_2}{N_2}$$

Dit kan worden gelezen als verhoudingen:

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Hieruit volgt de eenvoudige betrekking tussen wederzijdse inductie en zelfinducties bij de *ideale* transformator:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad k = 1$$

Omdat de ideale transformator geen fluxverlies heeft is er totale meekoppeling $k = +1$.

Spanningsversterking ideale transformator Nu de fluxen door de spoelen bekeken zijn, bezien we de *inductiespanningen* die in de spoelen worden opgewekt tengevolge van de veranderingen van de stromen die door de wikkelingen van de spoelen gaan. In de primaire spoel 1 wordt opgewekt V_1 , in spoel 2 ontstaat V_2 . Volgens de inductiewet van Faraday:

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{en} \quad V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Vergelijking van de spanningen in de spoelen leert dat beide evenredig zijn met dezelfde fluxverandering, omdat de fluxen gelijk zijn. Bij verwaarloosbare ingangsweerstand is V_1 tegengesteld aan de ingangsspanning U_i , terwijl V_2 gelijk is aan de uitgangsspanning U_o .

Conclusie *Bij de ideale transformator is de spanningsversterking tegengesteld aan de wikkelverhouding:*

$$\boxed{\frac{U_o}{U_i} = -\frac{N_2}{N_1}}$$

Spanningsversterking onbelaste transformator met lage R_1 Bij de *volledig onbelaste* transformator, eventueel *niet-ideaal*, is de spoel aan de secundaire zijde open, en dus loopt er geen stroom: $I_2 = 0$. Aan de primaire zijde loopt er, bij een of andere bronspanning U_i een zogenaamde **nullaststroom** $I_{1,0}$. Volgens Faraday zullen de inductiespanningen worden bepaald door de nullaststroom:

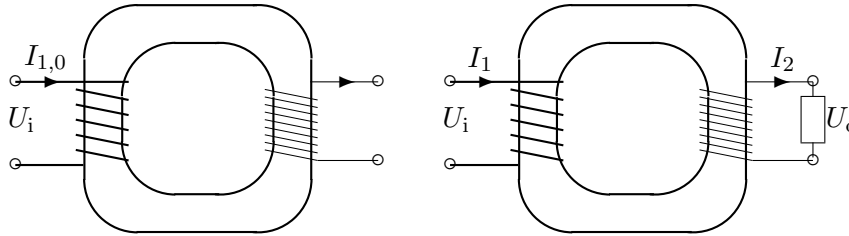
$$\begin{aligned} V_1 &= -L_1 dI_{1,0}/dt \\ V_2 &= -M dI_{1,0}/dt \end{aligned}$$

Daaruit concluderen we voor de **spanningsversterking**:

$$\frac{U_o}{U_i} = -\frac{V_2}{V_1} = -\frac{M}{L_1} = -k \frac{N_2}{N_1}$$

Conclusie *Bij de onbelaste transformator met lage ingangsweerstand wordt de spanningsversterking mede bepaald door de koppelfactor:*

$$\boxed{\frac{U_o}{U_i} = -k \frac{N_2}{N_1}}$$



a Onbelast: primaire nullaststroom.

b Belast: stroom door beide spoelen.

Figuur 3.10 Ideale transformator met ingangsspanning U_i en met verwaarloosbare ingangsweerstand.

Stroomversterking belaste transformator met lage R_1 Bezie de stroom I_1 door de primaire wikkelingen en de stroom I_2 door de secundaire wikkelingen van de belaste transformator, met aan de primaire kant een ingangsspanning $U_i = -V_1$, en aan de secundaire kant een uitgangsspanning $U_o = V_2$ over de belasting. Vergelijk dit met wat er gebeurt als we de secundaire kant niet belasten, dus open houden als boven. We gaan ervan uit dat de ingangsspanning niet van de belasting afhangt. Door de ‘onbelaste’ ingangsvergelijking af te trekken van de ‘belaste’ volgt voor de primaire kring:

$$0 = -L_1 \frac{d(I_1 - I_{1,0})}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$

Dit geldt voor elke ingangsspanning, dus moeten de verhouding van de stromen en de inducties tegengesteld zijn:

$$\frac{I_2}{I_1 - I_{1,0}} = -\frac{L_1}{M} = -\frac{1}{k} \frac{N_1}{N_2}$$

Conclusie *Bij de transformator met verwaarloosbare ingangsweerstand en rekening houdend met de nullaststroom, is de stroomversterking het omgekeerde van de spanningsversterking onbelast:*

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1 - I_{1,0}} = -\frac{1}{k} \frac{N_1}{N_2}}$$

Faseverschil Er is een verschil in fase van 180° in de secundaire kring tov de primaire kring, te zien aan het minteken. Meer in het algemeen kan er een willekeurige faseverdraaiing zijn, als de belasting niet alleen een weerstands karakter heeft. We zullen later hierop terugkomen. Let er wel op, dat het teken van de primaire en de secundaire kring gekoppeld is door de afspraak die hoort bij de ideale transformator: “door beide spoelen gaat de flux in ‘dezelfde’ richting” (meedraaien dus!).

Ijzerverliezen Feitelijk zouden we de stroomversterking óók uit een beschouwing over de *energie* hebben kunnen vinden. Aan de primaire en secundaire zijde van de transformator hebben we stromen en (inductie)spanningen. Voor het in stand houden van die stromen en spanningen is er per seconde een hoeveelheid energie nodig, het **benodigde elektrische vermogen** P dat gelijk is aan het **vermogensverlies** in de transformator. Daarbij moeten we juist de tegenspanning leveren van de opgewekte spanningen, zodat het benodigde elektrische vermogen is:

$$P = I_1(-V_1) + I_2(-V_2)$$

Uit de spanningsversterking en de stroomversterking volgt dat we de secundaire spanning V_2 en de secundaire stroom I_2 kunnen uitdrukken in die van de primaire kring. Verder is bij verwaarloosbare primaire weerstand $U_i = -V_1$. Ingevuld in de vermogensvergelijking krijgen we:

$$\begin{aligned} P &= I_1 U_i + \left(-\frac{N_1}{N_2}(I_1 - I_{1,0})\right) \left(-\frac{N_2}{N_1} V_1\right) \\ &= I_1 U_i - (I_1 - I_{1,0}) U_i \\ &= I_{1,0} U_i \end{aligned}$$

Door het wegvallen van de eerste term resteert slechts de term $I_{1,0} U_i$. Maar dat is het vermogensverlies in onbelaste toestand $P_{1,0}$! Het vermogensverlies hangt dus niet van de belasting af, maar van de energieverliezen door inductie: de ijzerverliezen.

Conclusie *Bij transformatie met verwaarloosbare ingangswaerstand (als de ingangsspanning U_i en de nullaststroom $I_{1,0}$ is) is het vermogensverlies ongeacht de belasting:*

$$P = P_{1,0} = I_{1,0} U_i$$

Opg 3.5.1 * Bepaal welke van de volgende eigenschappen gelden bij een ideale transformator (zonder fluxverlies).

I De flux door de primaire spoel is gelijk aan die door de secundaire.

II De wikkilverhouding $N_2/N_1 = \sqrt{L_2/L_1}$ ongeacht de wikkellengten.

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

Opg 3.5.2 ** Bij een ideale wikkilverhouding is de wikkilverhouding $N_2/N_1 = 71$. Een ingangsspanning met (*effectieve*) waarde $U_i = 7\text{V}$ geeft in onbelaste toestand een ingangsstroom $I_{1,0} = 300\text{mA}$, en in belaste toestand een ingangsstroom $I_1 = 1\text{A}$ en een uitgangsstroom I_2 en een uitgangsspanning U_o .

a Bereken U_o effectief. [Antw. $U_o = 497\text{V}$]

b Bereken I_2 effectief. [Antw. $I_2 = 9,9\text{mA}$]

c Bereken het ingangsvermogen P_1 en het uitgangsvermogen P_2 in belaste toestand. [Antw. $P_1 = 7\text{W}$; $P_2 = 4,9\text{W}$]

Opg 3.5.3 *** Bij een ideale transformator is het ingangsvermogen $P_1 = I_1 U_i$ en het uitgangsvermogen $P_2 = I_2 V_2$. Het ingangsvermogen in onbelaste toestand is $P_{1,0} = I_{1,0} U_i$. Dan geldt:

- A $P_1 + P_2 + P_{1,0} = 0$
- B $P_1 + P_2 - P_{1,0} = 0$
- C $P_1 - P_2 + P_{1,0} = 0$
- D $P_1 - P_2 - P_{1,0} = 0$

Opg 3.5.4 ** De spoelen van een inductor van Rhumkorff (een voorbeeld van een ideale transformator) zijn 40 cm lang en hebben een diameter van 5 cm. De primaire spoel heeft 80 windingen. Uit hoeveel windingen moet de secundaire spoel bestaan om er voor te zorgen, dat een stroomverandering in de primaire spoel van 5 A per 0,01 s in de secundaire spoel een spanning van 2000 V opwekt? Neem aan dat er een ijzern kern is met een $\mu_r = 1000$.

[Antw. $N_2 = 8106$]

3.5.2 Niet-ideale transformator

Transformator model Een niet-ideale transformator stellen we ons voor met aan de primaire zijde een zelfinductie L_1 met een (inwendige) weerstand R_1 , aan de secundaire zijde een zelfinductie L_2 met (inwendig of als belasting) weerstand R_2 (zie fig. 3.11). Aan de primaire zijde is een bronspanning U_i en een door inductie in spoel1 opgewekte inductiespanning V_1 . Die spanning staat geheel over de weerstand, zodat in de primaire kring geldt:

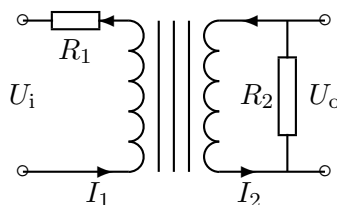
$$U_i + V_1 = R_1 I_1 \quad (3.1)$$

Aan de secundaire zijde is er een door inductie in spoel2 opgewekte spanning V_2 . Die spanning staat geheel over de belastingsweerstand, waar de uitgangsspanning U_o wordt afgetakt, zodat in de secundaire kring geldt:

$$V_2 = R_2 I_2 = U_o \quad (3.2)$$

Verder geldt natuurlijk voor de inductiespanningen:

$$V_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} \quad V_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$



Figuur 3.11 Een transformator wordt aan de ingang gevoed door een wisselspanning U_i en aan de uitgang afgetakt met wisselspanning U_o . De ingang heeft een ingangsweerstand R_1 en de uitgang een uitgangsweerstand R_2 .

Hiermee hebben we 5 vergelijkingen met 5 onbekenden V_1 , I_1 , V_2 , I_2 en U_o . Alle variabelen zijn dus in U_i op te lossen, in het bijzonder de uitgangsspanning.

Vereenvoudiging en eliminatie Door eliminatie van dL_1/dt , respectievelijk dL_2/dt , vereenvoudigen de inductievergelijkingen tot

$$MV_1 - L_1V_2 = (1 - k^2)L_1L_2\frac{dI_2}{dt} \quad (3.3)$$

$$MV_2 - L_2V_1 = (1 - k^2)L_1L_2\frac{dI_1}{dt} \quad (3.4)$$

gebruikmakend van de waarde van de *wederzijdse inductie* $M = k\sqrt{L_1L_2}$. De variabelen aan de secundaire zijde kunnen direct met vgl 3.2 worden uitgedrukt in de uitgangsspanning: $V_2 = U_o$ en $I_2 = U_o/R_2$. Daardoor is V_1 uit te drukken in de uitgangsspanning:

$$V_1 = \frac{L_1}{M} \left(U_o + (1 - k^2) \frac{L_2}{R_2} \frac{dU_o}{dt} \right)$$

De variabele I_1 aan de primaire zijde kan met vgl 3.1 worden uitgedrukt in U_i en V_1 : $I_1 = U_i/R_1 + V_1/R_1$. Door V_1 in te vullen in de vergelijking van de primaire kring krijgen we een vergelijking voor I_1 :

$$I_1 = \frac{U_i}{R_1} + \frac{L_1}{R_1M} \left(U_o + (1 - k^2) \frac{L_2}{R_2} \frac{dU_o}{dt} \right)$$

Tenslotte kunnen we nu ook I_1 en V_1 elimineren (uit de onderste vereenvoudigde inductie vgl 3.4):

$$\begin{aligned} MU_o &= \frac{L_1L_2}{M} \left(U_o + (1 - k^2) \frac{L_2}{R_2} \frac{dU_o}{dt} \right) + \\ &+ (1 - k^2)L_1L_2 \frac{dU_i}{R_1dt} + \\ &+ (1 - k^2) \frac{L_1L_2}{M} \frac{L_1}{R_1} \left(\frac{dU_o}{dt} + (1 - k^2) \frac{L_2}{R_2} \frac{d^2U_o}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

InUit-vergelijking transformator Deze vergelijking voor de spanning U_o kunnen we in een wat beter hanteerbare vorm brengen door termen te verzamelen en een gemeenschappelijke factor $(1 - k^2)L_1L_2/M$ uit te delen en met R_1/M te vermenigvuldigen, rekening houden met de wikkelverhouding $N_2/N_1 = \sqrt{L_2/L_1}$. Daarmee vinden we een tweede orde *differentiaalvergelijking* voor de uitgangsspanning U_o uitgedrukt in de ingangsspanning U_i , de **InUitvergelijking** van de transformator:

$$(1 - k^2) \frac{L_2}{R_2} \frac{d^2U_o}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_1/L_1}{R_2/L_2} \right) \frac{dU_o}{dt} + \frac{R_1}{L_1} U_o = -k \frac{N_2}{N_1} \frac{dU_i}{dt}$$

Merk op, dat alle constanten in het linkerlid bepaald worden door de $L/R = \tau$ -tijden van de primaire en secundaire kring en k . In het rechterlid zien we behalve k de wikkelverhouding.

Bij *lage ingangsweerstand* R_1 en *hoge uitgangsweerstand* R_2 vereenvoudigt dit tot:

$$\frac{dU_o}{dt} = -k \frac{N_2}{N_1} \frac{dU_i}{dt}$$

met als stabiele oplossing:

$$U_o = -k \frac{N_2}{N_1} U_i$$

Dat geeft de bekende spanningsversterking — bepaald door de wikkelverhouding — waarbij de uitgang de ingang volgt in tegenfase. In het algemeen zal echter de uitgangsspanning ook in fase verdraaid zijn.

Complexe methode We gaan ervan uitdat de ingang wordt gevoed met een wisselspanning met (hoek)frekwentie ω :

$$U_i = \hat{U}_i \cos(\omega t)$$

Voor de algemene oplossing voor wisselspanning gebruiken we de **complexe methode**:

- Vervang iedere tijdafgeleide door de factor ω met $j\omega$ met $j^2 = -1$. We passen de complexe methode toe op de differentiaalvergelijking van de transformator. De complexe vorm van de DV vergelijking wordt:

$$\begin{aligned} (-a\omega^2 + b\omega + c)\hat{U}_o &= -d\omega\hat{U}_i \\ a = (1 - k^2)\tau_2 \quad b = 1 + \tau_2/\tau_1 \quad c = 1/\tau_1 \quad d &= k N_2/N_1 \end{aligned}$$

Opgelost (na invullen teller en noemer vermenigvuldigen met $\tau_1\omega$):

$$\hat{U}_o = -\frac{d}{b - \iota(\frac{c}{\omega} - a\omega)} \hat{U}_i = -\frac{k(N_2/N_1)\tau_1\omega}{(\tau_1 + \tau_2)\omega - \iota(1 - (1 - k^2)\tau_1\tau_2\omega^2)}$$

Amplitudeversterking en faseverdraaiing De **spanningsversterking** bestaat in het algemeen uit een amplitudeversterking en een faseverdraaiing. De **amplitudeversterking** is:

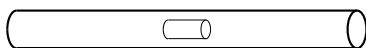
$$\left| \frac{\hat{U}_o}{\hat{U}_i} \right| = \frac{d}{|b - \iota(\frac{c}{\omega} - a\omega)|} = \frac{k(N_2/N_1)\tau_1\omega}{\sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2\omega^2 + (1 - (1 - k^2)\tau_1\tau_2\omega^2)^2}}$$

De **faseverdraaiing** van de uitgangsspanning relatief de ingangsspanning wordt bepaald door de fase Φ van de noemer $b - \iota(\frac{c}{\omega} - a\omega)$, welke zelf het tegengestelde is van de fase van het complexe getal $b + \iota(\frac{c}{\omega} - a\omega)$:

$$\tan(\phi) = \frac{\frac{c}{\omega} - a\omega}{b} = \frac{1 - (1 - k^2)\tau_1\tau_2\omega^2}{(\tau_1 + \tau_2)\omega}$$

De *tijdconstanten* $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$ en $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$ bepalen de faseverdraaiing; grote tijdconstanten geven weinig faseverdraaiing, kleine tijdconstanten geven een faseverandering van 90 graden. Daarbij komt de 180 graden van het minteken! De wikkelverhouding speelt in de faseverdraaiing geen enkele rol, daarentegen is de wikkelverhouding juist wel belangrijk bij de amplitudeversterking!

Opg 3.5.5 **



Een transformator bestaat uit een primaire spoel, een 18 cm lange spoel met 1 cm diameter, en daarbinnen de 2 cm lange secundaire spoel met

5 mm diameter. De spoelen staan coaxiaal opgesteld, zoals getekend. Het aantal windingen van de primaire is 100 en van de secundaire 150.

a bereken de zelfinducties L_1 en L_2 .

[Antw. $L_1 = 5,48 \mu\text{H}$, $L_2 = 27,8 \mu\text{H}$]

b Bereken de koppelfactor k . Lees eerst nog eens het voorbeeld van de Rhumkorff-trafo op pag. 141 voor het bepalen van M en k .

[Antw. $k = 1/6$]

c Bereken de (effectieve) primaire zelfinductie bij kortsluiten van de secundaire spoel.

[Antw. $L_{1\text{eff}} = (35/36)L_1 = 5,33 \mu\text{H}$]

d **** Op de primaire spoel wordt een wisselspanning aangesloten $U_1 = 0,1 \cos(3000t)$ en aan de secundaire spoel een belasting van $R = 1 \text{ m}\Omega$. Bereken de impedantie van de secundaire kring.

[Antw. $Z = i83,4 \text{ mH}$ (R_2 verwaarloosbaar)]

e **** Bereken de in R ontwikkelde warmte per seconde.

[Antw. $P = 1,62 \text{ mJ}$]

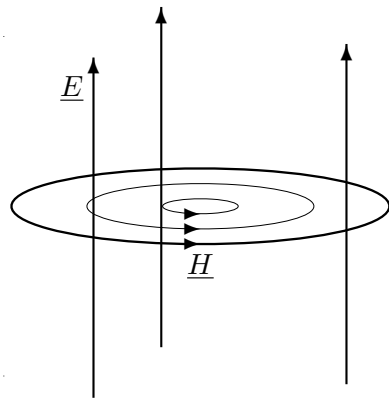
Opg 3.5.6 **** De primaire en secundaire zijde van een ideale transformator worden op de juiste wijze (wat wordt hiermee bedoeld?) in serie geschakeld. Beide zijden zijn gelijk: $L_1 = L_2 = 3,2 \text{ mH}$ en $R_1 = R_2 = 1 \Omega$. We zetten over deze serieschakeling een wisselspanning van 10 V met een frequentie van 50 Hz zetten. Bereken de stroom door de schakeling en de fase.

[Antw. $I = 2,2 \text{ A}$ en $\varphi = -64^\circ$]

3.6 Stroomverdringing

Oppervlaktestromen Een bijzonder gevolg van de inductiewet van Faraday, in combinatie met de wet van Ampère, is een verschijnsel dat alleen bij gebruik van zeer hoge frequenties is waar te nemen. Proberen we een stroom bij hoge frequenties door een *geleideroppervlakstroom* te voeren, dan blijkt de stroom niet meer homogeen door de geleider te gaan, maar de stroom wordt *verdrongen uit het inwendige* en geconcentreerd als **oppervlakstroom** aan het geleideroppervlak. Een karakteristieke dikte van de oppervlaklaag waar de stroom doorheen loopt wordt indringdiepte genoemd. Die naam komt eigenlijk van het omgekeerde verschijnsel: een *witwendig hf-veld* (*hoogfrequent veld*) zal slechts in de geleider kunnen dringen over afstanden in de orde van de indringdiepte.

Inductiestromen Hoe moeten we verklaren, dat de stroom die normaliter door de geleider gaat onder invloed van inductiestromen tot het oppervlak wordt beperkt? Bekijk daartoe een gedeelte van een ronde geleider bij het oppervlak, en let op de velden erin. Als er een stroom I



Figuur 3.12 Een ronde geleider met verticaal elektrische veldlijnen die de stroom drijven, en horizontaal cirkelvormige magnetische veldlijnen die een verticaal elektrisch inductieveld genereren

Dat door het magnetische veld opgewekte *extra* elektrische veld leidt tot een inductiestroom die probeert de verandering van het magnetische veld tegen te gaan. Het is duidelijk dat een maximaal resultaat is bereikt wanneer de inductiestroom er in slaagt om de oorspronkelijk aanwezige stroom volledig te compenseren; dat gebeurt kennelijk in het inwendige

door een geleider gaat, dan ontstaat er volgens de wet van Ampère rond ieder oppervlak waardoor de stroom gaat een circulerend *magnetisch veld* met magnetische kringspanning $U_{\text{m rond}}$:

$$U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$$

Als de stroom verandert, dan zal dus ook dat magnetische veld mee veranderen. Volgens de *inductiewet van Faraday*:

$$U_{\text{rond}} = -\frac{d\Phi_{\text{door}}}{dt}$$

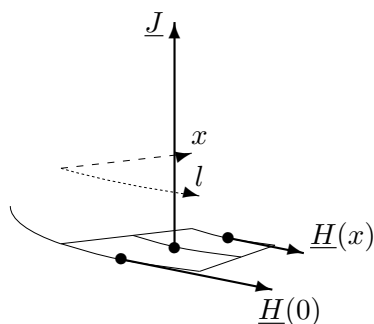
zal er, op zijn beurt, een circulerend *elektrisch veld* ontstaan rond het magnetische veld, en dus in hoofdzaak langs de stroomrichting.

van de geleider, waar de stroom wordt verdrongen naar het oppervlak toe. Om tot een sterk inductieeffect te komen zal een grote verandering van flux, dus een hoge frequentie nodig zijn. In het algemeen zal de indringdiepte dus met hogere frequentie afnemen.

Invloed wet van Ampère op H Om te zien hoe dat getalsmatig gaat, bezien we een deel van de stroom in de buurt van het oppervlak. Neem aan dat de sterkte van de velden E en H afhangt van de afstand x tot het oppervlak—we hebben dan $E(x)$ en $H(x)$ als functie van x .

We bekijken eerst een speciaal horizontaal oppervlakdeel waarop we de wet van Ampère kunnen toepassen. Het wordt begrensd door een magnetische veldlijn op diepte x aan de binnenkant en de magnetische veldlijn langs het oppervlak aan de buitenkant; de rest van de rand van het oppervlakdeel bestaat uit lijnen loodrecht op het oppervlak. Enerzijds is de magnetische spanning rond dit oppervlakdeel opgebouwd uit vier delen:

$$U_{\text{m rond}} = H(0)l + 0 - H(x)l + 0,$$



Figuur 3.13 Een oppervlakdeel waardoor elektrische stroom gaat en waar rond magnetische spanning ontstaat op grond van de wet van Ampère.

omdat de veldlijnen evenwijdig aan het oppervlak een lengte l hebben, en de delen van de rand loodrecht op het oppervlak ook loodrecht op het magnetische veld staan. Anderzijds stroomt door dit oppervlakdeel

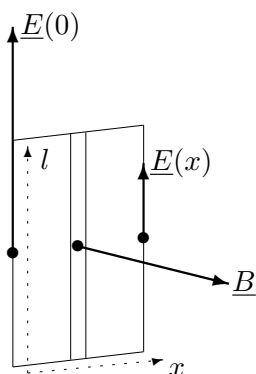
$$I_{\text{door}} = \int_0^x J(x)l dx,$$

omdat de stroom niet homogeen is, behalve evenwijdig aan het oppervlak over kleine deeldiepten dx . De stroom verandert met de diepte, dus ook de magnetische veldsterkte. De integraal kan wiskundig worden weggewerkt door te differentiëren naar x . De wet van Ampère wordt dan achtereenvolgens:

$$\begin{aligned} H(0)l - H(x)l &= \int_0^x J(x)l dx \\ -\frac{dH}{dx} &= J \end{aligned}$$

Let op: in de laatste vergelijking is de x -afhankelijkheid weggelaten.

Conclusie *De Ampèrewet leidt tot: de stroomdichtheid is gelijk aan de afname van de magnetische veldsterkte per meter diepte*

Invloed inductiewet van Faraday op E 

Figuur 3.14 Een oppervlakdeel waardoor magnetische flux gaat en waar rond elektrische spanning ontstaat op grond van de wet van Faraday.

Vervolgens passen we de inductiewet van Faraday toe op een speciaal verticaal oppervlakdeel. Dat wordt begrensd door een elektrische veldlijn op een diepte x aan de binnenkant, en door een elektrische veldlijn langs het oppervlak aan de buitenkant; de rest van de rand bestaat uit horizontale lijnen loodrecht op het oppervlak en loodrecht op het elektrische veld. Voor dit oppervlakdeel is enerzijds de elektrische spanning rond het oppervlak opgebouwd uit vier delen:

$$U_{\text{rond}} = E(x)l + 0 - E(0)l + 0$$

Anderzijds geldt voor de magnetische flux door het oppervlak dat die homogeen is in smalle stroken met diepte dx , zodat we kunnen stellen

$$\Phi_{\text{door}} = \int_0^x B(x)l dx$$

Daaruit leiden we af, door substitutie in de inductiewet van Faraday, en gevolgd door differentiatie naar x , dat :

$$\begin{aligned} E(x)l + 0 - E(0)l &= - \frac{d \int_0^x B(x)l dx}{dt} \\ \frac{dE}{dx} &= - \frac{dB}{dt} \end{aligned}$$

Ook nu is de x -afhankelijkheid in de laatste vergelijking weggelaten.

Conclusie *De inductiewet van Faraday leidt tot: de afname van de magnetische fluxdichtheid per seconde is gelijk aan de toename van de elektrische veldsterkte per meter diepte*

Koppeling van E en H De gevonden twee eerste orde differentiaalvergelijkingen (afgekort: DV) combineren steeds een eigenschap van het elektrische en het magnetische veld. De eerste DV koppelt H met de stroomdichtheid J , die volgens de *elektrische materiewet van Ohm*:

$$J = \gamma E \quad \text{of} \quad E = \rho J$$

gekoppeld is met de elektrische veldsterkte E . De *wet van Ampère* leidt dan tot

$$-\frac{dH}{dx} = \gamma E$$

Analoog zijn magnetische veldsterkte en magnetische fluxdichtheid gekoppeld door een *magnetische materiewet*:

$$B = \mu H$$

De *inductiewet van Faraday* kan zo worden omgezet naar:

$$\frac{dE}{dx} = -\mu \frac{dH}{dt}$$

Differentiaalvergelijking voor veld Combineren van de twee inductiewetten met de twee materiewetten leidt tot *tweede orde DV's* voor het magnetische veld H , en analoog voor het elektrische veld E . Doordat E en H zijn gekoppeld kunnen we een van beide elimineren, zodat moet gelden voor bijvoorbeeld E :

$$\boxed{\frac{d^2 E}{dx^2} = \gamma \mu \frac{dE}{dt}}$$

We zullen deze DV, waaruit de veldwaarden moeten worden opgelost (en daaruit de stroomwaarde) voor een speciaal geval oplossen. Merk nu reeds op, dat de eenheid van $\gamma\mu$ gelijk is aan s/m^2 . Denk eraan dat H uit E volgt tgv de koppeling.

Wisselspanning oplossingen Vaak is de spanning—dat geldt ook voor andere grootheden—een harmonische functie van de tijd, zoals sinus of cosinus. Het is gebruikelijk in de elektriciteitsleer zulke signalen te beschrijven volgens de *complexe methode* met **complexe notatie**. De **signaalfrequentie** f , dus **hoekfrequentie** $\omega = 2\pi f$, leidt tot **harmonische functies** van het type $\exp(i\omega t)$.¹ We zullen bovendien *veronderstellen* dat ook de plaats x afhankelijkheid harmonisch is. Dan wordt de *oplossing* van de differentiaalvergelijking een **lopende golf**:

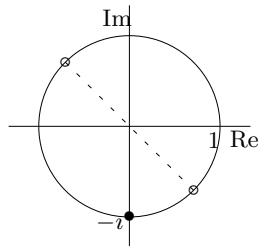
$$E = \hat{E} e^{-ikx} e^{i\omega t} = \hat{E} e^{-i(kx - \omega t)}$$

Het nog onbekende **golfgetal** k zal hier blijken *complex* te zijn. De **eenheid van golfgetal** k is $1/\text{m}$. De waarde van het golfgetal k vinden we door invullen van de afgeleiden in de DV.

¹complexe notatie is een wiskundig vereenvoudigde vorm van Fouriertransformatie

Differentiëren we E naar de variabele tijd t of diepte x , dan vinden we—omdat de afgeleide van een exponentiële functie evenredig is met zichzelf—eenvoudig:

$$\frac{dE}{dt} = i\omega E \quad \frac{dE}{dx} = -ikE$$



Figuur 3.15 De wortel(s) uit het complexe getal $-i$: halveer 'de' hoek en neem de wortel uit de grootte.

Na substitutie wordt de DV voor E vereenvoudigd tot:

$$\begin{aligned} (-ik)^2 &= \gamma\mu\omega \\ k^2 &= -i\gamma\mu\omega \end{aligned}$$

Nemen we de wortel van het complexe getal $-i$, dan vinden we $(1-i)/\sqrt{2}$, of het tegengestelde, maar die oplossing blijkt hier niet te kunnen voldoen. Het golfgetal wordt bepaald als:

$$k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\gamma\mu\omega} = (1-i)/d$$

waarin **indringdiepte** d een afstand is (eenheid meter):

$$d = \sqrt{2}/\sqrt{\gamma\mu\omega}$$

Indringdiepte en gedempte golf Met d wordt de oplossing voor E ($-i(1-i) = -jmath + i^2 = -1 - i$):

$$E = \hat{E} e^{-i((1-i)x/d - \omega t)} = \hat{E} e^{-x/d} e^{-i(x/d - \omega t)}$$

De golfactor $e^{-i(x/d - \omega t)}$ is een lopende golf met periodetijd $2\pi/\omega$, golflengte $2\pi d$. De dempingsfactor $e^{-x/d}$ dempt de amplitude van de golf exponentiël. Hogere frequentie ω , maar ook grotere soortelijke geleiding γ of grotere beweeglijkheid μ , leidt tot een kleinere indringdiepte en hogere demping.

Oppervlaktestroom Het *reële* (=èchte) elektrische veld—dus ook de stroom!—heeft een amplitude en een fasefactor. De amplitude is plaats afhankelijk: als een gedempte trilling $\hat{E} \exp^{-x/d} \cos(x/d)$ met een exponentiële factor, die ervoor zorgt dat de stroom slechts tot enkele afstanden d van het oppervlak meetbare waarden heeft. In combinatie met de fasefactor, die de stroom na een diepte $\frac{1}{2}\pi d$ van richting doet omslaan(!), is er na 5 indringdiepten nauwelijks nog stroom meetbaar. Door de koppeling tussen E en H zal het magnetische veld eenzelfde gedempte trilling ondergaan, doch 90 graden uit fase.

Conclusie *Bij hoge frequentie zal de stroomgeleiding ten gevolge van stroomverdringing plaatsvinden in een oppervlaklaag ter grootte van enkele indringdiepten d . Ze gaat gepaard met een gedempte elektromagnetische trilling aan het oppervlak van de geleider. Hoe hoger de frequentie, hoe hoger de elektrische of magnetische soortelijke geleiding, hoe kleiner de indringdiepte.*

Voorbeeld Indringdiepte koper Bereken de indringdiepte voor Cu bij een wisselspanning frequentie van 1 MHz; dus $\omega = 2\pi 10^6$.

Volgens BINAS is $\gamma = 1/\rho = 1/17 \cdot 10^{-9} \text{ S/m}$. Verder is voor de meeste metalen $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$. De indringdiepte wordt daarmee

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 17 \cdot 10^{-9}}{4\pi 10^{-7} \cdot 2\pi 10^6}} = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Deze 0,07 mm bij 1 MHz kan worden teruggerekend naar 9 mm bij 50 Hz aan de ene kant, en een indringdiepte van 0,002 mm bij 1 GHz.

Opg 3.6.1 * Tengevolge van een (hoogfrequente)wisselspanning over een geleider ontstaat er:

- A in het inwendige een elektrische golf
- B in het inwendige een elektrische en magnetische golf
- C aan het oppervlak een gedempte elektrische golf
- D aan het oppervlak een gedempte elektrische en magnetische golf

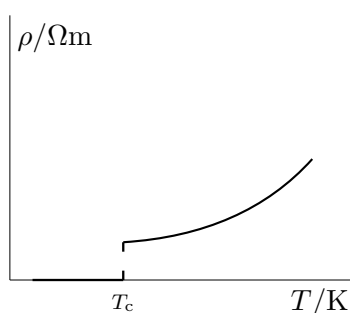
Opg 3.6.2 ** Van een stuk ijzer is de soortelijke weerstand $\rho = 1,05 \cdot 10^{-7} \Omega\text{m}$ en de relatieve magnetische permeabiliteit $\mu_r = 1000$. Bereken de indringdiepte in mm bij een frequentie van 50 Hz. [Antw. $d = 0,73 \text{ mm}$]

Opg 3.6.3 ** Van een rond stuk koperdraad, lengte 10 cm, omtrek 6 mm, is de soortelijke weerstand $\rho = 20 \cdot 10^{-9} \Omega\text{m}$ en de relatieve magnetische permeabiliteit $\mu_r = 1$. Bereken de weerstand van deze draad, rekening houdend met de indringdiepte. Neem gemakshalve aan, dat de stroom tot de indringdiepte homogeen is, en daaronder verdwenen.

- a bij 50 Hz. [Antw. $R = 0,70 \text{ m}\Omega$]
- b bij 10 MHz. [Antw. $R = 15 \text{ m}\Omega$]

3.7 Supergeleiding

Inleiding In 1911 gelukte het de nederlandse hoogleraar H. Kamerlingh Onnes in Leiden om Helium vloeibaar te maken, en daarmee had hij een temperatuur bereikt van 4,2 K. De eerste metingen die hij bij die temperatuur verrichtte, was de meting van de weerstand van enkele zuivere elementen.



Figuur 3.16 Verloop van de soortelijke weerstand ρ van kwik als functie van de temperatuur T . Onder de kritieke temperatuur T_c valt de weerstand weg en is kwik supergeleidend.

Een theorie voorspelde dat de soortelijke weerstand van zulke materialen heel groot zou worden (de elektronen zouden door die lage temperatuur niet meer bewegen), maar volgens een andere theorie zou de soortelijke weerstand naar een constante waarde dalen, of, de soortelijke weerstand zou gewoon geleidelijk naar nul gaan. Geen van deze theoriën bleek waar te zijn, want bij de meting van de soortelijke weerstand van kwik, bleek de soortelijke weerstand ‘ineens’ naar nul (althans te klein om te meten) te springen bij 4,2 K.

De **supergeleiding**, stroomgeleiding zonder weerstand, was ontdekt.

Supergeleidende toestand De mogelijkheden van de supergeleiding leken onbegrensd, maar al gauw bleek dat het supergeleidend effect van de zuivere metalen maar zeer beperkt bruikbaar was. Niet alleen moest de *temperatuur* laag genoeg zijn om van de **normale toestand** over te gaan naar de **supergeleidende toestand**, er waren nog meer vereisten. Als de *stroomdichtheid* in het materiaal te groot werd, dan werd het materiaal weer ineens *normaal* geleidend. Als de *magnetische veldsterkte* te groot werd dan werd het materiaal ook weer *normaal* geleidend. Zie ook figuur 3.17.

Conclusie De supergeleidende toestand, van een geschikt materiaal, is gekenmerkt door:

1. temperatuur T onder de **kritieke temperatuur** T_c ;
2. stroomdichtheid J onder de **kritieke stroomdichtheid** J_c ;
3. magnetische veldsterkte onder de **kritieke veldsterkte** H_c ;

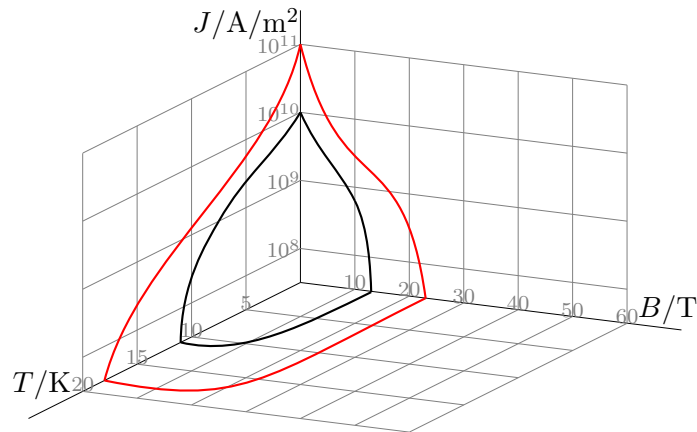
Cooperparen Een succesvolle verklaring voor dit type supergeleiding werd pas in 1957 geformuleerd door de amerikanen J. Bardeen, L.N. Co-

per, and J.R. Schrieffer,. Essentieel in de BCS theorie is de aanname dat tussen elektronen met dezelfde snelheid, maar tegengestelde rotatie om hun as (de spin) een zwakke aantrekkende wisselwerking bestaat. Deze twee elektronen hebben dan een binding, en men noemt ze dan **Cooperparen**.

Toepasbare supergeleiders In 1961 vond Kunzler materialen die in een veel groter gebied supergeleidend zijn dan de zuivere elementen: óók bij sterkere magneetvelden. Praktisch toepasbare materialen zijn:

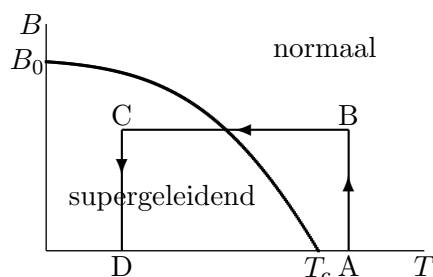
NbTi	T_c	= 11 K
	H_c	= 10^7 A/m ($B_c = 13$ T)
	J_c	= 10^{10} A/m ²
Nb₃Sn	T_c	= 18 K
	H_c	= $1,8 \cdot 10^7$ A/m ($B_c = 23$ T)
	J_c	= 10^{11} A/m ²

Ter vergelijking geven we van het materiaal koper (geen supergeleider) de toelaatbare stroomdichtheid t.g.v. de weerstandsverliezen: bij 293 K slechts $3 \cdot 10^6$ A/m², dus een factor 10^4 kleiner dan bij de *supergeleiders*.

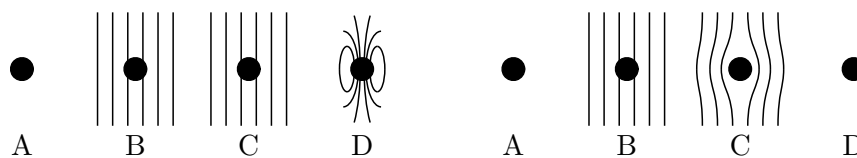


Figuur 3.17 Toestandsgrafiek van NbTi en Nb₃Sn, waarin wordt aangegeven onder welke omstandigheden van temperatuur T , stroomdichtheid J en (uitwendige) magnetische fluxdichtheid B de toestand supergeleidend of normaal is.

Meissner effect Er zijn een aantal natuurkundig interessante effecten bij supergeleidende materialen, waarvan het **Meissnereffect** misschien wel de bekendste is. Om het Meissner-effect waar te nemen laten we een metalen bol de cyclus ABCD doorlopen (zie figuur 3.18)). Is de bol slechts een *perfecte geleider* (alleen $\rho = 0$), dan blijft bij afkoeling beneden T_c het veld binnen de bol, zelfs als het externe veld verdwijnt.



Figuur 3.18 BT -toestandsdiagram van een supergeleidende stof met een supergeleidende en normale toestand. Een cyclus van toestanden wordt als volgt doorlopen. Van A naar B: met toenemende B bij constante T boven T_c (in normale toestand); van B naar C: met afnemende T bij constante B (wordt supergeleidend); van C naar D: met afnemende B bij constante T ; van D naar A: met toenemende T bij veld $B = 0$ (wordt weer normaal).



a Niet-supergeleidende stof.

b Supergeleidende stof.

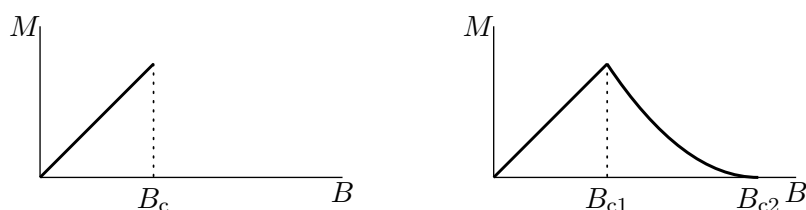
Figuur 3.19 De achtereenvolgende toestanden van twee verschillende stoffen die een toestandsdiagram doorlopen als aangegeven in figuur 3.18. Let op het verschil in de flux uitstoting als de stof in de supergeleidende toestand is (C,D).

In de *echte supergeleidende toestand* is het interne veld *altijd* nul: een supergeleider is een *perfecte diamagneet*. In 1933 toonden Meissner en Ochsenfeld aan dat een magneetveld actief wordt *uitgestoten* als de geleider wordt afgekoeld beneden diens *kritieke temperatuur*. Met andere woorden: in de supergeleidende toestand is het *magneetveld binnen* de stof verdwenen. Is er een uitwendig magneetveld, dan gaan namelijk op het oppervlak van de supergeleider stromen lopen die een intern veld opwekken dat tegengesteld is aan het uitwendige veld.

Magnetische fluxuitstoting De essentie van de magnetische **fluxuitstoting** bij het Meissner-effect is nu dat de oppervlakstromen niet alleen kunnen ontstaan door inductie onder invloed van een (veranderend) extern magneetveld, maar ook door het materiaal zelf wanneer dit overgaat in de supergeleidende toestand. Voor het opwekken van deze oppervlakstromen is wel energie nodig, maar deze kan het materiaal zelf leveren omdat de supergeleidende toestand een lagere energie heeft dan de normale toestand (dat blijkt uit de lagere temperatuur). Een supergeleider

is dus niet alleen een perfecte geleider, maar is bovendien een perfecte diamagneet ($\mu_r = -1$). Een van de conclusies uit het Meissner-effect is, dat supergeleiding niet een kwalitatieve verandering is van elektrische eigenschappen, maar een fundamenteel andere toestand van het materiaal is (vergelijk de geleidende toestand en de supergeleidende toestand bijvoorbeeld met de gasfase en de vloeistoffase)

Type II-supergeleiding In eerste instantie werden er alleen elementen onderzocht, en die vertonen, mits ze supergeleidende eigenschappen bezitten, één kritieke waarde van het magnetische veld. Het materiaal is onder die waarde supergeleidend (zie figuur 3.20a), en daarboven niet meer. Dit gedrag noemt men **type-I supergeleiding**. Bij de later (1936, 1961) ontdekte verbindingen gaat de overgang van geleidend naar supergeleidend eigenlijk in twee fasen; dat noemt men **type-II supergeleiding**.



a type-I supergeleiding

b type-II supergeleiding

Figuur 3.20 Inwendig magneetveld B_i en magnetisatie M als functie van het uitwendige magneetveld B bij verschillende typen supergeleiders.

Als het magnetisch veld kleiner is dan B_{c1} (zie figuur 3.20b), dan is er in de supergeleider geen magnetisch veld. Pas als het magnetische veld groter wordt dan B_{c2} verliest het materiaal zijn supergeleidende eigenschappen; B_{c2} is veel groter dan B_{c1} . Tussen die twee waarden dringt het magnetische veld gedeeltelijk binnen in de supergeleider, waarbij het *gekwantiseerd* is in *veldlijnen*.

Magnetische fluxkwantisatie Het magnetische veld dringt supergeleiders binnen in de vorm van fluxdraden ('vortices') van precies één fluxkwant. De grootte van zo'n fluxkwant, het **magnetisch flux kwant** Φ_0 , is:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,06783461 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$$

waarbij h de constante van Planck is, en e de lading van het elektron. De fluxdraden vormen een regelmatig rooster, in 1964 met neutronverstrooiing zichtbaar gemaakt door een team uit Saclay bestaande uit

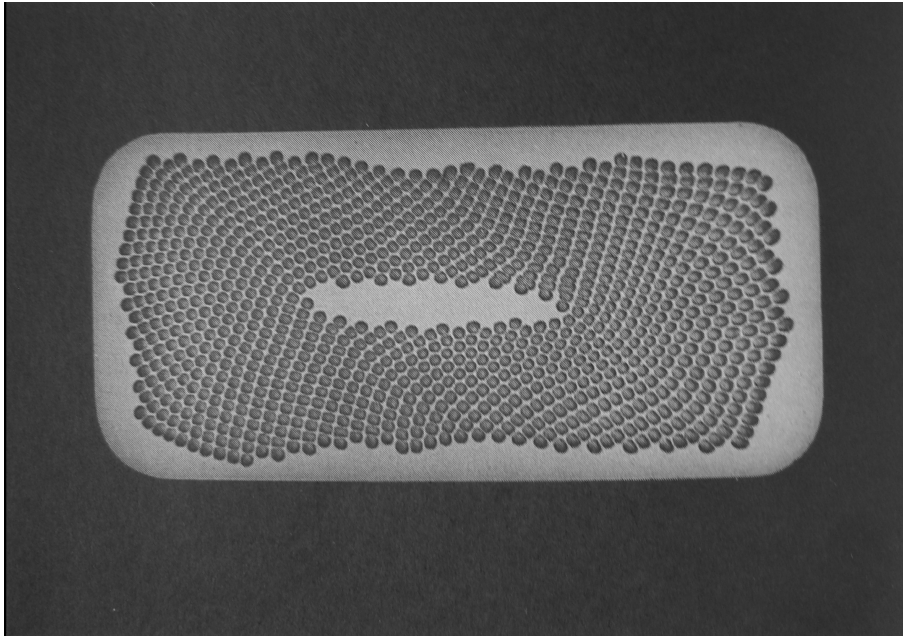
de fransen D. Cribier, B. Jacrot, B. Farnoux, en de indiër L. Madhav Rao. Type II-supergeleiding kan niet met de BCS theorie (op elektron niveau) worden verklaard, maar wel met de fenomenologische theorie (zonder elektron) van de russen V.L. Ginsburg en L. Landau (1950), die beide typen beschrijft. De fluxkwantisatie en roosterstructuur werd hiermee verklaard door de rus A.A. Abrikosov (1954). Als bijzonderheid vermelden we nog, dat de fluxkwant in 1961 werd gemeten door de amerikanen B.S. Deaver en W.M. Fairbank, en de Duitsers R. Doll and M. Näbauer (maar dat die reeds in 1948 door P.A.M. Dirac werd verondersteld—zuiver theoretisch).

Hoge T -supergeleiding Lange tijd dacht men dat supergeleiding alleen bij zéér lage temperaturen (beneden 20 K) mogelijk was, maar dat werd, in 1986 door de Zwitser K.A. Müller en Duitser J.G. Bednorz, achterhaald door de vinding van een materiaal met type II-supergeleiding bij 35 K. Door verder onderzoek was men in staat materialen te vinden die een kritieke temperatuur boven 130 K hebben. Deze supergeleidende materialen hebben een *keramische structuur*, en zijn daardoor erg hard maar bros. Tot nu toe is er geen bevredigende verklaring voor gevonden.

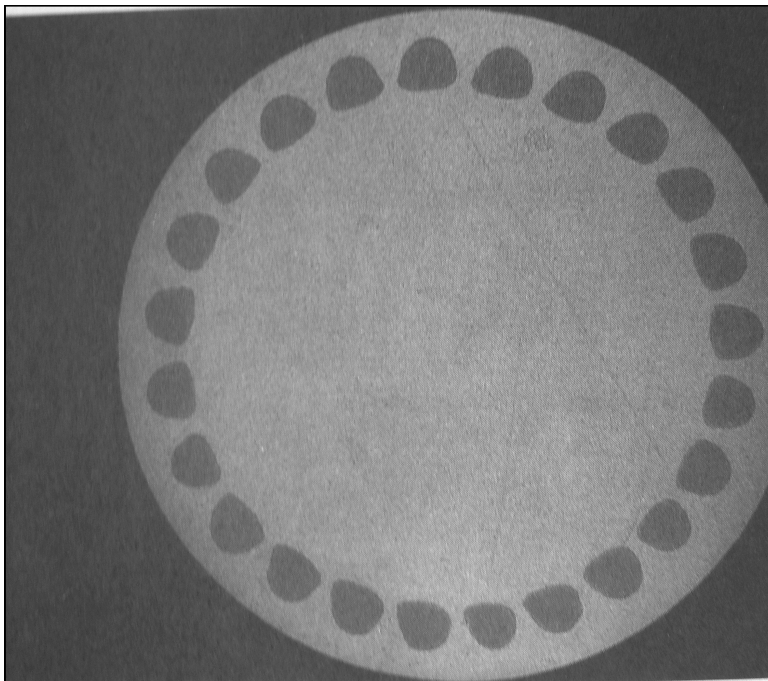
Toepassingen Toepassingen van *supergeleiding* zijn er genoeg te bedenken, namelijk door koper, daar waar dat als geleider toegepast wordt, te vervangen door een supergeleider. Maar praktische toepassingen zijn tot nu toe beperkt gebleven—mede doordat supergeleiding alleen maar bij gelijkstroom werkelijk verliesvrij is—tot de toepassingen bij het opwekken van sterke magneetvelden:

- voor kernfysisch onderzoek, zoals met versnellers, spectrometers, deeltjesdetektoren;
- voor magnetische kernspin resonantie onderzoek in ziekenhuizen: ‘magnetisch doorlichten’ i.p.v. met röntgenstraling;
- voor supersterke magnetische opsluitvelden bij kernfusie reactoren;

De benodigde magneten worden gewikkeld van supergeleidende draad (zie de figuren op pagina 172 met draaddoorsneden). De ontwikkeling van een draad die goede eigenschappen heeft (supergeleidende, mechanische, ...) en gemaakt kan worden in stukken van kilometers lengte (om er zo spoelen van te kunnen wikkelen) is niet in een dag gebeurd. Het zal dus ook nog wel enige tijd duren, voordat er supergeleidende draden zijn van keramische materialen. Andere toepassingen liggen meer op meet-technisch gebied, namelijk sensoren om zeer gevoelig magnetische velden te meten. Er is ook veel onderzoek gedaan naar computers die werken met supergeleidende schakelaars (‘Josephson junctions’), die veel sneller en verliesarmer zijn dan de huidige schakelaars in de chips. Echter, dat onderzoek wordt niet meer vervolgd.



Figuur 3.21 Doorsnede van een rechthoekige draad, 1,4 mm bij 2,9 mm vergroot 12,5 keer, bestaande uit vele supergeleidende draden.



Figuur 3.22 Doorsnede van een ronde draad met 0,8 mm diameter, vergroot 50 keer, bestaande uit een vulkabel met aan de rand supergeleidende draden.

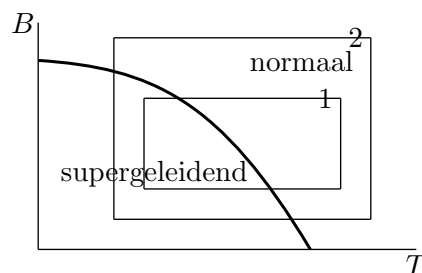
Opg 3.7.1 * Om supergeleiding te kunnen krijgen bij daarvoor geschikte materialen moeten ook de omstandigheden gunstig zijn. Met temperatuur T , stroomdichtheid J en magnetische veldinductie B , is er supergeleiding als de volgende grootheden voldoende lage waarden hebben:

- A T en J
- B T en B
- C B en J
- D B en J en T

Opg 3.7.2 * Bij het Meissner effect:

- A wordt een supergeleider boven een magneet afgestoten
- B wordt door de supergeleider het magneetveld uitgestoten
- C loopt aan het supergeleider-oppervlak inductiestroom met het veld mee
- D wordt een supergeleider boven een magneet een perfecte ferromagneet

Opg 3.7.3 *** Met een bol supergeleidend materiaal, waarvoor onderstaande fase-diagram geldt, kan een getekende cyclus slechts op één manier worden doorlopen.



I Cyclus 1 alleen linksom

II Cyclus 2 alleen linksom

A beide waar B alleen I waar C alleen II waar D beide onwaar

Opg 3.7.4 *** De elektrische flux is gekwantiseerd met de flux van de elektrische eenheidslading. Volgens de wet van Gauss zijn flux en lading gelijk. De magnetische flux is gekwantiseerd met de flux van de magnetische monopoolading. Volgens de magnetische wet van Gauss zijn ook nu flux en lading gelijk. De (nog niet gevonden) magnetische monopool moet dus een lading hebben van:

- A $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- B $3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
- C $2,1 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$
- D $4,2 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$

MEERKEUZEANTWOORDEN**Hoofdstuk 3 Inductie****3.2 Elektrische inductie**

3.2.1 D

3.2.2 C

3.3 Wederzijdse inductie

3.3.1 C

3.3.2 B

3.3.5 C

3.3.12 C de hoek speelt geen rol
omdat alle flux van de lange
spoel hoe dan ook door
spoel1 gaat

3.4 Wederzijdse inductie-energie

3.4.1 B

3.4.3 C meekoppelen en
tegenkoppelen

3.4.7 C 1: tegenkoppelen, of,
extreem koppelen; 2:
meekoppelen

3.5 Transformator

3.5.1 A

3.5.3 D

3.6 Stroomverdringing

3.6.1 D

3.7 Supergeleiding

3.7.1 D

3.7.2 B

3.7.3 A

3.7.4 C



Carl Friedrich
Gauss
(1777–1855)

Acht jaar voor dat Coulomb de wetten van de elektrostatische krachten vond, werd Gauss in Brunswick, de hoofdstad van het Duitse hertogdom Braunschweig, geboren. Hij was een 'wonderkind', dat van jongs af aan interesse had voor wiskunde. In hoge mate werd zijn passie voor wiskunde versterkt door zijn bewijs, nog op 18-jarige leeftijd, dat een 'eenvoudige' passer-lineaal constructie van een regelmatige veelhoek ook mogelijk is als het aantal hoeken n een priemgetal is, en wel als $n = 2^{2^m} + 1$; voor $m = 2$ wordt dat de constructie van de 17-hoek. Hij was zo trots op deze constructie dat volgens zijn testament de 17-hoek op zijn grafsteen moest worden gebeiteld. In zijn proefschrift (1799) leverde hij het (streng) bewijs dat het aantal nulpunten van een veelterm gelijk is aan haar graad. In 1807 werd hij hoogleeraar in de wiskunde aan de universiteit van Göttingen en tevens directeur van de sterrenwacht. Gauss geloofde dat de wiskundige inspiratie moest opdoen in de 'werkelijke' natuur. Daarom ook werkte hij vanaf 1831 samen met Wil-

helm Weber aan elektrische en magnetische verschijnselen; daarbij vonden zij in 1833 de elektromagnetische telegraaf uit.

Slechts een deel van zijn ontdekkingen maakte hij openbaar, de rest noteerde hij in zijn dagboek voor zichzelf (Newton had daar ook een handje van, zoals bij diens uitvinding van de differentiaalrekening). Zijn lijfspreuk was dan ook: "Pauca sed matura" ("Weinig, maar rijp"). Als motto koos hij uit 'king Lear' (van Shakespeare):

*Thou, Nature, art my goddess;
to thy law My services are bound. (..)*

Voor zijn land was misschien zijn werk voor 's landsdriehoeksmeting', over oppervlakkentheorie en differentiaalmeetkunde, het meest waardevol. Voor de natuurkunde zouden zijn wetten over het gedrag van elektrische en magnetische velden, in het bijzonder de theorie van de 'potential', zeker een Nobelprijs waard zijn geweest—maar die bestond toen nog niet.

Hoofdstuk 4

STATISCHE VELDEN

DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de hierna volgende begrippen zodanig te hebben opgenomen, dat u ermee kan werken en dat u ze kan toepassen in praktijksituaties, bijvoorbeeld zoals die bij niet ideale componenten voorkomen.

- statische en dynamische velden;
- superpositie van velden en potentialen;
- verband tussen potentiaal en veldsterkte;
- elektrische dipool: potentiaal en veld, dipoolmoment;
- poolcoördinaten;
- omzetten van poolcoördinaten naar rechthoekcoördinaten;
- lijnlading: potentiaal en veld, lijnladingsdichtheid;
- deellading, potentiaaldelen, velddelen;
- integreren van potentiaaldelen;
- integreren van velddelen via componenten;
- omzetten naar vaste afstand en hoekvariabele;
- vlaklading: potentiaal en veld, vlakladingsdichtheid;
- rechte lijnstroom: magnetische veld;
- wet van Biot en Savart voor deelstromen;
- cirkelstroom: magnetisch veld, magnetisch dipoolmoment;
- ideale solenoïde: homogeen veld, wikkeldichtheid;
- cilindrische spoel: solenoïde, veld langs de as en aan uiteinden;
- kracht en krachtmoment tussen lange rechte stroomgeleiders,
- aantrekking van evenwijdige stromen;
- de eenheid van stroomsterkte: ampère;

4.1 Inleiding superpositie

Ideale componenten Tot nu toe hebben we een aantal veel gebruikte componenten in de elektrotechniek behandeld. Van iedere component hebben we de werking uitgelegd aan de hand van z'n eenvoudigste uitvoering. In *geen enkel* geval konden wij de natuurkundige wetten volledig uitwerken: *het was steeds nodig om vereenvoudigingen en verwaarlozingen toe te passen*. Denk daarbij bijvoorbeeld aan het verarmingsgebiedmodel bij de passieve componenten; daar werden de beweeglijke ladingsdragers volkomen genegeerd toen wij onderzochten hoe de spanning in de contactlaag verloopt.

Ideale actieve componenten Toch was het met het vereenvoudigde model mogelijk om de werking van de diode en de FET te begrijpen. Zelfs de transistorwerking verklaarden we, met dezelfde verarmingslaaggedachte, door te veronderstellen dat er thermische emissie was van beweeglijke ladingen door de verarmingslaag van de basis heen. Pas toen we precies wilden weten hoe groot de contactspanning over de laag was moesten we wel aannemen dat er tóch beweeglijke ladingsdragers in de verarmingslaag waren. We konden zelfs bepalen hoeveel, als we maar aannamen dat de ladingen in thermisch evenwicht met elkaar waren.

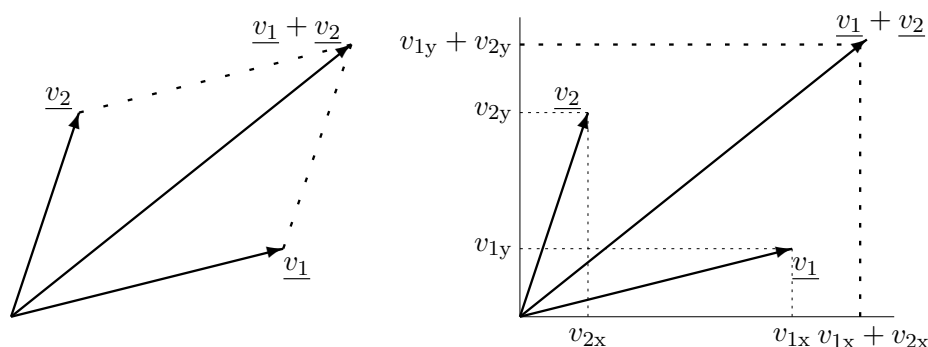
Statische passieve componenten In dit hoofdstuk zullen we laten zien hoe we *meer realistische* (ingewikkelde) passieve componenten moeten behandelen om nog iets over hun eigenschappen te weten te komen. Ook dan zullen we ons toch nog moeten beperken, omdat een echt probleem al snel wiskundig te ingewikkeld wordt. We nemen daartoe aan dat de toestand niet, of nauwelijks, verandert in de tijd. Dat wil zeggen: *We beperken ons tot statische situaties*. Verder is het voor de passieve componenten voldoende om te weten hoe de velden worden. Dus het gaat om de bepaling van **statische elektrische velden en statische magnetische velden** bij eenvoudige componenten. We zullen twee hulpmiddelen systematisch gebruiken:

1. superpositie van velden:
 - (a) door gebruik van componenten;
 - (b) door gebruik van ladingsdelen;
2. gebruik van potentialen om velden af te leiden.

Superpositiebeginsel Met *superpositie* bedoelen we, dat we het effect van veel ladingen, of van stroom door lange draden, kunnen bepalen door eerst van de verschillende ladingsdelen, of stroomdelen, de velden te bepalen, en daarna *alle velden op te tellen*.

De eenvoudigste toepassing hiervan is bij de *elektrische dipool*: die bestaat immers slechts uit twee ladingen. We hoeven dus niets anders te doen dan van beide ladingen het veld te bepalen en dan die twee velden bij elkaar op te tellen. Dat door ‘superponeren’ altijd het correcte resultaat wordt gevonden heet het **superpositiebeginsel**.

Superpositie van velden *Het optellen van velden* kan op verschillende manieren. Gebruikelijk is om *veldsterkten* vectoriëel op te tellen: in een punt waar we de veldsterkte willen bepalen, worden de pijlen van de verschillende veldsterkten kop-staart opgeteld. Er is ook een andere



a Vectorieel optellen: via de kop-staart methode, of parallellogram. b Componenten optellen: via ontbinden in x - en y -vectorcomponenten.

Figuur 4.1 Optellen van twee vectoren \underline{v}_1 en \underline{v}_2 volgens twee methoden.

manier van vectoriëel optellen. Daarbij wordt van elke vector eerst de x , y en z component bepaald. De truc is, dat we eerst de *gelijksoortige vector-componenten optellen*, en dan pas de ruit, met behulp van de regel van Pythagoras, de totale *resulterende vector samenstellen*.

Superpositie van potentialen Het is aan te bevelen om voor de superpositie van het veld gebruik te maken van de *potentiaal*. Eerst bepalen we de totale potentiaal van het veld, uitgaande van de potentialen van de afzonderlijke ladingen. Kennen we de potentiaal langs één lijn (l), dan is de component van de veldsterkte langs dié lijn, E_1 , te vinden als de afname van de potentiaal $-d\Phi$ per afstand dl langs de lijn. Dat laatste kan ook wiskundig worden uitgedrukt: *door differentiatie van de potentiaal V naar de positievariabele langs de lijn vinden we de veldsterkte component langs de lijn:*

$$E_1 = -\frac{dV}{dl}$$

Kennen we de potentiaal in een voldoende aantal richtingen, dan zijn de componenten van de veldsterkte in die richtingen door differentiatie te vinden. Door optellen van deze componenten verkrijgen we de veldsterkte. Wanneer er oneindig vele ladingen zijn, wat gewoonlijk het geval is, dan zal het optellen vervangen moeten worden door de wiskundige operatie genaamd ‘integreren’. We vatten samen:

$$\text{superpositie} = \text{optellen} \Rightarrow \text{integratie}$$

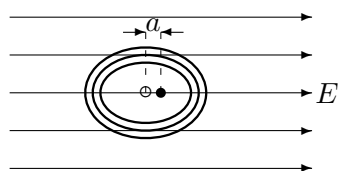
Alleen in de allereenvoudigste gevallen is integratie ‘met de hand’ mogelijk. In andere gevallen zal overgegaan moeten worden naar numerieke integratiemethoden.

- Opg 4.1.1** * Als we in een geval van elektrische velden precies weten wat de potentiaal is op de punten van de y -as, dan is
- A de veldsterkte E bekend op alle punten van de y -as
 - B de component van de veldsterkte E_y bekend op alle punten van de y -as
 - C de component van de veldsterkte E_x bekend op alle punten van de y -as
 - D alle antwoorden zijn juist
- Opg 4.1.2** * Als we in een geval van elektrische velden precies weten wat de potentiaal is op de punten van de x -as, en vlak daarbij in de buurt, dan is
- A de veldsterkte E bekend op alle punten van de x -as
 - B de component van de veldsterkte E_x bekend op alle punten van de x -as
 - C de component van de veldsterkte E_y bekend op alle punten van de x -as
 - D alle antwoorden zijn juist
- Opg 4.1.3** ** In deze opgave zitten alle aspecten van deze paragraaf verwerkt! Het veldpunt P is steeds een punt op de y -as ter hoogte y . Op de punten Q_1 : $x = -1$ cm en Q_2 : $x = +1$ cm, zitten ladingen van $q = 1$ nC.
- a Bepaal door superpositie de potentiaal V als functie van y .
[Antw. $V = 18/\sqrt{y^2 + 0,0001}$]
 - b Noem de hoek $\angle OPQ_2 = \alpha$. Bepaal de potentiaal V als functie van de hoek α .
[Antw. $V = 1,8/\sin \alpha$ kV]
 - c Bepaal de veldsterkte E met de vectoriële som als functie van y . Bepaal eerst de veldsterkte E_1 van een enkele lading als vector.
[Antw. $E_1 = 9/(y^2 + 0,0001)$, $E = 18y/(y^2 + 0,0001)^{3/2}$]
 - d Bepaal de veldsterkte E met de som van de componenten als functie van y . (de horizontale is nul). Bepaal eerst de verticale component E_{1y} van een enkele lading.
[Antw. $E_{1y} = 9y/(y^2 + 0,0001)^{3/2}$, $E = 18y/(y^2 + 0,0001)^{3/2}$]
 - e Bepaal de veldsterkte E als functie van α .
[Antw. $E = 180 \cos \alpha \sin^2 \alpha$ kV/m]
 - f Bepaal de veldsterktecomponent langs de y -as door differentiatie van de potentiaal $V(y)$.
[Antw. $E_y = -\frac{dV}{dy}$]

4.2 Elektrische velden

4.2.1 Veld van elektrische dipool

Elektrische dipool In het hoofdstuk ‘Ladingen en stromen’ hebben we kennis gemaakt met de elektrische dipool, en in het hoofdstuk ‘Polarisatie en magnetisatie’ hebben we gezien hoe de polarisatie vooral door het veld van de elektrische dipolen, die in de vaste stof zitten, wordt bepaald. Een dipool bestaat, zoals de naam zegt, uit twee ladingen met



Figuur 4.2 Een fysische dipool: de twee tegengestelde ladingen op korte afstand van elkaar worden gevormd door de kernlading en de elektronenwolklading, waarvan het zwaartepunt iets buiten de kern ligt.

teggengestelde ladingen, Q en $-Q$, op een korte afstand a van elkaar. We nemen gemakshalve een coördinatenstelsel aan, zodanig dat de *negatieve* lading $-Q$ in de *oorsprong* is, en de *positieve* lading Q in het punt a op de x -as is gelegen. Het **dipoolmoment** \underline{p}_e van een elektrische dipool is de vector $\underline{p}_e = Q\underline{a}$, langs de verbindinglijn van de $-$ naar de $+$ lading (hier ligt het dipoolmoment dus langs de x -as).

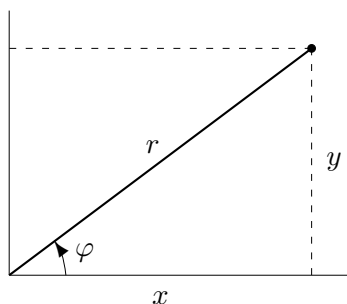
Dipoolvlak Het veld van de dipool is in alle vlakken die deze lijn bevatten gelijk. Daarom beperken we ons tot het XY vlak. Omdat het duidelijk is, dat de *afstand van de ladingen tot het veldpunt*, waar het veld wordt bepaald, van groot belang is, zullen we in *poolcoördinaten* werken. Daarbij wordt een punt van het XY vlak aangegeven door de afstand r tot de oorsprong en de hoek φ van de positieve x -as naar de afstandsvector r die naar het punt gaat.

Bolladingpotentiaal Uitgangspunt is de potentiaal van een bolsymmetrische lading Q in een veldpunt P , buiten de lading, op afstand r van het midden van de bol (beschreven in paragraaf 1.8.4 op pag. 67):

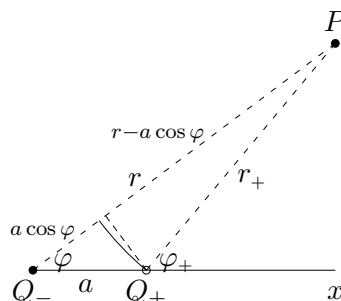
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \quad \text{buiten bollading}$$

Dipoolpotentiaal Bij een dipool hebben we de potentiaal V_- van de negatieve lading en de potentiaal V_+ van de positieve lading, berekend in hetzelfde punt P :

$$V_- = \frac{-Q}{4\pi\epsilon r_-} \quad V_+ = \frac{+Q}{4\pi\epsilon r_+}$$



Figuur 4.3 Poolcoördinaten; een punt met coördinaten (x,y) heeft de afstand r tot O en de hoek φ met de x-as.



Figuur 4.4 Dipoolveldpunt; het veldpunt P heeft verschillende afstanden (nl. r en r_+) en richtingen (nl. φ en φ_+) naar de $-$ en de $+$ lading van de dipool.

waarbij r de afstand is tussen de negatieve lading en het veldpunt P (de negatieve lading zit in de oorsprong) en r_+ de afstand tussen de positieve lading en het veldpunt P .

De superpositie, voor het vinden van de totale potentiaal van de dipool, is in dit geval niet anders dan het optellen van de twee afzonderlijke potentialen van de $+$ en $-$ lading:

$$V = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r} \right)$$

Deze uitdrukking kan vereenvoudigd worden in geval het veldpunt voldoende ver van de dipool is. Dat betekent hier: als $r \gg a$. In dat geval zijn de afstanden r_+ en r nagenoeg gelijk.

Voldoende ver van de dipool In de driehoek Q_-Q_+P (figuur 4.4) lezen we af dat het voetpunt van de loodlijn uit Q_+ op de lijn Q_-P vrijwel samenvalt met het snijpunt van de cirkelboog, met P als middelpunt en r_+ als straal, met de lijn Q_-P . Verder zien we uit figuur 4.4 dat

$$r_+ \approx r - a \cos \varphi$$

Dit geeft bij benadering:

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r} = \frac{r - r_+}{rr_+} \approx \frac{a \cos \varphi}{r^2}$$

Door invullen in de vergelijking voor de potentiaal V (tevens Q en a combinerend tot het *elektrisch dipoolmoment* $p_e = aQ$) verkrijgen we de **potentiaal** V van een **dipool** met dipoolmoment p_e :

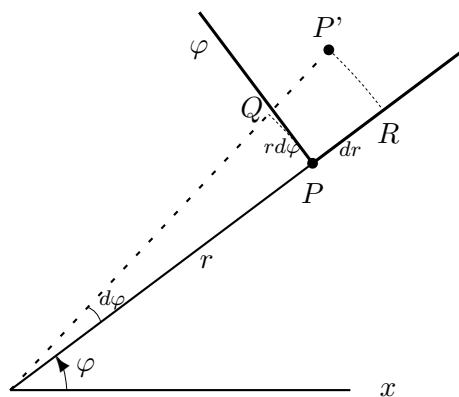
$$V = \frac{p_e \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^2} \quad \text{dipool} \quad r \gg a \cos \varphi$$

We zien, dat de dipoolpotentiaal *omgekeerd kwadratisch* afneemt met de afstand tot de dipool. Verder is er een hoekafhankelijkheid via de cosinus: de dipoolpotentiaal is *evenredig met de component* (van het dipoolmoment) *in de richting van het punt*. Met behulp van de potentiaal van de dipool kunnen we nu de veldsterkte E vinden. Bijvoorbeeld in *rechthoekcoördinaten* met componenten langs de horizontale x -as en verticale y -as. E_x en E_y geven dan samen de veldsterkte E :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \quad E_y = -\frac{dV}{dy} \quad E^2 = E_x^2 + E_y^2$$

Het probleem is dat als we van het punt P , waar de potentiaal V is, gaan naar een punt dat dx naar rechts ligt niet alleen de afstand r verandert, maar ook de hoek φ . In zo'n geval is het slimmer om de veldsterkte te bepalen in de richtingen die bij **poolcoördinaten** horen.

Poolcoördinaten richtingen *Uitgaande van het punt P zijn er twee richtingen, die haaks op elkaar staan, genaamd 'straal' r (van radiaal, dat is 'stralend') en 'hoek' φ (ook wel t van tangentieel, dat is 'rakend'):*
 r -richting toenemende afstand r in één richting (hoek φ constant);
 φ -richting toenemende hoek φ op één afstand (straal r constant);
 De *poolcoördinaten* componenten zijn E_r , langs de radiële r -as, en E_φ langs de φ -as. Samen geven ze de veldsterkte E : $E^2 = E_r^2 + E_\varphi^2$.



Figuur 4.5 De assen r - en φ , in een punt P , die passen bij poolcoördinaten. Merk op, dat de richtingen r en φ altijd loodrecht op elkaar staan. Aangegeven is de verandering in positie van P naar P' , en de bijbehorende veranderingen dr en $r d\varphi$ langs de assen.

Dipoolveldsterkte in poolcoördinaten We bepalen de veldsterkte componenten door het potentiaalverschil te delen door het afstandsver-

schil in de richting van de component. Om de r -component te bepalen gaan we van punt P naar punt R langs de r -as (zie figuur 4.5); dan is het afstandsverschil dr . Voor de φ -component gaan we van P naar Q langs de φ -as; dan is de afstand gelijk aan $dl = r d\varphi$, omdat PQ praktisch een cirkelboog is met straal r en booghoek $d\varphi$. Daaruit volgt:

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad E_\varphi = -\frac{dV}{rd\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{dV}{d\varphi} \quad E^2 = E_r^2 + E_\varphi^2$$

Voor kleine veranderingen worden de *differentiequotienten* gelijk aan *afgeleiden* in het punt P . Bij de bepaling van E_r differentiëren we alléén naar r , en blijft φ constant. Bij de bepaling van E_φ differentiëren we alleen naar φ en blijft r constant. In dit geval is V de potentiaal van het dipoolveld, zoals boven bepaald, en krijgen we de **veldsterktecomponenten** van het dipoolveld, met E_r in de straalrichting, en E_φ in de tangentiële richting:

$$E_r = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon r^3} \quad E_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon r^3}$$

Met Pythagoras volgt de **dipoolveldsterkte** E :

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

Dipoolveldsterkte in rechthoekcoördinaten

Het *omzetten* van poolcoördinaten naar rechthoekcoördinaten is eenvoudig uit te voeren. Bedenk daartoe, dat we iedere vector kunnen ontbinden in horizontale en verticale componenten.

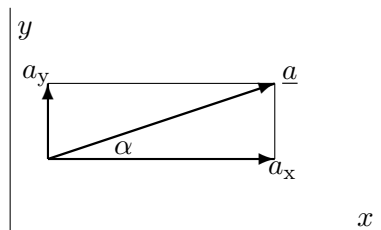
Een vector \underline{a} is in poolcoördinaten bepaald door de richting α met de x -as, en de grootte a . De rechthoek componenten zijn daaruit te vinden door projectie op de assen:

$$a_x = a \cos \alpha \quad a_y = a \sin \alpha$$

Het elektrische veld kennen we door twee vectoren: de radiale veldcomponent \underline{E}_r , die onder een hoek φ met de x -as staat, en de tangentiële component E_φ , die onder de hoek $\varphi + \frac{1}{2}\pi$ met de x -as staat.

Voor de radiale vector geldt:

$$E_{rx} = E_r \cos \varphi \quad E_{ry} = E_r \sin \varphi$$



Figuur 4.6 Een vector is eenvoudig te ontbinden in zijn horizontale en verticale componenten door projectie op de assen; de \cos van de projectiehoek bepaalt de projectie

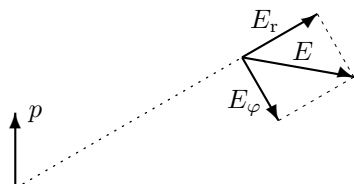
Door gebruik van de eigenschap: $\cos(\varphi + \frac{1}{2}\pi) = -\sin \varphi$ en $\sin(\varphi + \frac{1}{2}\pi) = \cos \varphi$ vinden we voor de tangentiële vector:

$$E_{\varphi x} = -E_{\varphi} \sin \varphi \quad E_{\varphi y} = E_{\varphi} \cos \varphi$$

Door superpositie van de twee velddelen wordt het veld van de elektrische dipool in rechthoekcoördinaten:

$$E_x = E_r \cos \varphi - E_{\varphi} \sin \varphi \quad E_y = E_r \sin \varphi + E_{\varphi} \cos \varphi$$

Opg 4.2.1 **



Bereken de componenten, en de grootte, van de veldsterkte van een dipool, met een sterkte van 1 pCm. Het veldpunt ligt op een afstand van 1 mm en onder een hoek van 60° met de dipoolrichting.

a in poolcoördinaten (dwz een radiale E_r en een tangentiële component E_{φ}) [Antw. $E_r = 9,00$ MV/m, $E_{\varphi} = 7,79$ MV/m, $E = 11,9$ MV/m]

b in rechthoekcoördinaten (dwz een horizontale E_x en een verticale component E_y)

[Antw. $E_x = -2,25$ MV/m, $E_y = 11,7$ MV/m, $E = 11,9$ MV/m]

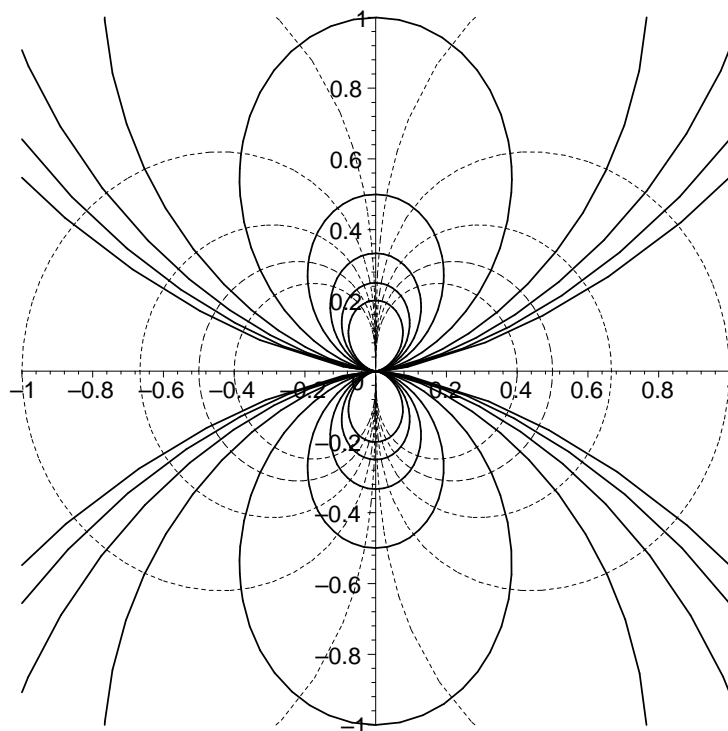
Opg 4.2.2 ****

In het dipoolveld van een horizontale dipool liggen punten waarin de veldlijnen verticaal staan, op lijnen met richtingscoëfficiënt $\sqrt{2}$ of $-\sqrt{2}$. Laat dat zien (bekijk ook figuur 4.7). Bepaal daartoe de vergelijking van de veldpunten waar $E_x = 0$ met behulp van de potentiaal van een dipoolveld.

Dipoolveld Met de nu gevonden componenten van het dipoolveld in poolcoördinaten kunnen we alle mogelijke vragen over het dipoolveld beantwoorden. Zo kunnen we de veldsterkte, in absolute zin, eenvoudig vinden met de bekende regel van Pythagoras: $E^2 = E_r^2 + E_{\varphi}^2$. Verder is de loop van de veldlijnen met behulp van de poolcoördinaten eenvoudig te tekenen. Maar dat kan eenvoudiger: de veldlijnen staan immers loodrecht op de potentiaalvlakken. Een *potentiaalvlak*, met potentiaal V , heeft de poolcoördinaten vergelijking:

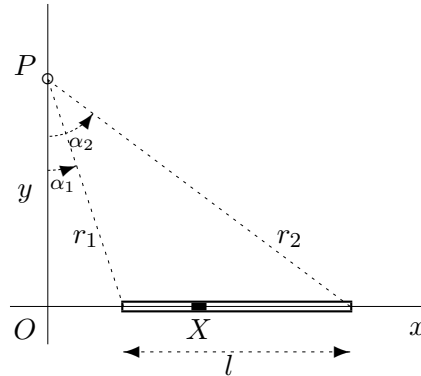
$$r^2 = \frac{p \cos \varphi}{4\pi\epsilon V}$$

Voor de volledigheid de vergelijking van een veldlijn: $r = r(\pi/2) \sin^2 \varphi$, zonder afleiding. Het veldlijnen en potentiaalvlakken beeld van het dipoolveld is te zien in figuur 4.7. Merk op, dat de punten aan de rechterkant, het dichtst bij de positieve kant van de dipool, een positieve potentiaal hebben; hun kenmerk is dus $\cos \varphi > 0$.



Figuur 4.7 Dipoolveld van dipool in x-richting: potentiaalvlakken (gestreept), en veldlijnen (getrokken). De positieve potentiaal in het rechter halfvlak, de negatieve links. Let op de richtingsgevoeligheid van het veld: vanaf de x-as uitwaaiend. Merk op dat de potentiaalvlakken (veldlijnen) alle vergrotingen zijn vanuit de oorsprong van het eenheidspotentiaalvlak (eenheidveldlijn). Daardoor liggen de punten met gelijke veldrichting op rechte lijnen door de oorsprong.

4.2.2 Veld van lijnlading



Figuur 4.8 Overzicht van de geladen staaf op de x -as met oorsprong O , het veldpunt P en de deellading in X ; let erop, dat de hoeken vanuit P tov de loodlijn op de staaf worden gemeten.

Vooronderstellingen Als volgende stap naar een meer realistisch veld bezien we het veld van lading op een staaf. Om het niet te ingewikkeld te maken zullen we ons een aantal beperkingen opleggen wat betreft de *soort ruimte* en de *verdeling* van de lading over de ruimte:

- de staaf is recht;
- de staaf heeft verwaarloosbare dikte ten opzichte van de lengte;
- de lading is homogeen (gelijkmatig) verdeeld over de staaf;

Omdat de dikte van de staaf wordt verwaarloosd zeggen we dat de staaf-lading, of lijnlading, Q homogeen is verdeeld over de lengte l van de 'lijn', met *constante lijnladingsdichtheid* λ :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} = \frac{Q}{l}$$

Dit betekent: op 1 meter van de staaf bevindt zich λ Coulomb aan lading. Op ieder deel van de staaf met lengte dl meter bevindt zich het deel dQ van de lading Q , die we de **deellading** dQ noemen, met lading:

$$dQ = \lambda dl$$

We spreken af dat de x -richting langs de lijn ligt. Het veldpunt P ligt op een afstand y van de staaf, dus de x -as; zie de figuur 4.8. De oorsprong O nemen we in het voetpunt van de loodlijn uit P op de x -as.

Veld van deellading Als de lengtedelen dl maar klein genoeg zijn, vergeleken met de afstand tot het veldpunt waar we de elektrische veldsterkte willen berekenen, dan zijn die ladingsdelen dQ ieder voor zich op te vatten als bolladingen of *puntladingen*, die op een afstand r van P liggen. Superpositie bestaat dan uit het optellen van de velden van ‘oneindig vele’ puntladingen. Neem een *willekeurige* lengtedeel dl in het punt X van de staaf. We mogen voor dl ook wel dx schrijven, omdat de staaf in de x -richting ligt en de verschillende lengtedelen gelijk zijn aan de toename dx van de positie x . Dan volgt voor het *potentiaaldeel* dV van de deellading dQ :

$$dV = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon r}$$

Hoekvariabele We hebben tot nu twee variabelen: x en r ; maar deze zijn *afhankelijk* van elkaar. Immers, als we naar een andere deellading gaan, waarbij x anders is, dan zal tegelijkertijd de afstand r veranderen. Het blijkt bij dit soort problemen dat we, in plaats van x en r , beter kunnen *omzetten* naar een vaste afstand en een geschikte *hoekvariabele*, die als *onafhankelijk* variabele fungeert. We nemen de vaste afstand y tot de lijn en de hoek *waaronder de deellading wordt gezien*, kijkend vanuit het veldpunt. Dat is α , de hoek tussen PO , de loodlijn uit het veldpunt op de lijn, en PX , de lijn naar de deellading. Daardoor werken we als het ware met een van de twee variabelen van poolcoördinaten, maar dan wel zo dat de oorsprong in het *veldpunt* wordt gekozen. Alles wordt *vanuit het veldpunt* bepaald.

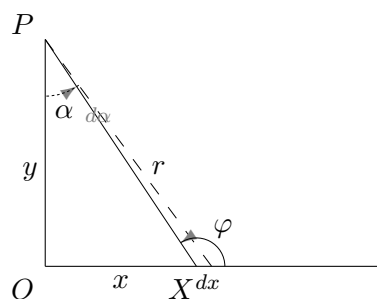
Variabelen transformatie

De variabelen x (eigenlijk dx , maar even geduld) en r moeten worden omgezet naar de gekozen afstand y en hoekvariabele α . Zo zien we bijvoorbeeld (in fig. 4.9) dat voor x in de driehoek OXP geldt: $x/y = \tan \alpha$. Dus:

$$x = y \tan \alpha$$

Voor de afstand r zien we in dezelfde driehoek: $y/r = \cos \alpha$, dus

$$r = \frac{y}{\cos \alpha}$$



Figuur 4.9 Hulpdriehoek voor het bepalen van de transformatie van de variabelen r en x naar variabelen y en hoek α .

En dan nu nog dx : dx kan worden gezien als de *differentiaal* van x . Daartoe wordt x opgevat als functie van een variabele—in dit geval is dat de hoekvariabele α . Dan volgt door differentiëren van x naar α voor dx :

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{y}{\cos^2 \alpha} \implies dx = \frac{y d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Potentiaal De laatste stap: het optellen van de potentiaaldelen is niet de eenvoudigste. Dus even doorzetten! Substitutie van x , r en dx in de potentiaal van de deellading dV levert het potentiaaldeel op uitgedrukt in de nieuwe hoekvariabele:

$$dV = \left(\lambda \frac{y d\alpha}{\cos^2 \alpha} \right) / \left(4\pi\epsilon \frac{y}{\cos \alpha} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon \cos \alpha} d\alpha$$

Als we alle ladingsdelen tezamen nemen, dan kunnen we eenvoudigweg alle potentiaaldelen sommeren ('met de lange S'). Zijn de ladingsdelen klein genoeg, dan gaat het *sommeren* over in *integreren* naar de variabele van de differentiaal, (naar α dus):

$$\begin{aligned} V = \int dV &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \left[\ln \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left(\tan \left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) / \left(\tan \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

De grenzen van de integratie zijn de uiteinden van de staaf, zodat het eindresultaat alleen afhangt van de hoeken waaronder de twee uiteinden worden gezien vanuit het veldpunt. Pas op: precies boven het midden van de staaf zijn de hoeken α_1 en α_2 precies *tegengesteld*, dus zeker niet gelijk! Hoe is hieruit te zien hoe de potentiaal met de positie varieert?

Potentiaalvlakken Voor meer inzicht in de afhankelijkheid van de potentiaal van de geladen staaf van de positie wordt α uitgedrukt in de afstand r tot de randen (en l). Dan volgt (hele tijd niets)...de **potentiaal** V :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \left(\frac{r_1 + r_2 + l}{r_1 + r_2 - l} \right)$$

De laatste (moeilijke) omzetting is achterwege gelaten, maar daaruit blijkt dat V afhangt van de som $r_1 + r_2$ van de afstanden tot de uiteinden. Volgens de ellips definitie:

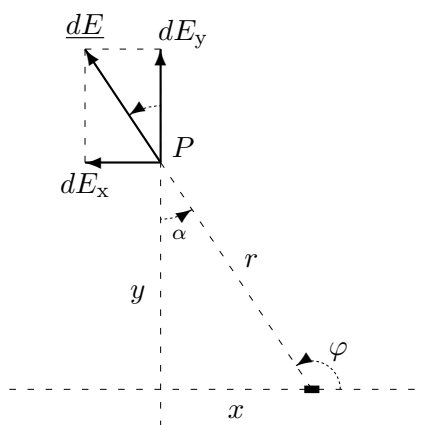
- de potentiaalvlakken van een geladen staaf zijn *ellipsen* met de eindpunten van de staaf als *brandpunten* (zie figuur 4.11).

Uiteraard is nog steeds $\lambda = Q/l$, zodat de eenheden kloppen.

Veldsterktedeel De elektrische veldsterkte uit deze potentiaal bepalen, door differentiëren, is heel lastig, door de ingewikkelde functie.

Daarom, maar ook als voorbeeld van de componenten methode, zullen we de veldsterkte delen van de ladingsdelen optellen tot de veldsterkte. Ook dat is weer heel lastig. We gaan de elektrische veldsterkte van een geladen lijn zelfstandig bepalen uit de superpositie van veldsterkten van puntladingen $dQ = \lambda dx$. We gaan weer uit van dezelfde situatie als bij de bepaling van de potentiaal in P . Om tot de veldsterkte in P te komen moeten alle **veldsterktegedelen** $d\mathbf{E}$ van de ladingsdelen worden *opgeteld*. Volgens de wet van Coulomb geldt:

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon r^2}$$



Figuur 4.10 Bepaling van het veldsterktedeel $d\mathbf{E}$ uit de componenten van de van het veld van een deel van een geladen staaf.

De componenten van het veldvectordeel worden (zie fig. 4.10):

$$dE_x = dE \sin \alpha \quad dE_y = dE \cos \alpha$$

Zoals eerder drukken we dx en r weer uit in α en de vaste afstand y , zodat:

$$dx = \frac{y}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad r = \frac{y}{\cos \alpha}$$

Invullen geeft:

$$dE = \frac{\lambda(y/\cos^2 \alpha)d\alpha}{4\pi\epsilon y^2/\cos^2 \alpha} = \frac{\lambda d\alpha}{4\pi\epsilon y}$$

zodat het veldsterktedeel alleen maar van de hoek afhangt waaronder het ladingdeel wordt gezien (en van de afstand tot de lijn). Voor de componenten geldt:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \sin \alpha d\alpha \quad dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \cos \alpha d\alpha$$

Veldsterkte De veldsterktegedelen kunnen, per component, worden ‘opgeteld’ tot een resulterende E_x en E_y . Door samenstellen van de twee componenten is de veldsterkte \mathbf{E} te bepalen. Zo vinden we de *sterkte* van het veld E met:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2$$

Ook de *richting* van het veld, dus van de veldsterktevector \underline{E} , volgt (op een hoek π na) uit de componenten:

$$\tan \varphi = \frac{E_y}{E_x}$$

φ is de hoek met de (positieve) x -richting.

De optelling van de veldsterktedelen resulteert in:

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \\ E_y &= \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon y} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{aligned}$$

We kunnen de componenten anders, inzichtelijker, schrijven. Met hulp van goniometrie-formules: een verschil van sinussen of cosinussen is uit te drukken in een produkt van sinussen en/of cosinussen van de halve som- of verschil-hoek (zie de blauwe kaart of het wiskundig vademecum).

Dit levert op:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon y} \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ E_y &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon y} \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

Uit de vorm van de vergelijking voor de componenten (alleen verschillend in de sin respectievelijk de cos) vinden we de grootte van de **veldsterkte** E ; we herschrijven:

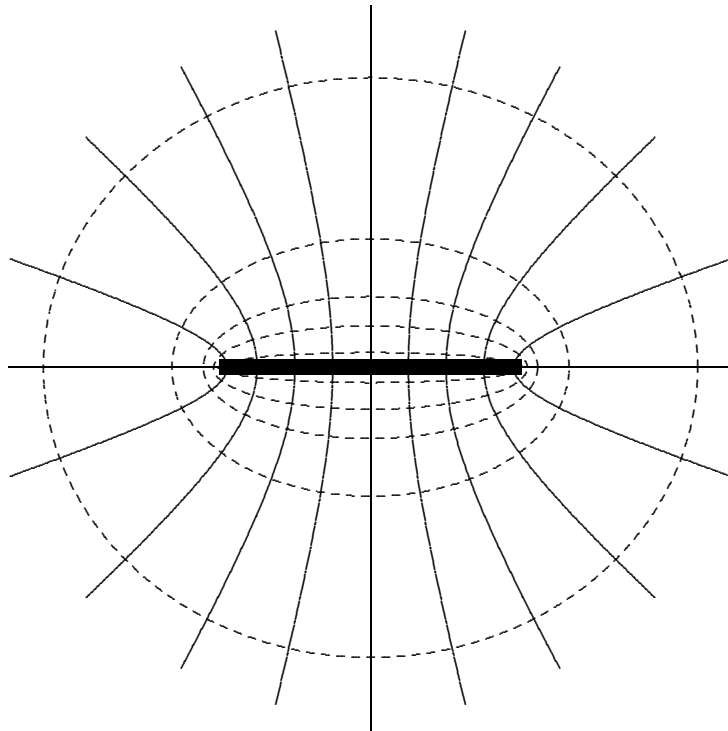
$$\begin{aligned} E_x &= E \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ E_y &= E \cos \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \\ E &= \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon y} \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

De hoek $(\alpha_2 - \alpha_1)$ is de hoek waaronder de staaf wordt gezien vanuit het veldpunt P : hoe verder weg, hoe kleiner. De hoek $\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$ is de hoek waaronder het 'gemiddelde' punt van de staaf wordt gezien vanuit P , in de buurt van het midden.

Wanneer de staaf *zeer lang* is (anders gezegd: dicht op de staaf) krijgt het veld cilindrsymmetrie. Dat is dan op te lossen met de wet van Gauss; ga zelf na hoe de fluxdichtheid rechtstreeks uit de wet van Gauss volgt. Uit de hier afgeleide formules, met $\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, volgt:

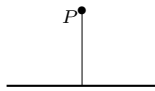
$$E = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon y}$$

Conclusie *Het veld van een geladen staaf neemt af met de omgekeerde loodrechte afstand tot de staaf en met de hoek waaronder de staaf wordt gezien.*



Figuur 4.11 Veld van lijnlading in een vlak door de lijn; veldlijnen (hyperbolen) getrokken, potentiaalvlakken (ellipsen) gestreept. Merk op, dat het veld slechts langzaam uitwaaiert (iets sterker bij de uiteinden). De veldsterkte is omgekeerd evenredig met de afstand tot de staaf.

Opg 4.2.3 ****



Een lading van $0,1 \mu\text{C}$ is homogeen verdeeld over een dunne staaf met een lengte van 40 cm. Bereken het veld in een punt op 20 cm loodrechte afstand van het midden van de staaf.

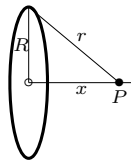
a bereken de potentiaal.

[Antw. $V = 3,97 \text{ kV}$]

b bereken de veldsterkte.

[Antw. $E = 15,9 \text{ kV/m}$]

Opg 4.2.4

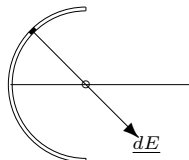


Over een dunne cirkelvormige ring met $R = 3 \text{ cm}$ straal is een lading van 1 pC homogeen verdeeld. Wat is de kracht op een lading van $1 \mu\text{C}$ in het middelpunt (vanwege de symmetrie)?

a ** Bepaal de potentiaal langs de as van de ring als functie van de afstand tot het middelpunt. [Antw. $V = 9 \cdot 10^{-3}/r$, $r^2 = x^2 + a^2$]

b **** Wat wordt de kracht op dezelfde lading 4 cm langs de as van de ring verplaatst tov het middelpunt? [Antw. $F = 2,88 \mu\text{N}$]

Opg 4.2.5



Een staaf is *half* cirkelvormig gebogen en geladen met een lading Q . De cirkelstraal is r .

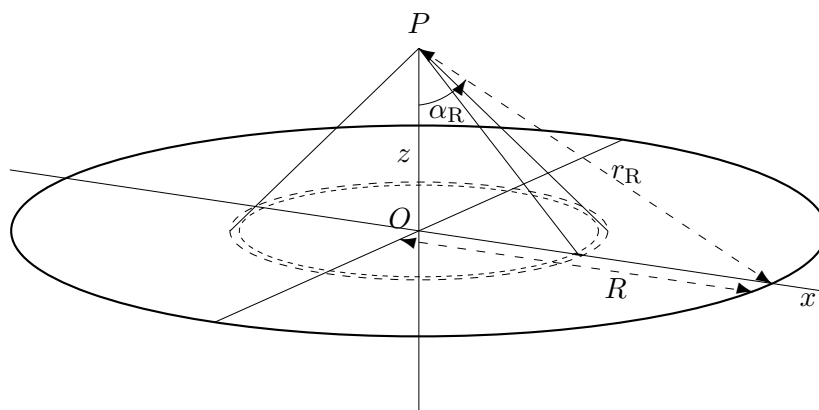
a * Bepaal de potentiaal in het middelpunt van de halve cirkel. [Antw. $V = 9 \cdot 10^9 Q/r$]

b **** Bepaal de veldsterkte in het middelpunt van de halve cirkel.

[Antw. $E = 18 \cdot 10^9 Q/\pi r^2$]

4.2.3 Veld van vlaklading

Na het veld van de gelijkmatig geladen staaf bepalen we nu het veld



Figuur 4.12 Geladen cirkelvormige plaat, met het veldpunt P op de as van symmetrie; let ook op ring ladingsdelen, met ongeveer gelijke afstand tot P (tussen de twee gestreepte cirkels).

van een *gelijkmatig geladen plaat*, een **vlaklading**. Opnieuw beperken we ons:

- de plaat is vlak en cirkelvormig;
- de plaat heeft een verwaarloosbare dikte;
- de lading is homogeen (gelijkmatig) verdeeld over het vlak;
- het veldpunt P ligt op de as van symmetrie;

Als de lading Q is, en het oppervlak A , dan is de vlakladingsdichtheid Q/A . De straal van de plaat noemen we R , zodat het oppervlak A gelijk is aan πR^2 . We hebben een constante, vanwege de homogeniteit, **vlakladingsdichtheid** σ , met eenheid C/m^2 :

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Superpositiebeginsel We verdelen de plaat in kleine oppervlakelementjes, die we weer als puntlading gaan opvatten. Niet ieder deelopervlak heeft dezelfde invloed op potentiaal en veldsterkte. Evengrote ladingen met gelijke afstand tot een veldpunt hebben dezelfde potentiaal bijdrage. Vanuit een veldpunt *op de as van symmetrie* gezien, liggen zulke ladingen op cirkels met hetzelfde middelpunt als de plaat. Het oppervlak van de geladen cirkel benaderen we daarom door concentrische ringen op de cirkel te leggen. Eerst bepalen we het veld van één ring op afstand r van een punt P op de as, daarna kunnen we sommeren over de vele dunne concentrische ringen, waarmee het hele vlak vol ligt.

Ringladingsdeel In figuur 4.12 hierboven is zo'n dunne ring met straal x en breedte dx getekend. Beschouw nu de ring die 'gezien' wordt tussen de hoeken α en $d\alpha$. Het oppervlak van die ring drukken we in eerste instantie uit in de straal van de cirkel x en de straaltoename dx . We mogen, omdat dx zeer klein is, het ringoppervlak opvatten als het oppervlak van een rechthoekje met breedte $2\pi x$ en hoogte dx :

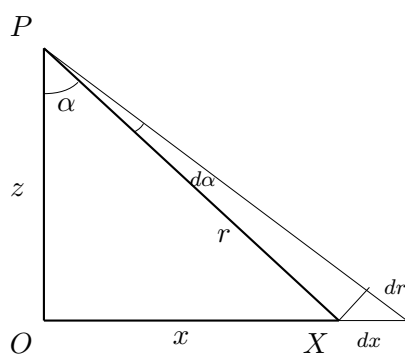
$$dA = 2\pi x dx$$

Uit de vlakladingsdichtheid $\sigma = dQ/dA$ volgt de deellading dQ van de ring:

$$dQ = \sigma 2\pi x dx$$

Ringpotentiaaldeel We vatten de lading op de ring op als één puntlading, deellading dQ , ondermeer omdat al die lading dezelfde afstand r tot het veldpunt heeft. Het potentiaaldeel dV van die de ring is:

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon r} = \frac{\sigma 2\pi x dx}{4\pi\epsilon r} = \frac{\sigma x dx}{2\epsilon r}$$



Figuur 4.13 Hulpdriehoek POX , waarbij P veldpunt, O cirkelmidden en X deellading. De onafhankelijke hoekvariabele is α .

Omdat er zoveel symmetrie is, zal *omzetten* naar vaste afstand z en hoekvariabele α , zo als we deden bij de geladen staaf (zie pagina 188 en verder), de potentiaalbijdrage *niet* inzichtelijker maken. Immers, de afstand r tot het veldpunt is volgens Pythagoras in driehoek POX :

$$r^2 = x^2 + z^2$$

en door differentiëren (met z constant)

$$2r dr = 2x dx$$

De term $x dx$ komt exact voor in het potentiaaldeel van de ringlading. Na invullen blijkt r weg te vallen, en het ringpotentiaaldeel is constant (inzichtelijker kan niet):

$$dV = \frac{\sigma}{2\epsilon} dr$$

Potentiaal Voor de potentiaal in P van het gele vlak moeten we alle ringen nemen, beginnend bij het middelpunt O van het vlak en eindigend bij de rand met straal R . Daarbij varieert de afstand r van z tot r_R .

Integreren van alle potentiaaldelen, het optellen van alle toenames dr , geeft de **potentiaal** van de homogeen geladen cirkel:

$$V_{\text{vlak}} = \frac{\sigma}{2\epsilon} [r]_z^{r_R} = \frac{\sigma}{2\epsilon} (r_R - z)$$

Limietgevallen Voor *zeer grote hoogte* z nadert r_R/z naar 1, de potentiaal gaat naar 0, maar hoe? Er geldt:

$$r_R - z = \frac{r_R^2 - z^2}{r_R + z} = \frac{R^2}{r_R + z} = \frac{R^2}{(r_R/z + 1)z} \approx \frac{R^2}{2z}$$

Vullen we deze benadering van het verschil in, met $\sigma = Q/\pi R^2$, dan benadert de potentiaal voor *grote hoogte* (natuurlijk, en ook voor andere punten dan die op de symmetrieas!) die van een bollading:

$$V = \frac{Q}{\pi R^2 2\epsilon} \frac{R^2}{2z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon z} \quad z \gg R$$

Voor *zeer kleine hoogte* nadert r_R naar R en wordt de potentiaal praktisch evenredig met de afstand z . Daarmee benadert de potentiaal voor *kleine hoogten* die van een vlakke plaat:

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon} (R - z)$$

Veldsterkte Voor het bepalen van de veldsterkte langs de z -as kunnen we hier wèl de potentiaal gebruiken: $E_z = -dV/dz$. Houd er wel rekening mee, dat r_R , de afstand tot de rand, zelf ook van de hoogte z afhangt. De z -component van de veldsterkte E_z wordt:

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\epsilon} \left(\frac{dr_R}{dz} - 1 \right)$$

Voor de afstand tot de rand geldt:

$$r_R^2 = z^2 + R^2 \implies \frac{dr_R}{dz} = 2z \implies \frac{dr_R}{dz} = \frac{z}{r_R}$$

De *veldsterktecomponent* langs de z -as, z boven het cirkelmidden is:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(1 - \frac{z}{r_R} \right)$$

Vanwege de symmetrie is de **veldsterkte** E gelijk aan de (grootte van de) veldsterktecomponent E_z in de richting z . Bij *een onbeperkt grote*

plaat wordt $r_R = R$ en de term $\frac{z}{R}$ is voor zeer grote R te verwaarlozen ten opzichte van 1. Onafhankelijk van de hoogte (!) geldt dus:

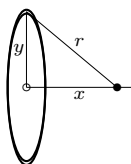
$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

Dat de veldsterkte niet meer van de hoogte afhangt wisten we allang van de vlakke plaat condensator: het veld van een vlakke plaat is *homogeen*, dus constant. Het veld tussen de *twee* platen van de condensator is de som van het veld van de positieve plaat en dat van de negatieve plaat, die elkaar versterken, zodat het totale veld $E = \sigma/\epsilon$ wordt, in overeenstemming met de wet van Gauss.

Conclusie *Het elektrische veld van een homogeen geladen cirkel plaat met vlakladingsdichtheid σ is praktisch homogeen, evenredig met de vlakladingsdichtheid. Bij een zeer grote plaat blijft de potentiaal niet eindig en vereenvoudigd de veldsterkte tot:*

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

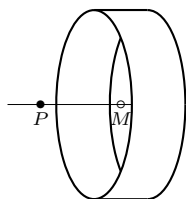
Opg 4.2.6 **



Een cirkelvormige plaat met 10 cm straal is homogeen geladen met een lading van $1 \mu\text{C}$. Het veldpunt wordt uiteindelijk een punt langs de as van de plaat, en wel op een afstand van $x = 20$ cm van de plaat vandaan.

- ** Bepaal de potentiaal van een ring op een afstand r van een willekeurig veldpunt, met afstand x tot de plaat, met straal y en met ringdikte dy .
[Antw. $dV = 1,8 \cdot 10^6 \frac{y dy}{r}$]
- **** Ga over op de meest geschikte hoekvariabele α en druk het potentiaaldeel daarin uit.
[Antw. $dV = 1,8 \cdot 10^6 x \frac{\sin \alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha}$]
- ** Bepaal de potentiaal van de gehele plaat in het willekeurige veldpunt x door integreren.
[Antw. $V = 1,8 \cdot 10^6 (r - x) \quad r^2 = x^2 + 0,01$]
- ** Bepaal de veldsterkte in het veldpunt langs de as met $x = 20$ cm door differentiëren.
[Antw. $E_x = 190 \text{ kV/m}$]

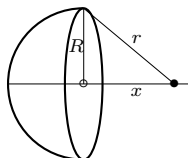
Opg 4.2.7 **



Een lading van $1 \mu\text{C}$ is homogeen verdeeld over een cilinderoppervlak, waarvan de straal 10 cm is en de lengte 2 cm. Bereken voor het punt op de as, op 3cm afstand van het midden van de cilinder de potentiaal en de veldsterkte.

- **** het potentiaaldeel in 'de' hoekvariabele van een cilinderdeel.
[Antw. $dV = 0,45 \cdot 10^6 d\alpha / \sin \alpha$]
- ** de potentiaal.
[Antw. $V = 83,5 \text{ kV}$]
- **** het veldsterktecomponentdeel langs de as, in 'de' hoekvariabele.
[Antw. $dE = 4,5 \cdot 10^6 \cos \alpha d\alpha$]
- ** de veldsterkte.
[Antw. $E = 0,235 \text{ MV/m}$]

Opg 4.2.8 **



Een dunne plaat is gebogen in de vorm van een halve bol, waarvan de straal R is. Op de plaat is homogeen een lading Q verdeeld.

a * Bepaal de potentiaal in het middelpunt van de halve bol waarvan de straal R is.

[Antw. $V = 9 \cdot 10^9 Q/R$]

Bepaal nu de veldsterkte in het middelpunt van de halve bol. Aanwijzing: vat de halve bol op als een samenstelling van ringen die ieder een lading hebben afhankelijk van hun grootte. De veldsterkte langs de as van de halve bol is dan de superpositie van de ringen.

b **** het veldsterktedeel *langs de as* van een ring op de halve bol, gezien onder de hoek α , $d\alpha$, vanuit het midden.

[Antw. $dE_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$]

c ** de veldsterkte langs de as.

[Antw. $E_x = Q/8\pi\epsilon R^2$]

d ***** de veldsterkte langs de as op een willekeurige afstand.

[Antw. $E_x = Q/(4\pi\epsilon r(r + R))$]

4.2.4 Kracht tussen bolladingen 2

Bolschil verdelen in cirkels We zullen tenslotte de *wet van Coulomb* aantonen. We gaan uit van **Kracht tussen bolladingen 1** (pag. 85), dus lees dat eerst. Lading Q_1 is homogeen verdeeld over de bol met straal R_1 , vlakladingsdichtheid $\sigma = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2}$. Ieder deel, met deelopervlak dA_1 en deellading $dQ_1 = \sigma dA_1$, voelt in de x-richting deelkracht dF_C :

$$dF_C = dQ_1 E_x = \sigma dA_1 \frac{Q_2}{4\pi\epsilon r^2} \frac{x}{r} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_1^2} \frac{x dA_1}{4\pi r^3}$$

Een cirkelvormige deel van de bol heeft gelijke afstand r resp. x tot M_1 . Zijn deelopervlak is $dA_1 = 2\pi y R_1 d\varphi = 2\pi R_1 dx$. De deelkracht is:

$$dF_C = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_1^2} \frac{x 2\pi R_1 dx}{4\pi r^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon R_1} \frac{x dx}{2r^3}$$

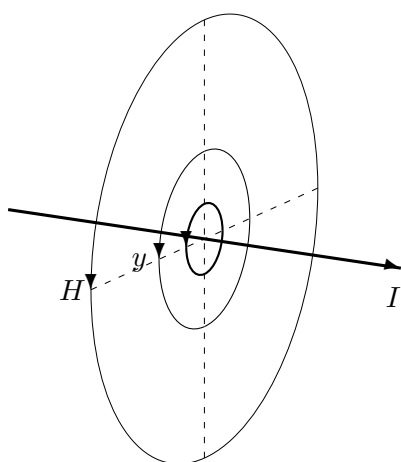
De cosinusregel in PM_2M_1 geeft een verband tussen r , r_{12} , R_1 en x , als we gebruiken dat $\cos(PM_1M_2) = -\cos(PM_1x) = -(x - r_{12})/R_1$:

$$\begin{aligned} r^2 &= R_1^2 + r_{12}^2 + 2R_1 r_{12}(x - r_{12})/R_1 \implies r dr = r_{12} dx \\ dF_C &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \frac{(r^2 + (r_{12}^2 - R_1^2)) dr}{4R_1 r^2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \frac{dr + (r_{12}^2 - R_1^2) dr/r^2}{4R_1} \\ F_C &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \frac{[r - (r_{12}^2 - R_1^2)/r]_{r_{12}-R_1}^{r_{12}+R_1}}{4R_1} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \frac{2R_1 - (r_{12}^2 - R_1^2)/(r_{12} + R_1) + (r_{12}^2 - R_1^2)/(r_{12} - R_1)}{4R_1} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \frac{2R_1 - (r_{12} - R_1) + (r_{12} + R_1)}{4R_1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon r_{12}^2} \end{aligned}$$

4.3 Magnetische velden

4.3.1 Veld van rechte lijnstroom

Ideale rechte stroomgeleider



Figuur 4.14 Magnetisch veld van een ideale rechte stroomgeleider. Slechts in èèn vlak zijn enkele cirkelvormige veldlijnen getekend. Let op de 'kurketrekkerregel' voor de richting van het veld afhankelijk van de stroomrichting.

Een **ideale rechte stroomgeleider** is oneindig dun en oneindig lang. Het magnetische veld is te vinden met *de wet van Ampère* (zie paragraaf 3.2). De magnetische flux draait rond de geleider volgens de kurketrekkerregel (zie fig. 4.14). De magnetische veldsterkte H wordt bepaald door de magnetische spanning $U_{\text{m rond}}$ die óver de veldlijn staat èn de stroom die erdóór gaat. Bij een rondgang is de totale waarde $U_{\text{m rond}}$ gelijk aan de stroom I . Over de veldlijn is de veldsterkte constant: $U_{\text{m rond}} = Hl$. De lengte van de veldlijn is de omtrek van een cirkel met als straal de afstand tot de geleider y : $l = 2\pi y$. Dus volgt $U_{\text{m rond}} = H 2\pi y$, en de **magnetische veldsterkte** van een oneindig lange rechte **lijnstroom**:

$$H = \frac{I}{2\pi y}$$

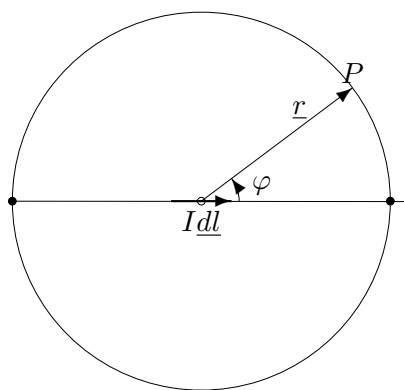
- Opg 4.3.1 **** Door een zeer lange rechte geleider gaat een stroom van 25 A. Bereken de magnetische veldsterkte in een punt dat 12 cm van de hartlijn van de geleider is verwijderd. [Antw. $H = 33,2 \text{ A/m}$]
- Opg 4.3.2 **** De toevoerdraad en de afvoerdraad van een gelijkstroominstallatie lopen evenwijdig. De hartlijnen zijn 20 cm van elkaar verwijderd. De stroomsterkte is 60 A. Hoe groot is de magnetische veldsterkte in een punt dat 12 cm van de hartlijn van de ene draad en 16 cm van de andere draad is verwijderd? [Antw. $H = 99,5 \text{ A/m}$]
- Opg 4.3.3 ****** Een stroom I gaat homogeen door lange, vlakke en dunne, geleider met breedte b . Bepaal H in het vlak van de geleider op afstand a van de rand van de strip. Beschouw daartoe de strip opgedeeld in smalle stroken met breedte dy , die als stroomdraad zijn op te vatten met stroomsterkte dI . [Antw. $H = \frac{I}{2\pi b} \ln(1 + \frac{b}{a})$]

Eindig lange stroomgeleiders Hoe moeten we nu het magneetveld van een eindig stuk stroomgeleider bepalen? Om superpositie op meer algemene problemen dan de rechte geleider te kunnen toepassen delen we de geleider op in vele kleine delen. De stroom I gaat, volgens Kirchhoff, door ieder deel, stroomdeel geheten, met lengte dl ; de stroom door de delen heet **deelstroom**. De vraag is nu: hoe ziet het veld van alleen zo'n *klein deel* stroomgeleider er uit? Principieel is dat veld *niet* experimenteel te bepalen, omdat een stroom altijd moet doorgaan. Het is dan ook niet eenvoudig om het antwoord op de gestelde vraag te vinden. Wel kunnen we verwachten dat de veldlijnen rond de stroomlijn lopen (denkbeeldig recht doorgetrokken), ook dus waar de stroom niet 'is' (we doen net of er alléén stroom I loopt door dl). Verder: we nemen aan dat de fluxdichtheid, dus de veldsterkte, over een veldlijn constant is. Maar hoe groot is de veldsterkte van de deelflux, veroorzaakt door de deelstroom I die loopt door het gedeelte dl van de stroomgeleider?

- De veldsterkte blijkt omgekeerd kwadratisch met de afstand r tot de deelstroom af te nemen (zoals bij elektrische velden!).

Let op het verschil tussen de afstand y tot de stroomlijn en de afstand r tot de deelstroom.

Veld van deelstroom Vergeleken met elektrische velden is er echter nog iets bijzonders aan de hand bij het magnetische veld van stromen: de veldsterkte is gevoelig voor de *richting*. We vergelijken de veldsterkten voor punten P die alle op dezelfde afstand r van dl gelegen zijn (zie fig. 4.15). De punten P liggen op een bol, met straal r om (het midden van) het geleiderdeel; de stroomlijn is een middellijn van de bol. Vanuit het lijndeel dl gezien ligt P onder een hoek φ met de stroomlijn. Daarbij zijn er twee speciale punten: de punten die precies op de stroomlijn van het stroomelementje dl liggen, dus waar vandaan het stukje dl 'niet te zien' is (dan is of $\varphi = 0$ of $\varphi = \pi$). Op die punten mag er geen veld zijn:



Figuur 4.15 Het veldpunt P ten opzichte van de deelstroom $I dl$; let erop dat de afstand en hoek vanuit het element wordt gezien.

wat zou de richting ervan moeten zijn? De veldlijn is ineengeschrompeld tot een 'punt'. Er is kennelijk een *extra factor* die het veld bepaalt,

zodanig afhankelijk van de hoek φ dat hij verdwijnt als $\varphi = 0$ en als $\varphi = \pi$. Biot en Savart lieten zien, in 1820, hoe die factor moest zijn: evenredig met $\sin \varphi$. Daarmee wordt bedoeld, dat als het veld van de oneindig lange rechte stroomgeleider op grond van die aanname wordt berekend, de uitkomst overeenkomt met de wet van Ampère.

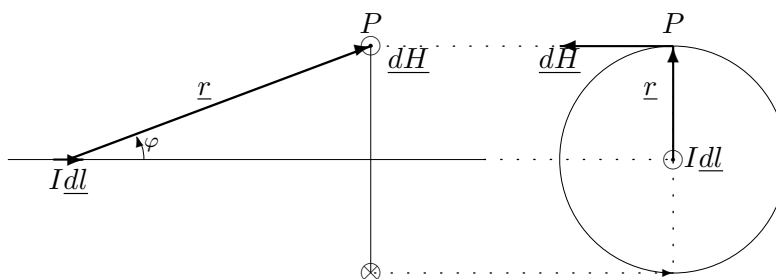
Wet van Biot en Savart De deelstroom $I \underline{dl}$ geeft een velddeel bijdrage $d\underline{H}$ tot de magnetische veldsterkte \underline{H} in het veldpunt P . De deelstroom is een *vector*, waarvan de richting gelijk is aan de richting van de stroom door dl . De magnetische flux loopt cirkelvormig om de lijn die door dl gaat; dat bepaalt de richting van het velddeel. De *grootte* van het velddeel dH wordt bepaald door:

1. de stroomsterkte I en het lijnstuk dl ;
2. de afstand r vandaar tot P ;
3. de hoek φ waaronder het veldpunt wordt gezien;

Volgens de **wet van Biot en Savart** is de sterkte dH van het magnetische velddeel van een deelstroom $I \underline{dl}$:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I \underline{dl} \sin \varphi}{r^2}$$

De evenredigheidsfactor (een getal, omdat de *eenheid van magnetische veldsterkte* H is A/m), is gekozen als $\frac{1}{4\pi}$ om de wet van Biot en Savart in overeenstemming met de wet van Ampère te brengen.



Figuur 4.16 Het velddeel $d\underline{H}$ in P veroorzaakt door de deelstroom $I \underline{dl}$ in twee projecties: links in het vlak door P en de stroomlijn, rechts door P en het vlak loodrecht op de stroomlijn (tegen de stroom in gezien).

De vector wet van Biot en Savart Een nadeel van bovenstaande formule voor de veldsterkte is, dat hij slechts de grootte geeft, niet de richting. Gelukkig is het mogelijk, dankzij de sinus, om de veldsterkte als vector te schrijven. We herinneren ons, dat het produkt $dl \sin \varphi r$ de grootte is van de vector, ontstaan uit het uitwendig produkt van de vectoren \underline{dl} en \underline{r} : $\underline{dl} \times \underline{r}$. Bovendien is de richting van het uitproduct

loodrecht op \underline{dl} , de lijnrichting en loodrecht op \underline{r} , de richting van de deelstroom naar het veldpunt. Maar dat is precies de richting van het veld: de raaklijn aan de veldlijncirkel is haaks op zowel \underline{dl} als \underline{r} . *Alles bij elkaar krijgen we als uitgangformule voor het toepassen van het superpositiebeginsel bij magnetische velden de **wet van Biot en Savart in vectorvorm**:*

$$\underline{dH} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \underline{dl} \times \underline{1_r}}{r^2}$$

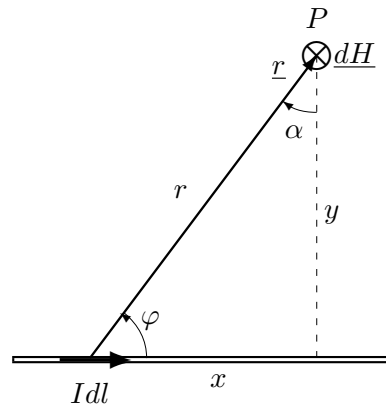
Daarin is $\underline{1_r}$ de **eenheidsvector langs \underline{r}** . (Zouden we \underline{r} hebben geschreven, dan had de noemer een derde macht van r moeten hebben.)
Conclusie:

- De magnetische veldsterkte is omgekeerd kwadratisch afhankelijk van de afstand tot de deelstroom.

Veld van lange rechte lijnstroom opnieuw. Om het veld van een oneindig lange rechte stroomgeleider, met verwaarloosbare afmetingen in de dwarsdoorsnede, terug te vinden zullen we de bijdragen van alle deelstromen moeten optellen. Let op: we moeten *vectoriëel optellen*. Gelukkig echter staan de deelfluxen van alle deelstromen in dezelfde richting. Dán is het voldoende om de grootten op te tellen. Dat optellen gaat het gemakkelijkst, we herhalen wat al eerder is opgemerkt, als we de verschillende grootheden uitdrukken in een variabele hoek φ . Dat is de hoek φ tussen de richting van de stroomlijn en de richting vanuit de deelstroom naar het veldpunt. We kiezen een willekeurig stroomdeel in de lijnstroom l . De bijdrage tot het totale magnetische veld in P van dit elementje \underline{dl} is volgens de wet van Biot en Savart:

$$\underline{dH} = \frac{1}{4\pi} \frac{I \underline{dl} \times \underline{1_r}}{r^2}$$

De grootheden zijn in figuur 4.17 getekend. Volgens de regels van het uitwendig product is de richting van \underline{dH} in P loodrecht het papier in. Dit geldt voor elke \underline{dH} van elke deelstroom van de lange rechte geleider l , zodat de deelvelden van alle deelstromen in dezelfde richting staan. De bijdragen \underline{dH} in het



Figuur 4.17 Het veldpunt P op hoogte y boven de rechte lijnstroom l ; vanuit het deelstroom is de hoekvariabele φ , vanuit P gezien de hoek α .

punt P kunnen dus gewoon worden opgeteld. De grootte van de deelveldsterkte dH wordt (de grootte van $\underline{1}_r$ is 1):

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \underline{1}_r \sin \varphi}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \varphi}{r^2}$$

In deze uitdrukking zijn de variabelen niet onafhankelijk: bij een deelstroom dichtbij hoort een kleinere deelstroom, een grotere hoek en een kleinere afstand (dus drie dingen veranderen). Door over te gaan op één onafhankelijk variabele wordt de uitdrukking inzichtelijker.

Deelveld in hoekvariabele Het blijkt dat de *hoekvariabele* α in het veldpunt, tussen de loodlijn op de stroomlijn en de richting van de deelstroom, de handigste keuze is (nog handiger dan φ) als onafhankelijk variabele. We zullen de (afhankelijke) variabelen (dl , r en φ) omzetten naar vaste y en φ . Allereerst merken we op, dat de lengte van de deelstroom dl gelijk is aan de toename van de positie x van de deelstroom langs de stroomlijn:

$$dl = dx.$$

Uit figuur 4.17 volgt verder voor x (beide x en α zijn negatief!):

$$\frac{x}{y} = \tan \alpha \Rightarrow x = y \tan \alpha \Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = \frac{y}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow dx = \frac{y d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Naar rechts neemt x toe, dus is $dx > 0$, en $d\alpha > 0$ (omdat de negatieve hoek afneemt). Uit dezelfde figuur volgt voor r en φ :

$$\frac{y}{r} = \cos \alpha \Rightarrow r = \frac{y}{\cos \alpha} \quad \text{en} \quad \sin \varphi = \cos \alpha$$

Substitutie in de wet van Biot en Savart levert op een deelveld dH op tengevolge van de deelstroom $I dl$:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I(yd\alpha/\cos^2 \alpha) \cos \alpha}{(y/\cos \alpha)^2} = \frac{I}{4\pi y} \cos \alpha d\alpha$$

De **eenheid van magnetische veldsterkte** is duidelijk A/m. Merk op dat de afstand r geen rol schijnt te spelen, wèl de afstand y tot de stroomlijn. Ook $\cos \alpha$ hangt af van de afstand (ver weg 0, zo dicht mogelijk bij 1).

Magnetisch veld van rechte stroomgeleider Om de bijdrage van de gehele, oneindig lange, rechte geleider te krijgen laten we α variëren van $-\frac{1}{2}\pi$ tot $+\frac{1}{2}\pi$, en sommeren (integreren) alle bijdragen:

$$H = \int dH = \frac{I}{4\pi y} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos \alpha d\alpha = \frac{I}{4\pi y} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{I}{2\pi y}$$

We hadden dit al verwacht: de uitkomst is overeenkomstig de wet van Ampère! Hiermee is de wet van Biot en Savart ‘bewezen’.

Het zal duidelijk zijn dat in het geval van een eindige stroomgeleider de hoek α loopt van α_1 tot α_2 (zie fig. 4.18), waarbij opgemerkt wordt dat de hoeken weer gemeten worden ten opzichte van de loodlijn uit het veldpunt P neergelaten op de rechte stroomgeleider. Als we rekening houden met de *richting* van de hoek, dan zijn de twee hoeken tegengesteld van teken. Het resulterende magnetische veld van de *eindige rechte stroomgeleider* wordt:

$$H = \frac{I}{4\pi y} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Analoog aan de geladen staaf kunnen we, met een goniometrische formule, op de verschil- en somhoek overgaan:

$$H = \frac{I}{2\pi y} \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) \sin \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

De halve somhoek wijst naar het ‘gemiddelde’ stroomdeel. De afstand daarheen, gezien vanuit P , is precies $y / \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)$. Verder is $\alpha_2 - \alpha_1$ de hoek waaronder de rechte wordt gezien.

Conclusie *Het magnetische veld van een eindige rechte stroomgeleider is omgekeerd evenredig met de afstand tot de geleider en met de sinus van de halve hoek waaronder de geleider wordt gezien. Voor de oneindig lange geleider vereenvoudigd dat tot:*

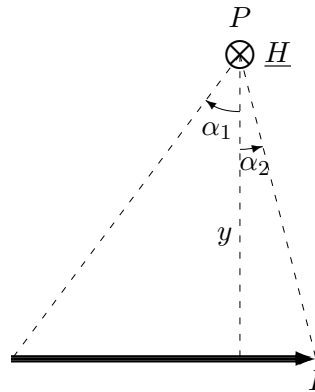
$$H = \frac{I}{2\pi y}$$

Opg 4.3.4 ** Wat is de magnetische inductie B in het midden van een vierkante stroomkring, zijden van 10 cm, stroomsterkte 10 A.

[Antw. $B = 1,13 \cdot 10^{-4}$ T]

Opg 4.3.5 **** Een vierkant raam heeft zijden van 12 cm en draagt 40 windingen, waardoor een stroom van 7 A gaat. Bereken de veldsterkte in een punt P dat ligt op de lijn die gaat door het snijpunt M van de diagonalen en loodrecht staat op het vlak van het raam, terwijl $PM = 8$ cm. Maak een goede tekening.

[Antw. $H = 550$ A/m]



Figuur 4.18 Eindige rechte stroomgeleider met veldpunt P . Aangegeven zijn de afstand y tot de geleider en de randhoeken α_1 , α_2 naar de uiteinden; deze hoeken zijn tegengesteld van teken.

4.3.2 Veld van cirkelstroom

Vooronderstellingen

Met behulp van de wet van Biot en Savart kunnen we in principe van elke stroomverdeling het bijbehorende magnetische veld in een veldpunt P bepalen: we delen de stroom op in zeer vele stroomdeeltjes waarvan het velddeel in P te vinden is uit de wet van Biot en Savart. Door superpositie van deze velddelen vinden we het resulterende magnetische veld in P . Het probleem is nu, om de superpositie uit te voeren. Dat vereenvoudigt sterk als we ons beperken tot veldpunten die *even ver* liggen van *alle* stroomdelen. Daarom beperken we ons in deze paragraaf:

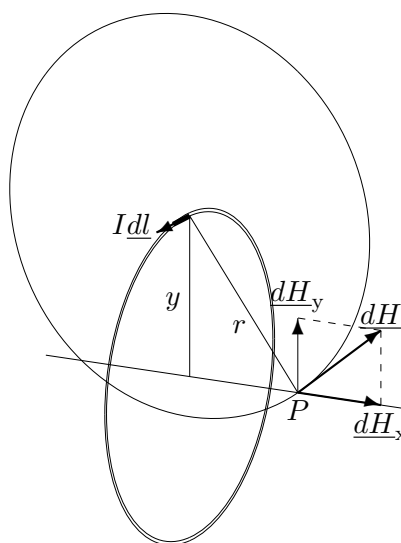
- de geleider heeft verwaarloosbare doorsnede;
- de geleider is cirkelvormig;
- het veldpunt ligt op de symmetrieas van de cirkel;

De symmetrieas is een veldlijn. Voor het veld in een willekeurig punt worden we gedwongen om de superpositie uit te voeren met behulp van numerieke integratiemethoden.

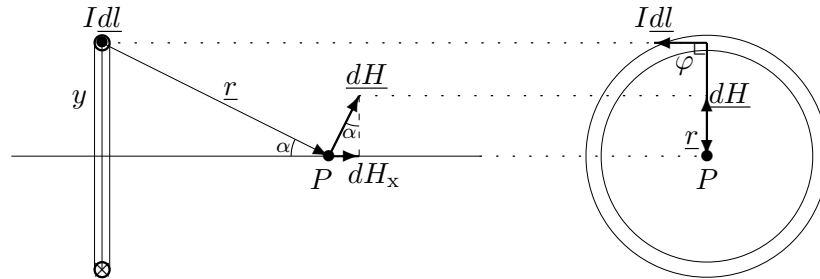
Veldsterkte van deelstroom Het veldpunt P , waar we de veldsterkte gaan bepalen, ligt op de x as die tevens de symmetrieas van de cirkelstroom in de stroomkring is. Ieder deel dl van de stroomkring geeft een velddeel dH . Uit Biot en Savart volgt voor de grootte van het velddeel:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \varphi}{r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl}{r^2},$$

met $\varphi = \pi/2$, omdat de afstandsvector \underline{r} loodrecht op het stroomdeel \underline{dl} staat (zoals is te zien in de figuren 4.19 en 4.20). Merk op, dat de twee variabelen dl en r onafhankelijk zijn. Bovendien is de afstand r naar *alle* stroomdelen van de kring constant (voor het gegeven veldpunt). Het velddeel neemt kwadratisch af met de afstand, maar feitelijk vermindert het veld nog sneller. Immers, nemen we twee *tegenover elkaar* gelegen deelstromen $I \underline{dl}$, dan zien we dat de velddeelcomponenten loodrecht op



Figuur 4.19 Velddeel dH van een deelstroom $I \underline{dl}$ van een cirkelvormige kringstroom. Let op de tangentiële richting van het magneetveld (gezien vanuit de deelstroom).



Figuur 4.20 Het velddeel dH in P , veroorzaakt door de deelstroom $I dl$, in twee projecties: links in het vlak door P en de deelstroom (symmetrieas), rechts door P en het vlak loodrecht op de deelstroom (tegen het veld in gezien). Merk op, dat de veldsterktevector dH loodrecht op de positievector r staat.

de x -as tegen elkaar wegvallen (bij gelijke deellengten), zodat slechts de veel kleinere velddeelcomponent dH_x langs de x as resteert. Zoals in bovenstaande figuur is te zien, is de hoek tussen het velddeel dH en de y -as de hoek α , waaronder vanuit het veldpunt de deelstroom wordt gezien. Daaruit volgt dat $dH_x = dH \sin \alpha$:

$$dH_x = \frac{1}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$$

Veld van cirkelstroom Het sommeren van de velddelen in P is relatief eenvoudig: alleen dl is variabel bij het rond de kring gaan! Alle velddelen optellend vinden we:

$$H_x = \int dH_x = \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} \int dl = \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} 2\pi y$$

Immers: de som van de deellengten dl is gelijk aan de omtrek van de cirkel met straal y . De cirkelstraal afstand r en de hoek α zijn *niet* onafhankelijk. Uit figuur 4.20 zien we dat $\sin \alpha = y/r$. In dit geval zullen we juist géén hoekvariabele gebruiken, en de sinus invullen in de vergelijking. De magnetische **veldsterkte** van de **cirkelstroom** langs de x as is:

$$H_x = \frac{I y^2}{2r^3}$$

Duidelijk zien we nu, dat het veld zelfs met de derde macht afneemt! Een bijzonder geval doet zich voor als het veldpunt precies in het midden van de cirkel is. In dat geval is de cirkelstraal y gelijk aan de afstand r van deelstroom naar veldpunt. In het midden M van een cirkelstroom met straal y en stroomsterkte I is de veldsterkte:

$$H_M = \frac{I}{2y}$$

Magnetisch dipoolmoment Merk op, dat het veld in het algemeen evenredig is met het kwadraat van de straal y van de cirkel, dus evenredig met het cirkeloppervlak $A = \pi y^2$:

$$H_x = \frac{I\pi y^2}{2\pi r^3} = \frac{IA}{2\pi r^3}$$

Reeds eerder (paragraaf 2.5.1 op pag. 113) werd gedefiniëerd: het *magnetisch dipoolmoment* van een *kringstroom* $\underline{p}_m = I\underline{A}$. Hierbij geldt dat de richting van \underline{p}_m past bij de richting van *rondgang* van de stroom volgens de *rechtse schroef*. De magnetische *veldsterkte langs de as* van een *kringstroom* is kennelijk evenredig met het magnetische dipoolmoment:

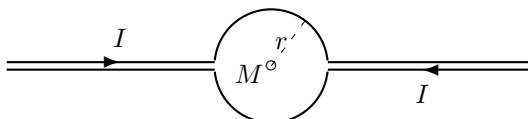
$$H_x = \frac{p_m}{2\pi r^3}$$

Vergelijk deze uitdrukking voor het veld eens met dat voor het elektrische veld langs de as van een elektrische dipool.

Conclusie *Het magnetische veld van een cirkelstroom op de as van de kring is evenredig met het magnetische dipoolmoment $\underline{p}_m = I\underline{A}$ en omgekeerd evenredig met de derde macht van de afstand r tot de kring.*

Opg 4.3.6 ** Bepaal de veldsterkte in het middelpunt van een cirkelvormige keten met een diameter van 12 cm, indien de stroomsterkte in die keten 36 A bedraagt. [Antw. $H = 300$ A/m]

Opg 4.3.7 **

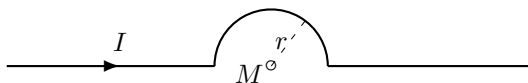


Bepaal \underline{B} in het middelpunt M van beide halve cirkelbogen, straal r .

[Antw. $B = 6,28 \cdot 10^{-7} I/r$ het papier in gericht]

Opg 4.3.8 **** Een cirkelvormige wikkeling, diameter 40 cm, bestaat uit 60 windingen en is zo opgesteld dat het vlak van de windingen samenvalt met dat van de magnetische meridiaan. Een kort magneetje is in het midden van de wikkeling draaibaar opgesteld om een verticale as. Men voert een stroom door de windingen; het magneetje wijkt dan 30 graden uit. De horizontale component van het aardmagnetisme is 14 A/m. Bereken de sterkte van de stroom. [Antw. $I = 0,054$ A]

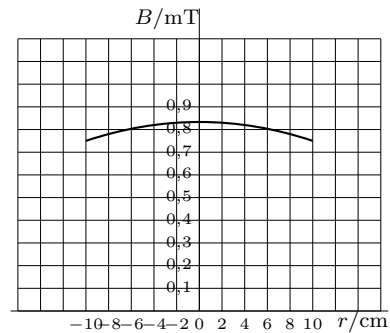
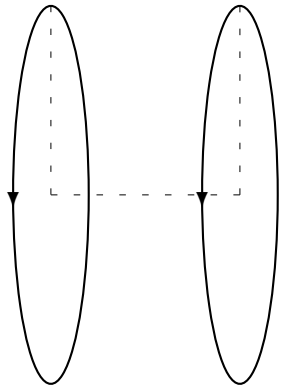
Opg 4.3.9 ****



Bepaal \underline{B} in het middelpunt M van de halve cirkelboog, straal r .

[Antw. $B = \pi 10^{-7} I/r$ het papier in gericht]

Helmholtz-spoel



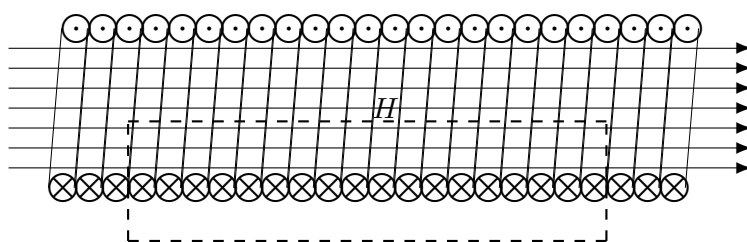
Figuur 4.21 Helmholtz-spoel: de afstand van de cirkelvormige geleiders is gelijk aan hun straal, de stromen zijn parallel.

Figuur 4.22 Magneetveld in het midden van de Helmholtz-spoel als functie van de afstand tot de as: let op het homogene veld rond het midden van het geheel.

Er is een spoel, die is bedacht door Helmholtz, die bestaat uit twee cirkelvormige geleiders met samenvallende as. De afstand van de kringen is heel precies gekozen: gelijk aan de straal van de cirkels, zoals in de figuur is te zien. Het bijzondere aan deze combinatie van twee cirkelvormige stroomkringen is, dat het veld rond de as van de spoel in het midden zéér homogeen is. Dat komt natuurlijk omdat iedere kring apart wel een uitwaaiend veld heeft, maar daar waar het veld van de ene kring van de as af gaat, gaat het veld van de andere kring juist naar de as toe (en vice versa). Daarmee compenseren de twee velden elkaars uitwaaieren en resulteert een veld dat in hoge mate *homogeen* is, tot ver van het midden vandaan. Die redenering geldt alleen tussen de kringen in (mits de stromen gelijk om lopen). Buiten de spoelen is het veld natuurlijk ‘gewoon’ uitwaaiend. Voor een nòg homogener veld zullen we veel meer stroomkringen nodig hebben: de spoel waarbij de *stroomdraad*, met een bepaalde spoed, op een cilinder wordt gewikkeld.

4.3.3 Veld van cilindrische spoel

Vooronderstellingen Uitgaande van het veld langs de as van één cirkelvormige *stroomkring* kunnen we het veld bepalen van een spoel, bestaande uit meerdere cirkelvormige wikkelingen langs dezelfde as. Een spoel van *cirkelvormige* wikkelingen die *gelijkmatig* op een cilinderoppervlak zijn gewonden wordt een **solenoid** genoemd. Nu is het onmogelijk om een stroomdraad zo te wikkelen dat een wikkeling exact de cirkel-



Figuur 4.23 Lange solenoïde. Magnetische veldlijnen zijn getrokken; de gebroken lijn is een kring waarop de Ampère wet wordt toegepast: een aantal wikkelingen gaat door de kring, het veld oefent alleen arbeid op de veldlijn evenwijdig aan de as van de spoel.

vorm heeft: het wikkelen moet een ‘**spoed**’ hebben, die ervoor zorgt dat de stroomdraad na een winding niet op dezelfde positie uitkomt, maar ‘een spoed’ (van de wikkeling) verder—meestal wordt de draad ‘stijf’ gewikkeld, zodat de spoed gelijk is aan de draaddiameter, inclusief de isolatie. Om toch de cirkelbenadering te kunnen gebruiken is een kleine spoed nodig: de *draaddiameter is veel kleiner dan de spoeldiameter*. We beperken ons dus:

- de wikkelingen zijn cirkelvormig rond de wikkelas;
- de draaddiameter en spoed zijn verwaarloosbaar;
- het veldpunt ligt op de wikkelas;

Veld ideale solenoïde De **ideale solenoïde** is zéér lang. Het veld is eenvoudig te vinden met de wet van Ampère (zie 3.2, of, deel 1 paragraaf 4.4). Neem een kring (zie figuur 4.23), die binnen de spoel een veldlijn volgt over een lengte l , daarna loodrecht op het veld tot buiten de spoel gaat (waar geen veld is), dan buitenom terugkeert naar de beginpositie (maar dan buiten de spoel), en weer loodrecht op het veld terugkeert naar de beginpositie. Er is maar één deel waar het veld arbeid kan verrichten, namelijk langs de veldlijn over een afstand l . De veldsterkte H op die veldlijn verricht de magnetische arbeid per magnetische lading gelijk aan Hl . De magnetische spanning bij rondgaan is gelijk aan die arbeid:

$$U_{\text{m rond}} = Hl$$

Hoeveel stroom gaat er door die kring? Wel, iedere wikkeling op die afstand l , waarvan er N zijn, gaat exact éénmaal door de kring. De totale stroom door de kring is gelijk is aan

$$I_{\text{door}} = NI$$

De *wet van Ampère*: $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}}$, bepaalt zo de (homogene) veldsterkte.

Conclusie De veldsterkte H in een ideale solenoïde met wikkeldichtheid N/l en stroomsterkte I is:

$$H = \frac{NI}{l}$$

Opg 4.3.10 ** Een zeer lange solenoïde draagt 400 wikkelingen per meter. Als de stroomsterkte 6 A is, bereken dan de veldsterkte in de solenoïde.

[Antw. $H = 2400 \text{ A/m}$]

Opg 4.3.11 De wikkelas van een toroïde is een cirkel met een straal van 5,5 cm. Om de wikkelas zijn 1000 wikkelingen, met een diameter van 1 cm, gelijkmatig gewonden. Door de wikkelingen gaat een stroom van 5 A.

a ** bereken de fluxdichtheid B voor de veldlijn met 5,1 cm straal door de wet van Ampère toe te passen op die veldlijn. [Antw. $B = 19,6 \text{ mT}$]

b ** bereken B voor de middelste veldlijn met 5,5 cm straal

[Antw. $B = 18,18 \text{ mT}$]

c **** bereken \bar{B} , de gemiddelde waarde over alle veldlijnen, door de totale flux te berekenen en door het oppervlak te delen. Daartoe moet het oppervlak worden verdeeld in delen met gelijke flux, dus gelijke straal, en de deelflux daardoor worden uitgedrukt in een geschikte variabele—zoals de straal, of de afstand tot het midden van de toroïde. De superpositie zal het beste met numerieke integratie gaan.

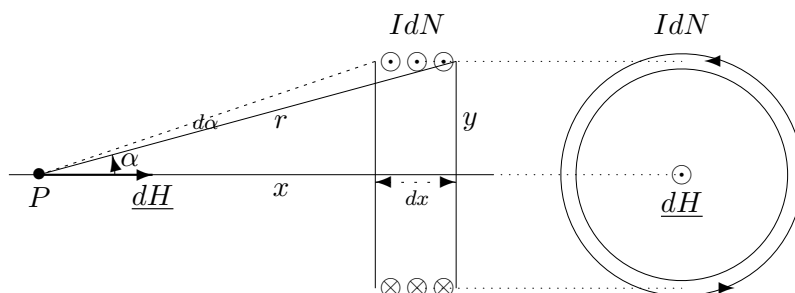
[Antw. $\bar{B} = 18,22 \text{ mT}$]

Spoeldeel Om het veld te bepalen in een spoel van N wikkelingen, gelijkmatig gewikkeld op een cilinder met lengte l , verdelen we de spoel in een aantal spoeldeel. Ieder spoeldeel heeft een korte lengte dx (de as van de spoel is in de x richting gedacht). Één meter van de spoel bevat N/l wikkelingen, dus op de dx meter van het spoeldeel zitten een aantal *deelwikkelingen* dN :

$$dN = \frac{N}{l} dx$$

Gezien vanuit een veldpunt P , op de as van de solenoïde, bevindt het spoeldeel zich ongeveer op een afstand r . Als nu de lengte van het spoeldeel dx klein is vergeleken met de afstand r , dan mogen we de dN windingen vervangen door één wikkeling waardoor een stroom $dN I$ gaat.

Veld van spoeldeel Voor een cirkelvormige kringstroom met sterkte



Figuur 4.24 Langsdoorsnede spoeldeel met wikkelstraal y . Vanuit het veldpunt P op de wikkelas wordt het spoeldeel gezien in de richting α op afstand r ; de wikkelingen van het spoeldeel worden gezien onder de hoek $d\alpha$.

I en cirkelstraal y is de magnetische veldsterkte langs de as (pag. 206):

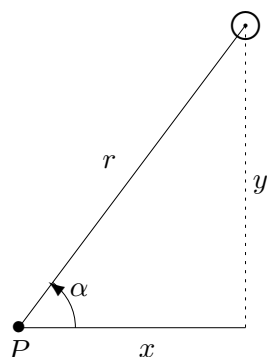
$$H_x = \frac{Iy^2}{2r^3}$$

Het spoeldeel heeft $dN = \frac{N}{l} dx$ wikkelingen, dus een effectieve stroom van $NIdx/l$ door één wikkeling, waardoor het *velddeel* langs de as in P tengevolge van het spoeldeel is:

$$dH_x = \frac{(NIdx/l)y^2}{2r^3} = \frac{NIy^2}{2l} \frac{dx}{r^3}$$

Merk op, dat het velddeel evenredig is met lengtedeel dx , en slecht verdwijnt met de afstand r .

Overgaan op hoekvariabele



Figuur 4.25 Overzicht afstanden en hoeken voor de overgang naar de hoekvariabele α .

We kiezen als onafhankelijk variabele de hoek α waaronder we het spoeldeel zien vanuit het veldpunt. De variabelen r en dx worden omgezet naar vaste afstand y en *hoekvariabele* α . Uit de figuur volgt:

$$\frac{y}{r} = \sin \alpha \quad \frac{x}{y} = \cot \alpha,$$

waaruit:

$$r = \frac{y}{\sin \alpha} \quad x = y \cot \alpha$$

Door differentiëren volgt het lengtedeel $dx = x'(\alpha)d\alpha$:

$$dx = -\frac{y}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

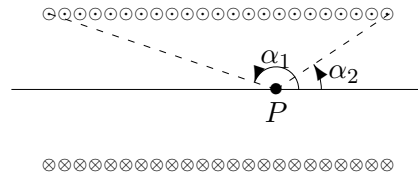
Het minteken lijkt vreemd, maar is toch correct: als de hoek α toeneemt, dus als $\alpha > 0$, dan gaat het spoeldeel naar links, dus wordt x kleiner: $dx < 0$. Substitutie van het bovenstaande geeft het velddeel dH_x langs de as van het spoeldeel:

$$dH_x = \frac{NIy^2}{2l} \frac{(-y)}{\sin^2 \alpha} d\alpha \left(\frac{\sin \alpha}{y} \right)^3 = -\frac{NI}{2l} \sin \alpha d\alpha$$

Merk op, dat de veldsterkte slechts afhangt van de **wikkeldichtheid** $\frac{N}{l}$.

Eindige solenoïde

Zoals reeds werd opgemerkt bij het veld van een cirkelstroom: de richting van het veld is langs de as. Dat geldt hier ook voor de velddelen van alle spoel delen, zodat we de velddelen gewoon op kunnen tellen. We voeren deze integratie uit door de hoek α te variëren van α_1 , bij het *linker* spoeleinde, tot α_2 , bij het *rechter* spoeleinde. Integratie levert op:



Figuur 4.26 Overzicht solenoïde; het veld wordt bepaald door de hoeken waaronder de uiteinden van de spoel worden gezien tov de *positieve* x -as.

$$H_x = \frac{NI}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha$$

De **veldsterkte** van een **solenoid** in een punt op de as, met N wikkelingen per lengte l , waardoor een stroom I gaat, is:

$$H_x = \frac{NI}{2l} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

We kunnen een iets inzichtelijker uitdrukking krijgen door een gonioformule te gebruiken voor het verschil van cosinussen:

$$H_x = \frac{N}{l} I \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Daarbij is $(\alpha_1 - \alpha_2)$ de hoek waaronder de spoel wordt gezien, en is $\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ de hoek naar het 'gemiddelde' spoeldeel.

Bijzondere gevallen Ga zelf na, dat door middel van superpositie van de velden van twee spoelen die in elkaars verlengde liggen, volkomen exact is af te leiden dat:

$$H_{\text{einde spoel}} = \frac{1}{2} H_{\text{midden dubbellange spoel}}$$

Daarmee is het veld in het midden ongeveer de helft van het veld van de zeer lange spoel. Preciezer:

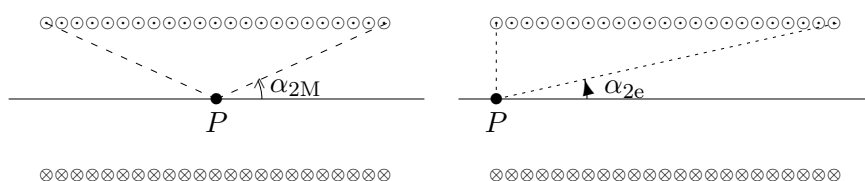
P in het midden:

$$H_{\text{midden}} = \frac{NI}{l} \cos \alpha_{2M}$$

P aan het uiteinde:

$$H_{\text{uiteinde}} = \frac{1}{2} \frac{NI}{2l} \cos \alpha_{2E}$$

Let op: het gaat hier om *verschillende hoeken* α_2 naar het rechter spoel-eind! Als de spoeldiameter klein is vergeleken met de spoellengte, denk aan een factor 10, dan zullen de beide cosinussen ongeveer 1 zijn, en het veld wordt dat van de zeer lange solenoïde—zoals te verwachten was.



a P in het midden: de hoek α_{2M} bepaalt de veldsterkte.

b P aan uiteinde: de hoek α_{2E} bepaalt de veldsterkte.

Figuur 4.27 Overzicht van een solenoïde spoel voor twee speciale veldpunten P : in het midden en aan het uiteinde.

Opg 4.3.12 Een solenoïde is 20 cm lang en draagt 3000 wikkelingen met een straal van 2 cm. Als de stroomsterkte 2 A is, bereken dan de fluxdichtheid B :

a ** alsof het een ideale spoel is. [Antw. $B = 37,70$ mT]

b **** in het midden. [Antw. $B = 37,0$ mT]

c ** in het midden van een uiteinde. [Antw. $B = 18,8$ mT]

Opg 4.3.13 **** Een spiraalvormige spoel is zo gewonden dat hij in de radiale richting een vrij groot aantal wikkelingen Z telt tussen de stralen a en b (vergelijk de wikkelingen met de groeven van een LP). Laat zien dat het magnetisch veld in het middelpunt wordt bepaald door

$$B = \frac{1}{2} \mu I \frac{Z}{b-a} \ln(b/a)$$

4.3.4 Kracht tussen stroomgeleiders

Evenwijdige stromen Reeds in 1805 ontdekte de deen H.C. Oersted (spreek uit: eursted) dat twee evenwijdige stromen elkaar aantrekken. Hij had verwacht dat ze elkaar zouden afstoten, zoals gelijke ladingen doen. Bovendien merkte hij op, dat in eerste instantie de stromen *magnetische velden* opwekken, en dat die in feite de kracht van de ene stroom op de andere stroom maken. Het is de *Lorentzkracht* die het magnetische veld van de ene stroom uitoefent op de andere stroom (en omgekeerd ook natuurlijk). We zullen hier de krachten onderzoeken die twee stromen op elkaar uitoefenen. We beperken ons:

- de stroomgeleiders zijn zeer lang en recht;
- de doorsnede is verwaarloosbaar;

We bezien eerst de **Lorentzkracht tussen evenwijdige stromen**, door zeer lange rechte geleiders op elkaar uitgeoefend.

Kracht tussen evenwijdige lange stroomgeleiders

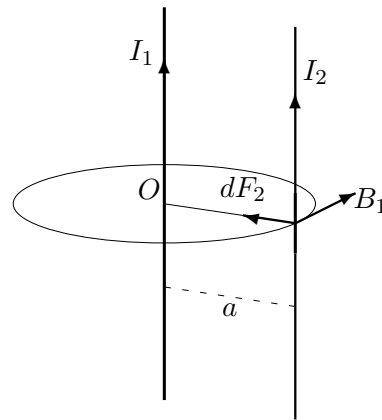
Een stroom I_1 , door de eerste geleider, veroorzaakt op afstand a , waar het stroomdeel $I_2 dl$ van de tweede geleider is, een veld met veldsterkte H_1 . Dan is de fluxdichtheid B_1 tengevolge van I_1 ter plekke van $I_2 dl$:

$$B_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi a} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1}{a}$$

Omdat de geleiders evenwijdig zijn en het magnetische veld in cirkels draait, staat het magnetische veld van de eerste stroom precies loodrecht op de tweede geleider, zoals in figuur 4.28 is aangegeven. Het Lorentzkrachtdeel dF_2 op een stukje stroomdeel $I_2 dl$ van de tweede geleider zal dan precies recht naar de eerste geleider zijn gericht.

De Lorentzkracht is $dF_2 = I_2 dl \times B_1$ (zie 2.4 op pag. 105), waardoor de richting van de kracht aantrekkend wordt (kurketrekkerregel). In dit geval geeft dat een Lorentzkrachtdeel:

$$dF_2 = I_2 dl_2 \cdot \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1}{a} \Rightarrow \frac{dF_2}{dl_2} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a}$$



Figuur 4.28 Kracht tussen evenwijdige stromen. Van het veld van de linkse geleider is de veldlijn getekend door een deelstroom van de tweede geleider. Let, bij het trefpunt, op de richting van veld B_1 , deelstroom $I_2 dl$ en krachtdeel dF_2 .

Conclusie Een oneindig lange rechte geleider, waardoor een stroom I_1 gaat, oefent op een tweede evenwijdige rechte geleider, waardoor een stroom I_2 gaat, een kracht per meter uit die evenredig is met beide stromen en omgekeerd evenredig met de afstand a :

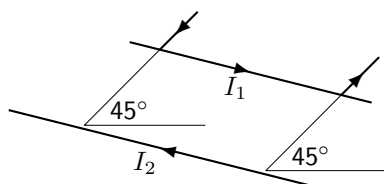
$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a}$$

Eenheid van stroomsterkte: Ampère Het theoretische belang van de kracht tussen twee evenwijdige stroomgeleiders is, dat het ons in staat stelt om de *magnetische permeabiliteit* te bepalen, namelijk door meting van de kracht die twee stromen op elkaar uitoefenen. In *werkelijkheid* wordt echter precies het omgekeerde gedaan bij de *eenheid keuze*: de definitie van de eenheid van elektrische stroomsterkte, de Ampère, wordt vastgelegd door vast te stellen hoe groot de magnetische permeabiliteit van vacuüm μ_0 zal zijn. Voeren we de stroom door de ene geleider heen, en terug door de andere, en nemen we voor de onderlinge afstand $a = 1$ m en de stroomsterkte $I = 1$ A, dan is de kracht per meter geleider gelijk aan de evenredigheidsconstante. Die wordt officieel *gelijkgesteld* aan $2 \cdot 10^{-7}$ N, zodat de *magnetische permeabiliteit van vacuüm* is:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$$

Hiermee is de *eenheid van elektrische stroomsterkte Ampère*, en daardoor de *eenheid van elektrische lading Coulomb*, bepaald.

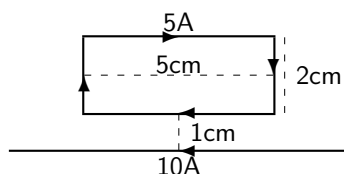
Opg 4.3.14 **



Een 10 cm lange draad kan glijden langs twee staven die onder 45 graden met het tafelvlak staan. (Zoals getekend) Door de draad gaat via de staven een stroom $I_1 = 10$ A. Door de andere getekende lange draad in het vlak van de tafel gaat een stroom $I_2 = 10$ A, in de aangegeven richting. Als de bewegende draad een gewicht van 1 g heeft, wat is dan de afstand van de draden in evenwicht?

[Antw. $a = 0,3$ mm]

Opg 4.3.15 ****



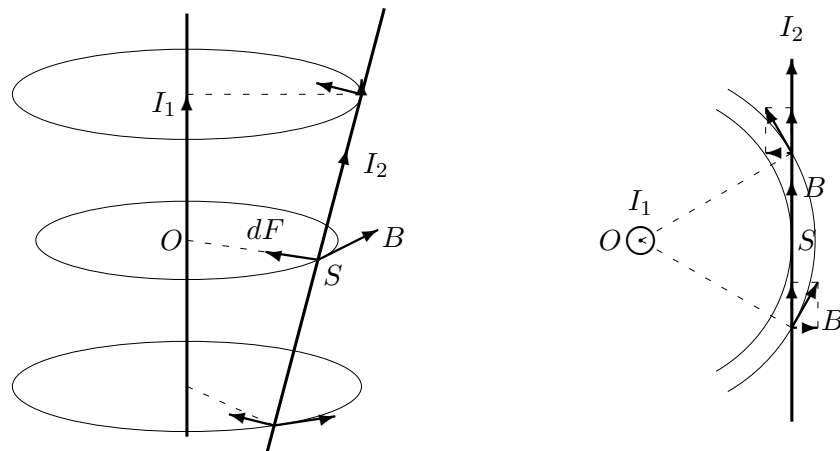
Door de stroomkring gaat een stroom van 5 A, door de rechte draad een stroom van 10 A. Bepaal de netto kracht op de stroomkring ten gevolge van de stroom door de draad.

[Antw. $F = \frac{1}{3} 10^{-4}$ N]

Kracht tussen cirkelvormige stroomgeleiders Praktisch is het onmogelijk om een oneindig lange stroomgeleider te nemen. Daarom wordt het experiment, waarbij de krachten tussen lange stroomgeleiders worden bepaald, uitgevoerd met twee *evenwijdige cirkelvormige geleiders*. Heeft de cirkel een voldoende grote straal vergeleken met de afstand tussen de geleiders, dan geldt bovenstaande uitdrukking voor de kracht per meter geleider bij benadering; de invloed van de verder weg gelegen delen van de geleider is verwaarloosbaar. Gezien de omgekeerd kwadratische afhankelijkheid van het magneetveld met de afstand is een zéér kleine afstand van de geleiders—die over de gehele cirkel met grote nauwkeurigheid constant moet worden gehouden—ten opzichte van de cirkelstraal noodzakelijk. Denk aan cm tegen m.

Opg 4.3.16 **** Twee spoelen van $N = 10$ windingen elk, en straal a , zijn op een afstand b van elkaar geplaatst, met $a = 100b$. Wat is de kracht tussen de spoelen als door elk een stroom $I = 10$ A gaat? [Antw. $F = 1,26$ N]

Niet-evenwijdige rechte stroomgeleiders Wat gebeurt er wanneer

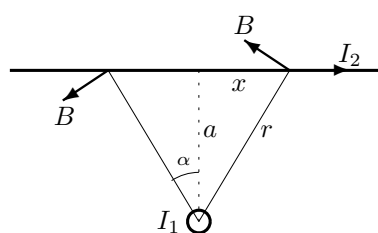


Figuur 4.29 Kracht tussen niet-evenwijdige rechte stroomgeleiders. Links een overzicht met drie magnetische veldlijnen ingetekend van het veld van de verticale stroom, met de bijbehorende fluxdichtheid B en Lorentzkracht dF op de deelstroom in de gedraaide geleider. Rechts een bovenaanzicht op het vlak loodrecht op de verticale geleider. Merk op, dat het B veld ook een component heeft in de richting van OS , die aanleiding geeft tot een krachtmoment om S .

we de tweede geleider een beetje draaien om een denkbeeldige as, gevormd door de loodrechte afstandslijn tussen de geleiders (dat is de kortste verbindingslijn OS tussen de geleiders)? Bezie aandachtig figuur 4.29. De veldlijnen van I_1 , op verschillende hoogten, zullen de deelstromen van de gedraaide geleider treffen op verschillende afstanden

èn vanuit verschillende richtingen. Ontbindt de fluxdichtheden B in de richting van de kortste afstand en loodrecht erop (in het vlak door de twee geleiders). De componenten in het vlak staan altijd in dezelfde richting: het bijbehorende Lorentzkrachtdeel geeft de aantrekkende *kracht* tussen de stromen. Vooral de componenten langs de kortste verbinding hebben verschillende grootte èn richting: aan de bovenkant naar binnen, aan de benedenkant naar buiten. Het bijbehorende Lorentzkrachtdeel is dus ook wisselend van richting. Tezamen geven ze een *krachtmoment* tussen niet-evenwijdige stromen, om S : de stromen zullen proberen de geleider te draaien naar de evenwijdige stand.

Voorbeeld Haakse stromen Bepaal de kracht en het krachtmoment van een lange geleider met 1 A stroom op een, haaks op de eerste staande, rechte geleider van 5 cm lengte met 1 A stroom. De afstand tussen de geleiders is 1 cm.



Bezie een veldlijn met een straal r . Deze treft de geleider in twee stroomdelen, te zien onder de hoeken α (en $-\alpha$) met de y -as; daarbij is links $\alpha > 0$ en rechts $\alpha < 0$. De hoek tussen stroomdeel $I_2 dx$ en veld is $\varphi = (\pi + \alpha)$. De fluxdichtheid B ter plekke van de deelstroom, op afstand $r = 10^{-2} / \cos \alpha$ is:

$$B = \frac{\mu}{4\pi} \frac{2I_1}{r} = 2 \cdot 10^{-5} \cos \alpha$$

Voor het Lorentzkrachtdeel is alleen de component loodrecht op de stroom —dat is dus de verticale component—van belang.

$$B_y = B \sin(\varphi) = 2 \cdot 10^{-5} \cos \alpha \sin(\pi + \alpha) = -2 \cdot 10^{-5} \cos \alpha \sin \alpha$$

Deze verticale component leidt tot een krachtdeel in de z -richting (in de richting van de eerste stroom) ter grootte dF :

$$dF = I_2 dl B_y = 1 dx \cdot -2 \cdot 10^{-5} \cos \alpha \sin \alpha$$

De afstand dx wordt omgezet in α door $x = a \tan \alpha = -10^{-2} \tan \alpha$, dus $dx = -10^{-2} d\alpha / \cos^2 \alpha$ (naar rechts neemt α af—vandaar het minteken). Tezamen:

$$dF = 2 \cdot 10^{-7} d\alpha \sin \alpha / \cos \alpha = 2 \cdot 10^{-7} \tan \alpha d\alpha$$

De resulterende kracht wordt $F = \int dF$:

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \int \tan \alpha d\alpha = 2 \cdot 10^{-7} [\ln(1/\cos \alpha)]$$

De grenshoek wordt bepaald door: $\tan \alpha = 2,5 \text{ cm} / 1 \text{ cm}$, hetwelk oplevert $\cos \alpha = 0,371$. De resulterende kracht wordt $F = 4 \cdot 10^{-7} \cdot \ln(1/0,371) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot 0,99 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

Het krachtmoment kan net zo worden gevonden. De arm van het krachtdeel is $x = 10^{-2} \tan \alpha$, zodat het momentdeel dT van het krachtdeel wordt:

$$dT = x dF = 10^{-2} \tan \alpha \cdot 2 \cdot 10^{-7} \tan \alpha d\alpha = 2 \cdot 10^{-9} \tan^2 \alpha d\alpha$$

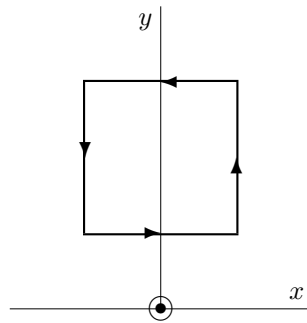
Resulteert een krachtmoment $T = \int dT$:

$$T = 2 \cdot 10^{-9} \int \tan^2 \alpha d\alpha = 2 \cdot 10^{-9} \int \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) d\alpha = 2 \cdot 10^{-9} [\tan \alpha - \alpha]$$

Kleine hoeken dragen weinig bij tot het krachtmoment, maar de grote hoeken des te meer.

$$T = 4 \cdot 10^{-9} \cdot (2,50 - 1,19) = 5,23 \cdot 10^{-9}$$

Opg 4.3.17 ****



Een stroomvoerende geleider ligt langs de z -as, en voert een stroom van 1 A. In het xy -vlak ligt een vierkante stroomkring met zijden van 1 cm met de zijden op $x = 1/2$ resp $y = 1/2$ cm en $y = 3/2$ cm; de kringstroomsterkte is 1 A. De y -as is de draaias van de kring.

a Bereken het krachtmoment op de zijde $y = 1/2$ cm

[Antw. $T = -0,429 \cdot 10^{-9}$ Nm]

b Bereken het krachtmoment op de zijde $y = 3/2$ cm

[Antw. $T = +0,069 \cdot 10^{-9}$ Nm]

c Bereken het krachtmoment op de zijde $x = +1/2$ cm

[Antw. $T = -0,805 \cdot 10^{-9}$ Nm]

d Bereken het totale krachtmoment op de kring.

[Antw. $T = -1,97 \cdot 10^{-9}$ Nm]

MEERKEUZEANTWOORDEN

Hoofdstuk 4 Statische velden

4.1 Inleiding superpositie

4.1.1 B alleen langs de as kunnen we meten

4.1.2 D omdat de potentiaal rond de as bekend is

4.2 Elektrische velden

4.3 Magnetische velden



James Clerk
Maxwell
(1831–1879)

Al heeft hij zijn latere leven in Engeland doorgebracht, Maxwell was een echte schot, in Edinburgh geboren en getogen. Na zijn studie werd hij hoogleraar natuurkunde in Aberdeen. Toen hij in 1859 een prijs behaalde met een verhandeling over de 'krachtlijnen van Faraday' steeg zijn roem. Op grond daarvan werd hij benoemd aan 'King's College' te Londen—later aan de 'Cambridge University'. Zijn belangrijkste bijdrage tot de natuurkunde was in 1865 zijn artikel 'A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field' waarin hij de ons vertrouwde 'wetten van Maxwell' formuleerde in de vorm van differentiaalvergelijkingen voor de elektrische en magnetische velden. Daarin maakte hij ook duidelijk dat licht bestaat uit elektromagnetische golven in vacuüm, zodat zijn theorie drie verschijnselen tegelijk beschreef. Zelf dacht hij dat de elektromagnetische velden een soort 'verschuiwingen' waren van een onzichtbaar medium: de 'aether'. Lang is daarnaar gezocht, totdat Einstein duidelijk

maakte dat allerlei aan die aether toegeschreven eigenschappen te maken hadden met de vorm van de natuurwetten. Sindsdien hebben de natuurkundigen de aether verlaten—alleen radioamateurs bedienen zich nog, naar men zegt, van de 'aether'. Een andere gedachte die hij had over onzichtbare dingen, namelijk gasatomen, bleek wél correct te zijn: zijn theorie over warmte en de beweging van gasatomen (die op dat moment nog niet waren aangetoond—sterker nog, er woedde een strijd tussen 'atomisten' en anderen over wat een gas was). De vereenvoudiging die Maxwell in de natuurkunde aanbracht—drie 'verschillende' verschijnselen werden met één theorie beschreven—wordt gezien als de eerste stap in de richting van 'de universele' natuurwet. Einstein heeft tevergeefs geprobeerd een volgende vereenvoudiging te bereiken. Pas rond 1970 is het gelukt de theorie zodanig te 'ijken' dat een vierde verschijnsel kon worden toegevoegd: de 'zwakke krachten'.

Hoofdstuk 5

DYNAMISCHE VELDEN

DOELSTELLINGEN

Na verwerking van dit hoofdstuk dient u de volgende begrippen en verbanden zodanig te hebben verwerkt, dat u die kan toepassen op eigenschappen van elektromagnetische velden in componenten als golfgeleiders uit bijvoorbeeld de telecommunicatie.

- verschuifeigenschap grafiek, fase, golfsnelheid;
- koppeling van veranderingen in ruimte en tijd;
- golfvergelijking;
- golf in snaar: spankracht en amplitude, golfsnelheid;
- transversale golf;
- elektromagnetische golf; E en H veld, lichtsnelheid;
- differentiaal, differentiaalvlak en differentiaalkubus;
- differentiaalvorm van de wetten van Gauss;
- differentiaalvorm van de inductiewetten van Faraday en Maxwell;
- golfvergelijking voor vlakke em-golf;
- permittiviteit en permeabiliteit, lichtsnelheid; brekingsindex;
- algemene 'wetten van Maxwell';
- koppeling elektrische en magnetische veld: em-veld, E en H loodrecht op elkaar, vaste amplitudeverhouding;
- polarisatie van em-golf;
- em-veldenergie; energiestroomdichtheid \underline{S} , Poyntingvector;
- breken van velden: fluxdichtheid loodrecht op en veldsterkte evenwijdig aan grensvlak; brekingswetten van velden;
- breken en spiegelen van straal: brekingswet van Snel, grenshoek;
- stralen in glasvezels; acceptatiehoek, numerieke apertuur; modevoorwaarden, singlemode, multimode, TE-mode en TM-mode;
- harmonische golf en fotonen; golfimpuls; golflengte en golfgetal;
- golfdemping en virtuele fotonen in grenslaag; indringdiepte;

5.1 Inleiding

Maxwell Het is niet denkbaar over de dynamische elektro-magnetische verschijnselen te praten zonder op de bijzondere rol van Maxwell in te gaan. Rond het midden van de 19^e eeuw waren, door verschillende natuurkundigen, de grondwetten van de elektrische en magnetische velden gevonden. Denk daarbij aan de theorie van het elektrische veld van Coulomb (1785), en Gauss (1830), die een verband legde tussen elektrische lading en elektrisch veld. Ook aan de theorie van het magnetische veld van Biot en Savart (1822), en Ampère (1826), die een verband legde tussen elektrische stroom een magnetisch veld. Het was langzaam maar zeker duidelijk geworden dat elektrische stroom te maken had met ‘stromende’ elektrische lading. Door Faraday was (1831) het inductie principe aangetoond, namelijk dat een veranderend magnetisch veld een elektrisch veld veroorzaakt. Ook had Faraday, met het Faraday-effect (1847), laten zien dat een magneetveld invloed had op licht (door het polarisatievlak ervan te verdraaien). Het was Maxwell die (in 1861), door de wet van Ampère uit te breiden, ook het omgekeerde verband vond: een veranderend elektrisch veld leidt tot inductie, namelijk van een magnetisch veld.

Lichtgolven Ogenblikkelijk doorzag Maxwell de consequenties die de inductiewetten hebben: eigenlijk zijn er geen aparte wetten voor elektrische verschijnselen en magnetische verschijnselen, maar het zijn beide bijzondere gevallen van het meer algemene ‘elektro-magnetische’ verschijnsel. Hij loste (in 1864) het probleem op welke wetten de koppeling tussen de dynamische elektrische en magnetische velden beschrijven; deze vergelijkingen worden daarom Maxwell-vergelijkingen genoemd. Natuurlijk loste hij die vergelijkingen ook op voor bijvoorbeeld vlakke golven: hij liet zien dat de vergelijkingen leiden tot een golfvergelijking voor ‘elektro-magnetische’ golven met een golfsnelheid zo groot als de lichtsnelheid, en concludeerde dat licht een elektro-magnetische golf moest zijn. Die gedachte werd door de arnhemmer Hendrik Antoon Lorentz in zijn proefschrift (1875) verder uitgewerkt: hij liet zien hoe de eigenschappen van lichtbreking, reflectie, polarisatie en dergelijke met Maxwell’s theorie kon worden verklaard.

Radiogolven, cmgolven en radioactieve straling Licht bleek een em-golf te zijn met zeer hoge frequenties (of hoge fotonenergie: ~ 1 eV). Het duurde tot het eind van die eeuw voor Hertz (1892) erin slaagde om ook em-golven met lagere frequenties (fotonenergie $\sim 10^{-8}$ eV) te maken: de radiogolven, opgewekt met behulp van elektrische trillingskringen. Dat opende de deur naar belangrijke ‘communicatie’ toepas-

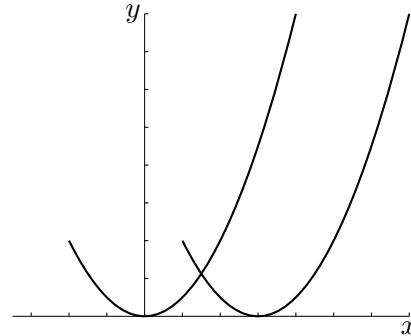
singen. Veel later, rond 1937, werden, in het verlengde van de radiogolven, de centimetergolven ontdekt (fotonenergie $\sim 10^{-3}$ eV) door de uitvinding van het klystron en het magnetron. Een ander belangrijk frequentiegebied werd rond de eeuwwisseling ontdekt bij de röntgen- en radioactieve straling: daar bleek de frequentie juist veel hoger dan die van licht, (fotonenergie $\sim 10^3$ eV tot zelfs 10^9 eV). Door de uitvinding van de pn-diodelaser rond 1962, tezamen met het gebruik van glasvezelkabels, wordt momenteel (infrarood-)licht steeds belangrijker voor de communicatietechniek.

5.2 Vlakkegolf golfvergelijking

Verschuiven van grafieken

Uit de wiskunde is een heel eenvoudige **verschuifeigenschap** bekend: als we in een functie x vervangen door $x - s$, dan verschuift de figuur in zijn geheel een afstand s naar rechts. Zo is (fig. 5.1), met $s = 3$, $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ de grafiek van een parabool die de x-as raakt in $x = 3$. Natuurlijk verschuift een figuur door de vervanging $x + s$ een afstand s naar links. Bijvoorbeeld $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ is de parabool die de x-as raakt in $x = -3$. Feitelijk zijn $x - s$ en $x + s$ hetzelfde:

s kan positieve en negatieve waarden hebben, al naar gelang we naar rechts of links verschuiven.



Figuur 5.1 De parabool $y = \frac{1}{2}x^2$ wordt 3 naar rechts verplaatst door een eenvoudige verschuiving van x : $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Golfsnelheid en fase We willen een ‘figuur’ laten verschuiven met een constante snelheid v . Na t seconden is de figuur verschoven over de afstand $s = vt$. Dus een figuur met op $t = 0$ de grafiek $y = f(x)$ wordt een met snelheid v verschuivende grafiek als geldt $y = f(x - vt)$. Als de grafiek de vorm van een ‘golf’ heeft, dan is v de **golfsnelheid**. De vergelijking voor zo’n ‘golf’ met golfsnelheid v langs de x-as naar rechts met amplitude y is dan:

$$y = f(x - vt)$$

Deze formule geldt voor positieve of negatieve snelheden, dus voor ‘golven’ naar rechts of naar links, afhankelijk van het teken van v . Kenmerkend voor de beschrijving van de ‘golf’verplaatsing is de **fase** φ . Een ‘golf’ met snelheid v heeft amplitude y die van de fase φ afhangt:

$$\varphi = x - vt \quad y = f(\varphi)$$

Differentiaalvergelijking voor golven Is er een wiskundig kenmerk, behalve de verschuifeigenschap die zich uit in de fase, waaraan ‘golven’ zijn te herkennen? We zullen zien dat ‘golven’ voldoen aan een speciale differentiaalvergelijking, de golfvergelijking. We brengen in herinnering dat bijvoorbeeld de e-macht functie wordt gekenmerkt door de eigenschap gelijk te zijn aan de afgeleide functie; ze voldoet aan de differentiaalvergelijking (afgekort ‘DV’) $dy/dx = y$. Zoiets blijkt nu ook bij ‘golven’ te gelden. Daartoe bekijken we afgeleiden van de met snelheid

v bewegende ‘golffunctie’ y naar de plaats x , respectievelijk de tijd t . Omdat de functie zelf slechts afhangt van de fase $\varphi = x - vt$ geldt:

$$\frac{dy}{dx} = y'(\varphi) \quad \frac{dy}{dt} = -vy'(\varphi)$$

Door elimineren van de afgeleide functie zien we dat de met snelheid v bewegende ‘golf’ voldoet aan de DV:

$$\frac{dy}{dt} = -v \frac{dy}{dx} \quad \text{golf met snelheid } v$$

Omdat de afgeleide naar de positie in de grafiek gelijk is aan de rc, kunnen we de vergelijking als volgt interpreteren: de toename van de amplitude per seconde (dus dy/dt) is evenredig met de rc van de grafiek (dus dy/dx) met als evenredigheidsfactor de snelheid van de golf.

Golfvergelijking De ‘golf’ voldoet aan een differentiaalvergelijking waarin de snelheid voorkomt. Het teken van de snelheid speelt in die vergelijking een belangrijke rol. We zien om ons heen echter golven die beide kanten tegelijk op kunnen lopen. Denk aan een staande trilling van een snaar, waar verschillende golven voortdurend heen en weer lopen. Zulke golven moeten dus voldoen aan een andere DV, waarin het teken van de snelheid geen rol speelt. Gelukkig kan de gevonden DV heel eenvoudig richtings onafhankelijk worden gemaakt. Door nog eens te differentiëren verkrijgen we het *kwadraat* van de snelheid, dat altijd positief is. Een golf met snelheid v in de x-richting voldoet nu aan de **golfvergelijking**:

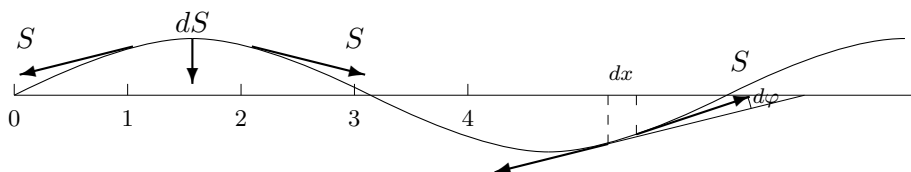
$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{golf met snelheid } v$$

Kenmerkend voor de golfvergelijking zijn de *tweede afgeleiden*, (tweede orde differentiaalvergelijking) en wel naar de tijd en naar de plaats. Ook de tweede afgeleiden hebben een betekenis in de grafiek van de golf. Omdat een tweede afgeleide de ‘toename van de afgeleide’ is, is de tweede afgeleide naar de tijd zoiets als de ‘versnelling’ van de functie; de tweede afgeleide naar de plaats is zoiets als de ‘bolling’ van de functie. De golfvergelijking wordt dan als volgt geïnterpreteerd: De ‘versnelling’ van de amplitude (dus d^2y/dt^2) is evenredig met de ‘bolling’ (dus het ‘golvende’ karakter) van de grafiek.

Conclusie Een golf die in de x-richting loopt met snelheid v heeft een ‘amplitude’ y die functie is van de ‘fase’ $x - vt$; de ‘amplitude’ voldoet aan de golfvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Spankrachtgolf in een snaar We illustreren bovenstaande door eerst de golfvergelijking van een ideaal strak gespannen *snaar* af te leiden. Later zullen we de golfvergelijking van het elektromagnetische veld afleiden. De reden is dat de golven die in een snaar lopen welbekend zijn. Bij de snaar is de x -as gewoon een as langs de snaar, en y de amplitude van de snaar dwars op de x -as. We veronderstellen gemakshalve dat de snaar horizontaal gespannen is, en dat de amplituden verticaal zijn. Overigens heeft ‘verticaal’ geen natuurkundige betekenis, omdat we de zwaartekracht zullen verwaarlozen. De enige krachten zijn de spankrachten. We nemen aan dat de snaar is gespannen met een *spankracht* S . Bij een buigbaar medium (als een snaar) blijven de spankrachten de verbuigingen volgen, zoals in figuur 5.2 te zien is. De richting van de spankracht wordt dan bepaald door de richtingscoëfficiënt van de grafiek van de snaar, dus door de afgeleide van de amplitude y naar x . We zullen laten zien, dat de bewegingsvergelijking voor een stukje snaar, daardoor, niets anders is dan de golfvergelijking .



Figuur 5.2 Een stukje snaar wordt naar de evenwichtsstand teruggetrokken door de spankrachten van de snaardelen aan beide zijden. Let op de bolle vorm van de snaar, waardoor de nettokracht naar binnen is.

Golfvergelijking van snaaruitwijking Bekijk (fig. 5.2 rechts) een stukje snaar tussen x, y en $x + dx, y + dy$. Aan de linkerkant trekt de snaar met de spankracht S onder een hoek φ , waarbij de hoek φ wordt bepaald door de afgeleide:

$$\tan(\varphi) = dy/dx$$

Van de rechterzijde komt een gelijke spankracht S . Zou de snaar niet gebogen zijn, dan zouden die krachten elkaar opheffen. Maar nu is de hoek rechts iets gegroeid, met $d\varphi$. De niet gecompenseerde spankracht, loodrecht op de snaar, heeft dan een grootte $S \sin(d\varphi)$. Bij een *holle* snaar is de netto kracht praktisch (verticaal) *omhoog* gericht, omdat de hoek toeneemt: $d\varphi > 0$. Omgekeerd is bij een *bolle* snaar de kracht omlaag gericht (zie fig. 5.2 links). Altijd wordt de verbuiging tegengewerkt. Als we aannemen dat de *amplituden* heel klein zijn, dan zijn ook de hoeken heel klein, zodat er geen verschil is tussen $\sin(d\varphi)$ en $d\varphi$, tussen $\tan \varphi$

en de hoek φ zelf:

$$\sin(d\varphi) = d\varphi = d \tan \varphi = d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

Het totale teruggedrijvende verticale krachtdeel $S \sin(d\varphi)$ op dit snaardeel wordt, alles tezamen genomen:

$$dF_y = S \frac{d^2y}{dx^2} dx$$

Volgens de bewegingswet van Newton is dat gelijk aan massa maal versnelling. De massa van dit deel dm is naar verhouding van de lengte $dm/m = dx/l$; de versnelling is de verticale d^2y/dt^2 . De bewegingsvergelijking voor het snaardeel wordt:

$$S \frac{d^2y}{dx^2} dx = m \frac{dx}{l} \frac{d^2y}{dt^2}$$

Als we ons realiseren dat de totale massa m wordt verdeeld over het volume van de snaar, dus over de lengte l en de doorsnede A , via de massadichtheid ρ , dan is $m/l = \rho A$. Dat levert de *golfvergelijking* voor de snaar:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{S}{\rho A} \frac{d^2y}{dx^2}$$

Door vergelijking met de golfvergelijking zien we dat de *golfsnelheid* v van een golf in de snaar wordt bepaald door de *spankracht*:

$$v^2 = \frac{S/A}{\rho}$$

Hoe meer spankracht, hoe sneller de golf; daarentegen hoe zwaarder de snaar, hoe langzamer de golf. Denk aan pianosnaren, waarbij de lage tonen extra zwaar zijn uitgevoerd. Let op de eenheden: $(\text{m/s})^2 = \text{N}/(\text{kg/m})$, omdat volgens Newton $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$.

Conclusie De bewegingsvergelijking van een snaar (massadichtheid ρ , doorsnedeoppervlak A) tengevolge van een spanning S wordt een golfvergelijking voor de 'transversale' uitwijking y . De golfsnelheid v daarvan is:

$$v^2 = (S/A)/\rho$$

Opg 5.2.1 * Kenmerkend voor een amplitudegolf is het evenredige verband tussen:

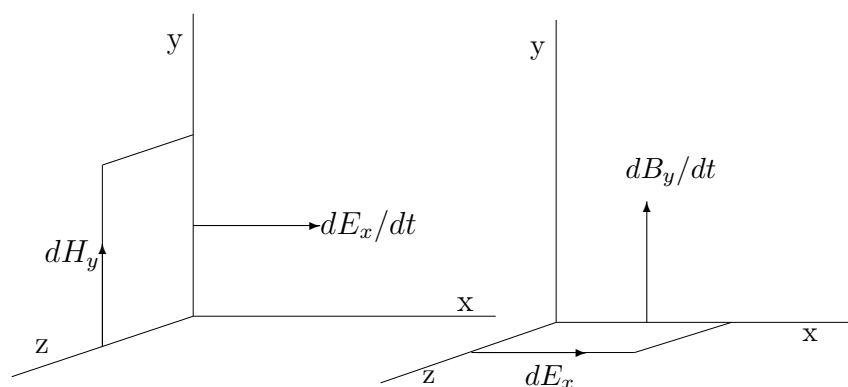
- A de tijdafgeleide en de plaatsafgeleide van de amplitude
- B de toename van de tijdafgeleide en de plaatsafgeleide van de amplitude
- C de tijdafgeleide en de toename van de plaatsafgeleide van de amplitude
- D de toename van de tijdafgeleide en de toename van de plaatsafgeleide van de amplitude

Opg 5.2.2 ** Een vioolsnaar wordt zodanig gespannen dat de grondtoon van de snaar de toon A is. De snaar is 50 cm lang en weegt 2 gram; 440 Hz is de frequentie van de A.

- a Bereken de golflengte van de golf in de snaar [Antw. $\lambda = 1$ m]
- b Bereken de snelheid van de golf in de snaar [Antw. $v = 440$ m/s]
- c Bereken de spankracht voor de snaar [Antw. $S = 774$ N]

5.3 Differentiaalvergelijkingen vlakke em-golf

Elektrisch veld induceert magnetisch veld We zullen in deze paragraaf laten zien dat de vier verschillende wetten die we hebben leren kennen met betrekking tot elektrische en magnetische velden zodanig met elkaar zijn verweven dat ze leiden tot golfvergelijkingen voor het elektromagnetische veld. We zullen dit doen aan de hand van een ‘eenvoudige’ elektromagnetische **vlakke-golf**—een één dimensionale golf die loopt in één richting, hier de z -richting, door een *homogeen*, in alle richtingen gelijk, medium (ook vacuüm= ‘niets’ is zo’n ‘medium’).



Figuur 5.3 Links veroorzaakt een toenemend elektrisch veld, in de x -richting van de plaat bij $z = 0$, een magnetisch veld in de y -richting (volgens ‘Maxwell’, toegepast op yz -vierkant). Rechts is aangegeven hoe dat toenemende magnetisch veld in de y -richting, op zijn beurt, een veld in de x -richting opwekt, die in de plaat tegenwerkt (volgens ‘Faraday’, toegepast op xz -vierkant).

Om de golf op te wekken nemen we een op zijn kant staande geleidende plaat (‘antenne’) bij $z = 0$ (zie figuur 5.3). We starten daarin met een elektrisch veld in de x -richting—bijvoorbeeld tgv een wisselspanning—zodat een elektrische flux *ontstaat* in de x -richting, dus dóór kringen in het yz -vlak. Volgens de inductiewet van Maxwell leidt dat tot een magnetische spanning rond die kring. Bijvoorbeeld: doordat er een magnetische veldcomponent H_y in de y -richting ontstaat in het vlak $z = dz$ eventjes naar rechts. Bedenk dat er in de plaat bij $z = 0$ nog geen H , dus magnetische spanning, was, zodat de spanning buiten de plaat een magnetisch veld maakt.

Conclusie *Een verandering in de tijd van het elektrische veld in het xy -vlak doet even verder een magnetisch veld ontstaan; een elektrisch veld in de x -richting geeft een magnetische veld in de y -richting en ‘verplaatst’ in de z -richting.*

Magnetisch veld induceert elektrisch veld Op haar beurt kunnen we het magnetische veld in de y -richting bekijken. We zagen dat er een magnetisch veld was opgewekt in de $-y$ -richting voor $z > 0$. Dat veroorzaakt een *toenemende* magnetische flux door een kring in het xz -vlak, als getekend in figuur 5.3 rechts. Volgens de inductiewet van Faraday induceert een *afnemende* magnetische flux (in de $-y$ -richting) een passende (kurketrekkerregel) elektrische spanning in een xz -kring. Dat betekent een linksom draaiend elektrisch veld (zie figuur). In de plaat werkt die elektrische veldcomponent in de x -richting tegen (*wet van Lenz*), zodat het oorspronkelijke elektrische veld afneemt. Een stapje in de z -richting, eventjes naar rechts, is de elektrische component opgekomen: het veld verplaatst zich in de z -richting.

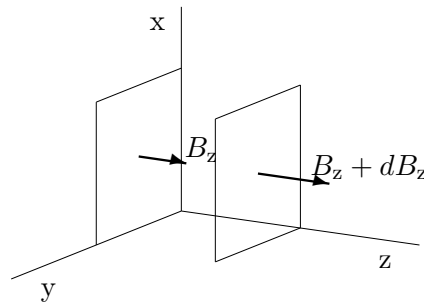
Conclusie *De verandering in de tijd van het magnetische veld doet even verder een elektrisch veld ontstaan. Opnieuw zijn de richting van het elektrische veld, het magnetische veld en de verplaatsingsrichting loodrecht op elkaar.*

De *inductiewetten* koppelen het elektrische en magnetische veld tot een elektromagnetisch veld, of **em-veld**, met een elektromagnetische golf, of **em-golf**, die **transversaal** is. We zullen hieronder laten zien dat deze velden in een *vaste amplitudeverhouding* staan en beide voldoen aan de *golfvergelijking* met een *golfsnelheid* gelijk aan de *lichtsnelheid*

Fluxvelden bij vlakke em-golf

Stel een vlakke elektromagnetische golf voor die, bij afspraak, in de z -richting loopt (naar rechts). Het ‘vlakke’ houdt in dat de velden overal in een vlak hetzelfde zijn. In principe kunnen de velden, dus het elektrische veld D en het magnetische veld B , alleen nog maar afhangen van de z -positie (naar links of rechts). Natuurlijk geldt hetzelfde voor de veldsterkten E en H , vanwege de homogeniteit van de ruimte, zodat de permittiviteit en diëlektrische constante plaatsafhankelijk zijn. Bekijk in figuur 5.4

de veldcomponenten die een rol spelen bij de fluxen door de vlakjes van de **differentiaalkubus** $dx dy dz$ met de ‘oorsprong’ bij het punt (x, y, z) . De flux door een vlakje wordt bepaald door de veldcomponent in de



Figuur 5.4 De verschillende magnetische componenten bij een vlakke golf in de z -richting die een rol kunnen spelen bij de fluxen door de differentiaalvlakjes. Bij vlakjes die niet door de oorsprong (x, y, z) gaan is de flux ‘toegenomen’.

5.3. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VLAKE EM-GOLF231

richting van het vlak. Neem eerst de drie vlakjes die door de oorsprong gaan. Door het $dx dy$ -vlakje door de oorsprong, in de z -richting, gaan de velden:

$$D_z \text{ en } B_z$$

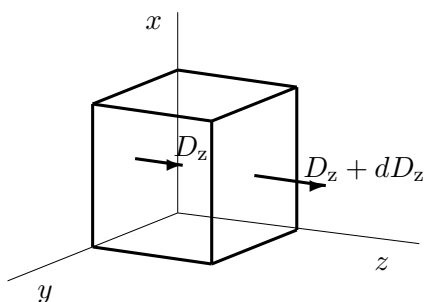
Evenzo gaan in de x -richting de velden D_x en B_x , en in de y -richting de velden D_y en B_y .

Ga nu van het $dx dy$ -vlakje door de oorsprong, op breedte z , naar het $dx dy$ -vlakje op de breedte $z + dz$. Omdat de breedte met dz is 'toegenomen' zullen ook de velden daar toenemen. Door het xy -vlakje daar gaan de velden

$$D_z + dD_z \text{ en } B_z + dB_z$$

Echter, als we naar het $dy dz$ -vlakje gaan op afstand dx zullen de velden niet veranderen, omdat de breedte niet is veranderd. Dus zijn de velden door het $dy dz$ -vlakje op de afstand dx nog steeds D_x en B_x ; de velden in de y -richting nog steeds D_y en B_y .

De wetten van Gauss voor de vlakke golf



Figuur 5.5 Door het linkervlak en het rechtervlak van de differentiaalkubus komen net iets verschillende fluxen naar binnen en naar buiten. De netto uitflux is het gevolg van de lading in de kubus.

Volgens de wet van Gauss is de flux die een volume uitgaat gelijk aan de lading in het volume. Pas de wet toe op het volume van de differentiaalkubus, met zijden dx , dy en dz op positie (x, y, z) . In het voorgaande zagen we, dat bij een vlakke golf de velden in andere dan de golfrichting niet veranderen. Dus alleen de fluxen door de vlakjes in de z -richting bepalen de totale flux. De kubus heeft twee differentiaalvlakjes in de z -richting met oppervlak A_z (zie fig. 5.5):

$$A_z = dx dy$$

Het differentiaalkubusje heeft een volume dV :

$$dV = A_z dz$$

Door het linkervlak op de positie z gaat het veld naar binnen met de fluxdichtheden D_z en B_z . Door het rechtervlak op de positie $z + dz$ gaat het veld naar buiten met de fluxdichtheden $D_z + dD_z$ en $B_z + dB_z$. De flux zelf is bij deze kleine oppervlakken het produkt van fluxdichtheid

en oppervlak. Eerst het elektrische veld. Netto is in de z-richting de flux naar buiten *toegenomen*:

$$\begin{aligned} d\Psi_{\text{uit}} &= -D_z A_z + (D_z + dD_z) A_z \\ &= dD_z A_z \end{aligned}$$

Met $dV = A_z dz$, wordt de elektrische uitflux per volumeenheid, ook wel de **divergentie** van D genoemd:

$$\frac{d\Psi_{\text{uit}}}{dV} = \frac{dD_z}{dz}$$

Volgens Gauss is de flux uit het volume gelijk aan de lading erin. Dus is de elektrische uitflux per volume gelijk aan de elektrische lading per volume: ρ . We concluderen tot de elektrische *wet van Gauss in DVvorm* (= D(iifferentiaal)V(ergelijking)vorm) voor een vlakke golf in de z-richting:

$$\boxed{\frac{dD_z}{dz} = \rho}$$

Voor magnetische velden geldt dezelfde redenering. Het enige verschil is, dat er geen magnetische netto lading is. De magnetische *wet van Gauss in DVvorm* voor de vlakke golf in de z-richting wordt:

$$\boxed{\frac{dB_z}{dz} = 0 \quad \text{vlakke z-golf}}$$

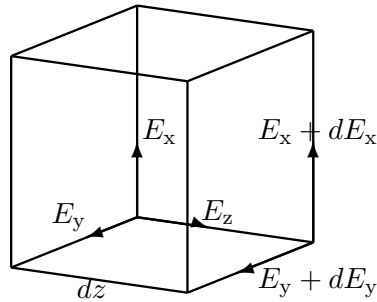
Conclusie *De toepassing van de wetten van Gauss op een vlakke golf in de z-richting leidt, bij afwezigheid van lading ρ , tot longitudinale (loodrecht op het golfvlak) veldcomponenten D_z en B_z van het elektrische en magnetische veld, die constant zijn in de ruimte van de golfrichting.*

Veldsterkten bij vlakke em-golf Bekijk nu de veldcomponenten die een rol spelen bij de spanningen rond de vlakjes van de **differentiaal-kubus** $dx dy dz$ met de 'oorsprong' bij het punt (x, y, z) . De spanning langs een ribbe wordt bepaald door de veldsterktecomponent langs de ribbe. Neem eerst de vier ribben in het linkervlak, het $dx dy$ -vlakje door de oorsprong (fig. 5.6). Omdat alle ribben in hetzelfde z-vlak liggen, hangen de velden niet van de positie, dus de ribbe, af. Langs de ribben in de x-richting, staan dus:

$$E_x \text{ en } H_x$$

en langs de y-ribben de velden E_y en H_y .

5.3. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VLAKE EM-GOLF 233

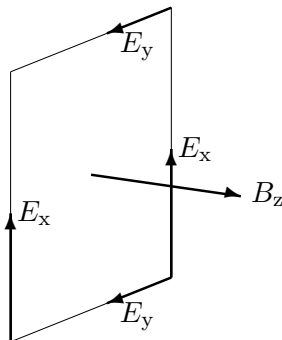


Figuur 5.6 De verschillende elektrische componenten bij een vlakke golf in de z-richting die een rol kunnen spelen bij de spanningen rond de differentiaalvlakjes. Alleen in het z-vlakje dat 'naar rechts' is gegaan, dus dat niet door (x,y,z) gaat, zijn de veldsterkten 'toegenomen'.

Gemiddeld liggen deze ribben op halve breedte. Maar, welke waarde de velden daar ook hebben, die waarde is bij alle vier ribben dezelfde omdat de velden op dezelfde breedte staan. Dus langs alle z-ribben staan dezelfde velden

$$E_z \text{ en } H_z$$

De inductiewetten voor het z-vlak



Figuur 5.7 De verschillende elektrische en magnetische componenten van een vlakke golf in de z-richting die een rol spelen bij de toepassing van de inductiewet van Faraday voor flux in de z-richting.

en linksom gaande, zien we achtereenvolgens de veldsterkte componenten (langs de zijden): E_x , E_y (het veld in het vlak is niet positieafhankelijk),

Ga nu van het $dx dy$ -vlakje door de oorsprong, op breedte z , naar rechts naar het $dx dy$ -vlakje op de breedte $z + dz$. Omdat de breedte met dz is 'toegenomen' zullen ook de velden daar toenemen. Maar *binnen* het vlak veranderen de velden niet. Dus staan langs de x-ribben de velden

$$E_x + dE_x \text{ en } H_x + dH_x$$

Evenzo staan langs de y-ribben op de breedte $z + dz$ de velden $E_y + dE_y$ en $H_y + dH_y$. Tenslotte hebben we ribben in de z-richting, die juist tussen z en $z + dz$ lopen.

We passen de inductiewet van Faraday toe op een differentiaalvlakje in de z-richting: het linkervlakje van de differentiaalkubus (fig. 5.7). Door dit xy-vlakje gaat een magnetische flux ter grootte

$$\Phi_{\text{door}} = B_z A_z$$

Voor de fluxtoename per m^2 per seconde differentiëren we:

$$\frac{d\Phi_{\text{door}}/A_z}{dt} = \frac{dB_z}{dt}$$

Een afname van de magnetische flux veroorzaakt een ronddraaiend elektrisch veld. Startend in (x,y,z) ,

E_x en E_y . De elektrische spanning langs de x-ribbe is voor deze kleine ribben gelijk aan E_x maal dx . Totaal is de elektrische spanning rond de kring V_{rond} , rekening houdend met de richting het veld tov de kring, nul:

$$\begin{aligned} V_{\text{rond}} &= E_x dx + E_y dy - E_x dx - E_y dy \\ V_{\text{rond}} &= 0 \end{aligned}$$

Volgens Faraday is de elektrische spanning rond het vlak gelijk aan de afname van de magnetische flux door het vlak per seconde. Daaruit volgt de **inductiewet van Faraday** voor fluxen in de z-richting:

$$0 = -\frac{dB_z}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}$$

Dus: het veld in de golfrichting B_z is constant, dat is, niet veranderend of *statisch*.

Volgens de inductiewet van Maxwell is $U_{\text{m rond}} = I_{\text{door}} + d\Psi_{\text{door}}/dt$, analoog aan de inductiewet van Faraday. We kunnen eenvoudig elektrisch en magnetisch verwisselen, mits we letten op de stroom en de toename per seconde. Dan wordt de magnetische spanning rond de kring

$$U_{\text{m rond}} = 0,$$

en de elektrische flux per m^2 per seconde wordt, analoog, gelijk aan

$$\frac{d\Psi_{\text{door}}/A_z}{dt} = \frac{dD_z}{dt}$$

Verder is stroom natuurlijk ook een flux (van lading). Dus is de stroom door het oppervlakje, per m^2 en per seconde, bepaald door de stroomdichtheid J_z :

$$I_{\text{door}}/Az = J_z.$$

De **inductiewet van Maxwell** voor fluxen in de z-richting wordt daarmee:

$$0 = J_z + \frac{dD_z}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}$$

Merk op, dat $J_z = 0$ leidt tot een constante D_z , een statisch elektrisch veld in de golfrichting.

Conclusie *De toepassing van de inductiewet in het z-vlak op de vlakke golf in de z-richting leidt, bij afwezigheid van stroom J_z in de golfrichting, tot longitudinale veldcomponenten D_z en B_z , in de richting van de golf, die constant zijn in de tijd. In de golfrichting is het veld dus homogeen en statisch, zodat de longitudinale veldcomponenten geen rol spelen bij het golfkarakter. Alleen de veldcomponenten loodrecht op de golfrichting kunnen golven: een elektromagnetische golf is transversaal.*

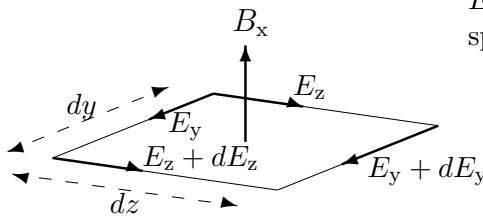
De inductiewetten voor het yz-vlak Het is duidelijk geworden dat het golfgedrag van de vlakke em-golven in de z-richting wordt veroorzaakt door de transversale veldcomponenten, in de x- en y-richting. We zullen vervolgens aantonen dat de inductiewetten in het yz-vlak de loodrecht op elkaar staande componenten E_y en B_x , respectievelijk H_y en D_x van het elektrische en magnetische veld koppelen.

Neem het differentiaalvlakje in de x-richting dat door de oorsprong gaat (zie fig. 5.8); het oppervlakje is $A_x = dydz$. Voor de fluxtoename per m^2 per seconde geldt dan (net zo als voor het xy-vlak):

$$\frac{d\Phi_{\text{door}}/A_x}{dt} = \frac{dB_x}{dt}$$

Bepaal nu de spanning rond het dydz-vlakje, startend in (x,y,z) en het vlakje linksom gaande. We krijgen achtereenvolgens de veldsterkten

(in de richting van de zijde): E_y , E_z , $E_y + dE_y$ en E_z . Dat geeft een spanning rond het dydz-vlak:



$$\begin{aligned} V_{\text{rond}} &= E_y dy + E_z dz - \\ &\quad (E_y + dE_y) dy - E_z dz \\ &= -dE_y dy \end{aligned}$$

Figuur 5.8 De verschillende elektrische en magnetische componenten van een vlakke golf in de z-richting die een rol spelen bij de toepassing van de inductiewet op de flux in de x-richting.

De spanning rond het dydzx-vlakje per m^2 wordt, met $A_x = dydz$,

$$V_{\text{rond}}/A_x = -\frac{dE_y}{dz}$$

Volgens Faraday is deze spanning bepaald door de afname van de magnetische flux. De *inductiewet van Faraday* voor fluxen in de x-richting wordt daarmee:

$$\boxed{-\frac{dE_y}{dz} = -\frac{dB_x}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}}$$

Het gevolg is, dat een tijds-afname van het magnetische veld in de x-richting een ruimte-afname (in de golfrichting) induceert van het elektrische veld in de y-richting: dat is het wezen van de golfvoortplanting. Op vergelijkbare wijze verkrijgen we de *inductiewet van Maxwell* voor fluxen in de x-richting:

$$\boxed{-\frac{dH_y}{dz} = J_x + \frac{dD_x}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}} \quad (5.1)$$

die een koppeling legt tussen het elektrische veld in de x-richting en het magnetische veld in de y-richting. Let op het afwijkende + teken bij de

tijdafgeleide term in de inductiewet van Maxwell tov het $-$ teken bij de inductiewet van Faraday.

Conclusie *De toepassing van de inductiewetten in het yz-vlak op de vlakke golf in de z-richting leidt tot een koppeling van de transversale elektrische veldcomponenten met de loodrecht erop staande magnetische componenten: E_y koppelt met B_x en D_x koppelt met $-H_y$; de koppeling is in ruimte en tijd.*

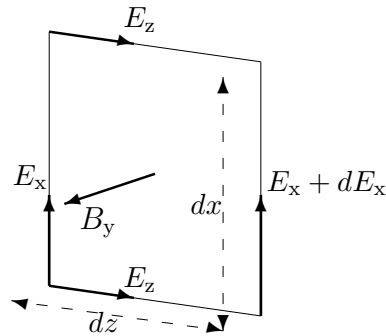
De inductiewetten voor het xz-vlak Neem tot slot 't differentiaalvlakje in de y-richting dat door de oorsprong gaat (zie fig. 5.9); het oppervlakje is $A_y = dzdx$. Voor de fluxtoename per m^2 per seconde geldt, zoals eerder:

$$\frac{d\Phi_{\text{door}/A_y}}{dt} = \frac{dB_y}{dt}$$

Voor de spanning rond het dx dz-vlakje starten we in (x, y, z) en krijgen linksom gaande achtereenvolgens de ribben: x(-richting) omhoog, z naar

rechts, x naar beneden en z naar links. De veldsterkten (in de richting van de ribbe) zijn daarbij: E_z , $E_x + dE_x$, E_z en E_x . Dat geeft een spanning rond het dx dz-vlak:

$$\begin{aligned} V_{\text{rond}} &= E_z dz + (E_x + dE_x) dx \\ &\quad - E_z dz - E_x dx \\ &= +dE_x dx \end{aligned}$$



De spanning rond het dx dz-vlakje per m^2 wordt, met $A_y = dzdx$,

$$V_{\text{rond}}/A_y = +\frac{dE_x}{dz}$$

Figuur 5.9 De verschillende elektrische en magnetische componenten van een vlakke golf in de z-richting die een rol spelen bij de toepassing van de inductiewet op de flux in de y-richting.

(let op het teken!) De inductiewet van Faraday voor fluxen in de y-richting wordt daarmee:

$$\boxed{+\frac{dE_x}{dz} = -\frac{dB_y}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}} \quad (5.2)$$

Evenzo de inductiewet van Maxwell voor fluxen in de y-richting:

$$\boxed{+\frac{dH_x}{dz} = J_y + \frac{dD_y}{dt} \quad \text{vlakke z-golf}}$$

5.3. DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN VLAKKE EM-GOLF237

Opnieuw zien we een koppeling tussen de *loodrecht op elkaar* staande componenten van het elektrische veld en het magnetische veld. Doordat er twee koppelingen zijn worden die velden onlosmakelijk met elkaar verbonden. Let op het afwijkende $-$ teken bij Faraday tov een $+$ teken bij Maxwell. Als gevolg daarvan wordt een elektrische veldcomponent gekoppeld met de linksom liggende magnetische veldcomponent.

Conclusie *De toepassing van de inductiewetten in het xz -vlak op de vlakke golf in de z -richting leidt tot een koppeling van de transversale elektrische veldcomponenten met de loodrecht erop staande magnetische componenten: E_x koppelt met $-B_y$, D_y koppelt met H_x ; de koppeling is in ruimte en tijd.*

Opg 5.3.1 * Een vlakke em-golf loopt in de z -richting met snelheid v . Dan geldt de volgende koppeling voor de golfcomponenten:

- A E_x met E_y
- B B_y met $-D_z$
- C H_x met H_z
- D B_y met $-E_x$

5.4 Vergelijkingen em-veld

5.4.1 Golfvergelijking vlakke em-golf

Inleiding We hebben gezien in paragraaf 5.3, pag. 237, dat de inductiewetten in differentiaalvorm ons in staat stellen te begrijpen dat loodrecht op elkaar staande componenten van het elektrische en magnetische veld gekoppeld zijn. Zo een paar, bestaande uit een elektrisch veld en een, loodrecht erop staand, gekoppeld magnetisch veld noemen we een gepolariseerd **elektromagnetisch** veld, kortweg een ‘gepolariseerd em-veld’. De **polarisatierichting** van dat veld is de richting van het elektrische veld. We zagen verder dat het gepolariseerde em-veld zich voortplant in de richting loodrecht op beide velden: het em-veld is *transversaal*. We zullen nu laten zien dat, als gevolg van de koppeling, die velden voldoen aan de golfvergelijking. Bovendien, dat de sterkte van het magnetische veld loodrecht op het elektrische veld, *evenredig* is met de sterkte van het elektrische veld. Voor de eenvoud zullen we ons beperken.

Beperkingen Bij het vinden van het verband tussen de elektrische en magnetische componenten van een gepolariseerde em-golf beperken we ons:

- De gepolariseerde golf is een vlakke golf in de z-richting;
- Er zijn geen elektrische ladingen en stromen in de ruimte die we bekijken, er zijn geen bronnen:

$$\rho = 0 \quad \underline{J} = 0;$$

- De veldsterkten zijn evenredig met de fluxdichtheden; de **materievergelijkingen** zijn:

$$D = \epsilon E \quad B = \mu H;$$

De beperking tot de standaard assen x, y en z is eigenlijk geen beperking, omdat asrichtingen willekeurig gekozen kunnen worden.

De x-gepolariseerde vlakke em-golf Bij deze golf zijn de betrokken velden E_x , D_x , H_y en B_y . Deze componenten voldoen aan de vergelijkingen 5.1 en 5.2:

$$-\frac{dH_y}{dz} = J_x + \frac{dD_x}{dt} \quad + \frac{dE_x}{dz} = -\frac{dB_y}{dt}$$

Allereerst hebben we geen ‘bronnen’ en elimineren we de ‘fluxdichtheden’ D en B met de evenredige veldsterkten E en H :

$$-\frac{dH_y}{dz} = +\epsilon \frac{dE_x}{dt} \quad + \frac{dE_x}{dz} = -\mu \frac{dH_y}{dt}$$

Bij de eerste DV is dH_y/dz in E_x uitgedrukt. Omdat we niet dH_y zelf kunnen uitdrukken in E_x kunnen we slechts dH_y/dz substituëren in de eerste DV. Daartoe differentiëren we de tweede DV naar z :

$$+\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\mu \frac{d(dH_y/dz)}{dt}$$

Substitueer nu de eerste DV in de laatste vergelijking:

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \mu\epsilon \frac{d(dE_x/dt)}{dt}$$

en we verkrijgen de *golfvergelijking* voor de transversale *elektrische component* van de gepolarizeerde em-golf in de z -richting:

$$\boxed{\frac{d^2 E_x}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{d^2 E_x}{dz^2}}$$

Precies eenzelfde golfvergelijking geldt, zoals je kan narekenen, voor *alle* transversale veldcomponenten.

Opg 5.4.1 *** De golfvergelijking voor het E -veld van een in de y -richting gepolarizeerde em-golf (E -veld in y -richting, H -veld in z -richting, v in de x -richting) is:

A $\frac{d^2 E_y}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{d^2 E_y}{dx^2}$

B $\frac{d^2 E_y}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{d^2 E_y}{dy^2}$

C $\frac{d^2 E_y}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{d^2 E_y}{dz^2}$

D geen van de genoemde vergelijkingen

Golfsnelheid en brekingsindex De *golfsnelheid* v van de gepolarizeerde vlakke em-golf volgt uit de constanten in de golfvergelijking. Maxwell berekende de golfsnelheid:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} = \frac{1}{\epsilon_r \mu_r} c^2 \quad \text{met} \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{\mu_0} = 9 \cdot 10^9 10^7$$

waarbij gebruik is gemaakt van de relatieve permittiviteit ϵ_r en de relatieve magnetische permeabiliteit μ_r :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

Maxwell ontdekte dat in vacuüm de golfsnelheid gelijk is aan de *lichtsnelheid* c ; een *lichtstraal* gaat dus langs de ‘normaal’ van de vlakke em-golf in de voortplantingsrichting. In materie is de lichtsnelheid iets kleiner (omdat de relatieve permittiviteit ϵ_r en relatieve permeabiliteit μ_r , groter dan 1 zijn).

Het produkt van de materiaalconstanten speelt een bijzondere rol in de voortplanting van vlakke em-golven. Het blijkt het kwadraat te zijn van de, uit de optiek bekende, **brekingsindex** n :

$$n^2 = \epsilon_r \mu_r$$

Uit deze vergelijking blijkt duidelijk het karakter van de ‘brekings’index: ze heeft te maken met de golfsnelheid in het ‘medium’. De brekingsindex uit zich in het bijzonder als de golf van het ene medium naar het andere gaat. De *verschillen* in lichtsnelheid tussen de media leidt op het contactvlak tot *richtingsverandering* van de ‘stralen’ (zie bijvoorbeeld 5.7).

Conclusie *De golfsnelheid v in materie is evenredig met de golfsnelheid in vacuüm c (lichtsnelheid’); de evenredigheidsconstante is het omgekeerde van de brekingsindex n :*

$$v = c/n$$

Koppeling tussen E en H velden Welk verband bestaat er tussen E_x en H_y ? Nu we weten dat de transversale velden van de vlakke golf aan de golfvergelijking voldoen, kunnen we bepalen h oe de loodrecht op elkaar staande elektrische en magnetische component aan elkaar zijn gekoppeld.

De oplossingen van de twee DV voor E_x en H_y ,

$$+\frac{dE_x}{dz} = -\mu \frac{dH_y}{dt} \quad -\frac{dH_y}{dz} = +\epsilon \frac{dE_x}{dt},$$

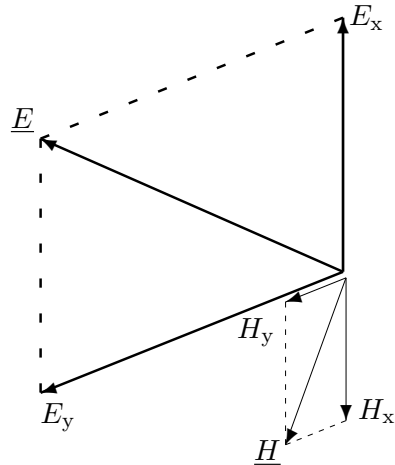
zijn golven. De oplossing van een golfvergelijking is een functie f —dat kan zelfs een willekeurige functie zijn—van de fase $z - vt$. Vanwege de kettingregel leidt een afgeleide tot een extra factor: $df/dz = 1 \cdot f'$ en $df/dt = -v \cdot f'$. Toegepast op de twee DV’s verkrijgen we de vergelijkingen:

$$E'_x = \mu v H'_y \quad - H'_y = -\epsilon v E'_x$$

Deze vergelijkingen zijn afhankelijk: als we de laatste met $-\mu v$ vermenigvuldigen, dan krijgen we de eerste. Immers: $\epsilon \mu v^2 = 1$. De vergelijkingen zijn gelijkwaardig. Na integreren blijken de velden zelf evenredig te zijn—op constanten na, die echter statische velden zijn, die *n et* bij de golf horen, zoals we reeds eerder constateerden. Door combinatie van μ en H resp. ϵ en E kunnen het rechterlid uitdrukken in B resp. D .

Conclusie *Bij de em-golf met snelheid v in de z -richting, die gepolariseerd is in de x -richting, is het elektrische veld E_x gekoppeld met het magnetische veld H_y door:*

$$E_x = v B_y \quad \text{of} \quad H_y = v D_x \tag{5.3}$$



Figuur 5.10 De elektrische (\underline{E}) en magnetische velden (\underline{H}) van een gepolariseerde vlakke golf in de z-richting zijn aan elkaar gekoppeld: loodrecht op elkaar en bepaalde grootte verhouding. Dat geldt evenzeer voor de componenten: E_x met H_y , en, $-H_x$ met E_y .

De koppeling tussen de velden van een em-golf in de z-richting, die gepolariseerd is in de y-richting, wordt analoog:

$$\boxed{E_y = -vB_x \text{ of } H_x = -vD_y} \quad (5.4)$$

Let op het extra minteken vergeleken met vergelijking 5.3! Dat minteken zit in verschillende wetten. Het is juist dit extra minteken dat er zorg voor draagt dat niet alleen de x en y componenten gekoppeld zijn, maar dat ook het samengestelde transversale elektrische veld \underline{E} gekoppeld is aan het loodrecht erop staande transversale magnetisch veld \underline{H} . Van \underline{E} naar \underline{H} draaiend geeft de *kurketrekkerregel* de voortplantingsrichting.

Opg 5.4.2 *** Een vlakke gepolariseerde em-golf loopt in de x-richting met snelheid v . Dan geldt de volgende koppeling voor de transversale componenten van de golf:

- A $H_y = E_z$
- B $B_y = -D_z$
- C $H_z = vD_y$
- D $H_y = -vE_z$

Amplitudeverhouding en ‘vacuümimpedantie’ De amplitudeverhouding van de elektrische en magnetische veldsterkte is $v\mu$, met als eenheid $(\text{V/m})/(\text{A/m})=\text{Ohm}$. De amplitudeverhouding is de ‘weerstand’ of ‘impedantie’:

$$v\mu = \mu/\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\mu/\epsilon} = 1/v\epsilon$$

De ‘**amplitudeverhouding**’ in **vacuüm** is de ‘**vacuümimpedantie**’:

$$\boxed{c\mu_0 = 376,5 \Omega = \frac{1}{c\epsilon_0} = \frac{1}{2,656 \text{ mS}}}$$

Deze impedantie blijkt werkelijk op te treden bij golfpijpen— holle metalen geleiders waarin em-golven worden opgewekt. Alleen kan er een correctie voor het medium nodig zijn gelijk aan de factor: $\sqrt{\mu_r/\epsilon_r} = \mu_r/n$.

Voorbeeld em-veld Bepaal de amplitude van de magnetische component van een em-golf in lucht met een elektrische amplitude van 1 mV/m. Als de golflengte $1\ \mu\text{m}$ is, bepaal dan ook het faseverschil van de magnetische golf na $1\ \mu\text{s}$.

We laten de richtingindex weg; verder is lucht elektrisch gezien praktisch gelijk aan vacuüm. Uit $E = 1 \cdot 10^{-3}\ \text{V/m}$ en de koppeling $H = cD$ volgt: $H = 3 \cdot 10^8 \cdot \epsilon \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 26,6 \cdot 10^{-7} = 2,7\ \text{micro A/m}$. Als de golflengte $\lambda = 1 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$, dan is de periodetijd $T = 1/f = 1/v\lambda = 1/3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 3,3 \cdot 10^{-3} = 3,3\ \text{ms}$. Het faseverschil over een volle periodetijd is 2π . Over $t = 1\ \text{ms}$, dus een $1/3,3$ deel van de periodetijd is het faseverschil $2\pi/3,3 = 1,9$. De amplitude kan hieruit nog niet worden bepaald, omdat daarvoor de absolute fase nodig is.

Opg 5.4.3 ** Een em-veld heeft in een medium met $\epsilon_r = 1,1$ en $\mu_r = 1,9$ een topwaarde van het elektrische veld van 1 V/m. Bereken de topwaarde van het magnetische veld. [Antw. $\hat{H} = 2,02\ \text{mA/m}$]

Opg 5.4.4 Een gepolariseerde em-golf heeft een golflengte van 3,0 cm in lucht. We nemen aan dat de golf cosinusvormig tijdsafhankelijk is, en dat de maximale magnetische veldsterkte 1,0 mA/m is op het punt $x = 0, t = 0$ (fase nul).

a * Bereken de maximale magnetische veldsterkte op een afstand van 1,5 cm. [Antw. $\hat{H} = 1,0\ \text{mA/m}$]

b ** Bereken de maximale elektrische veldsterkte van de em-golf in lucht: [Antw. $\hat{E} = 0,38\ \text{V/m}$]

c ** Gaat dezelfde golf door water ($\epsilon_r = 80$), dan wordt de snelheid: [Antw. $v = 3,4 \cdot 10^7\ \text{m/s}$]

d *** Bereken de magnetische veldsterkte in $x = 1,5\ \text{cm}$ op $t = 0$. [Antw. $H = -1,0\ \text{mA/m}$]

e *** Bereken de magnetische veldsterkte op $x = 0\ \text{cm}$ en $t = 30\ \text{ps}$ [Antw. $H = -0,31\ \text{mA/m}$]

5.4.2 De Maxwell vergelijkingen

Tot nu hebben we de wetten van Gauss en de inductiewetten bekeken voor een vlakke em-golf. Daardoor konden we de analyse beperken tot enkele van de verschillende differentiaalvlakjes. Voor de volledigheid laten we die beperking nu vallen, en bezien de **Maxwell vergelijkingen** voor willekeurige elektro-magnetische velden.

Daartoe moeten we alle zes *differentiaalvlakjes* in rekening nemen, en verkrijgen we voor elke richting een vergelijkbare bijdrage. Zo wordt de netto elektrische flux uit het volume, per volume-eenheid:

$$\frac{d\Psi_{\text{uit}}}{dV} = \left(\frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} \right)$$

De **elektrische en magnetische wet van Gauss in DVvorm** worden zo:

$$\begin{aligned} \rho &= \left(\frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} \right) \\ 0 &= \left(\frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} \right) \end{aligned}$$

De inductiewetten zijn ingewikkelder, omdat we in drie richtingen fluxen kunnen hebben, zodat de ene inductiewet in drie DV uiteen valt. Volgens Maxwell wordt dan de **inductiewet van Faraday in DVvorm**:

$$\begin{aligned} -\frac{dB_x}{dt} &= -\frac{dE_y}{dz} + \frac{dE_z}{dy} \\ -\frac{dB_y}{dt} &= -\frac{dE_z}{dx} + \frac{dE_x}{dz} \\ -\frac{dB_z}{dt} &= -\frac{dE_x}{dy} + \frac{dE_y}{dx} \end{aligned}$$

De **inductiewet van Maxwell in DVvorm**:

$$\begin{aligned} J_x + \frac{dD_x}{dt} &= -\frac{dH_y}{dz} + \frac{dH_z}{dy} \\ J_y + \frac{dD_y}{dt} &= -\frac{dH_z}{dx} + \frac{dH_x}{dz} \\ J_z + \frac{dD_z}{dt} &= -\frac{dH_x}{dy} + \frac{dH_y}{dx} \end{aligned}$$

De voorgaande vergelijkingen voor de vlakke golf in de z-richting kunnen we daaruit terugvinden door te bedenken dat daarbij geen x of y afhankelijkheid bestaat; dus alle afgeleiden naar x of y zijn 0. Verder kunnen we ook alle ladingen en stromen nul nemen. De vergelijkingen voor de **vlakke em-golf in DVvorm** in de z-richting zijn:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dD_z}{dz} & 0 &= \frac{dB_z}{dz} \\ 0 &= \frac{dB_z}{dt} & 0 &= \frac{dD_z}{dt} \\ -\frac{dB_y}{dt} &= \frac{dE_x}{dz} & \frac{dD_x}{dt} &= -\frac{dH_y}{dz} \\ +\frac{dD_y}{dt} &= \frac{dH_x}{dz} & \frac{dB_x}{dt} &= \frac{dE_y}{dz} \end{aligned}$$

De eerste twee regels zeggen eenvoudig dat de velden in de golfrichting homogeen en constant zijn. De laatste twee vormen de golfvergelijkingen voor de twee polarisatie-richtingen.

5.5 Polarisatie en energiestroom

Inleiding Een vlakke lichtgolf heeft steeds *transversale* elektrische en magnetische velden. Daar het transversale niet algemeen is aangetoond—we hebben slechts op de aparte componenten gelet—doen we dat hier. Een veld kan altijd worden ontbonden in twee onafhankelijke veldcomponenten. De veldcomponenten van een vlakke golf blijken nu ‘gepolariseerd’ te zijn. Experimenteel vinden we de ‘*polarisatie*’eigenschappen van een *elektromagnetische* golf: alleen een bepaalde component van het licht kan door een polarisatiefilter heen dringen. Elektromagnetische golven blijken ‘*informatie-dragers*’ bij uitstek te zijn. Denk aan de tele-communicatie—de laatste jaren is er een verschuiving van de ‘radio’ frequenties terug naar de ‘licht’ frequenties (glasfibers). Een vlakke lichtgolf verplaatst elektromagnetische(veld)energie; dat is een belangrijke reden voor het behandelen van de theorie ervan. Daarbij blijkt dat de energiestroom van een em-golf wordt bepaald door de Poyntingvector(engelsman J.H. Poynting, 1884), bepaald door de veldsterkten.

Transversale velden

Bij een vlakke golf in de z -richting geldt (volgens vgl. 5.3 en 5.4):

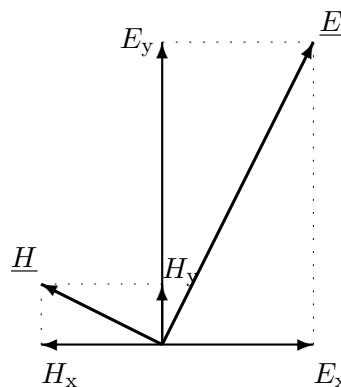
$$E_x = vB_y \quad E_y = -vB_x$$

Let nu op het *totale* elektrische en magnetische veld. Om te beginnen zijn de totale velden qua *grootte* met dezelfde factor gekoppeld:

$$E = vB$$

Ook de *richtingen* van de totale velden staan loodrecht op elkaar; beschouwen we de vectoren van het elektrische en magnetische veld dan is hun inwendig produkt nul:

$$\begin{aligned} (\underline{E}, \underline{H}) &= E_x H_x + E_y H_y \\ &= v\mu(H_y H_x - H_x H_y) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Figuur 5.11 Samenstellen van de elektrische en magnetische transversale componenten van een em-golf in de $+z$ -richting. Let erop, dat ook de samengestelde velden weer loodrecht op elkaar staan. Omgekeerd zijn de ontbonden velden paarsgewijs gekoppeld.

De velden \underline{E} en \underline{H} staan beide loodrecht op de golfrichting, en loodrecht op elkaar: de em-golf is een **transversale golf**.

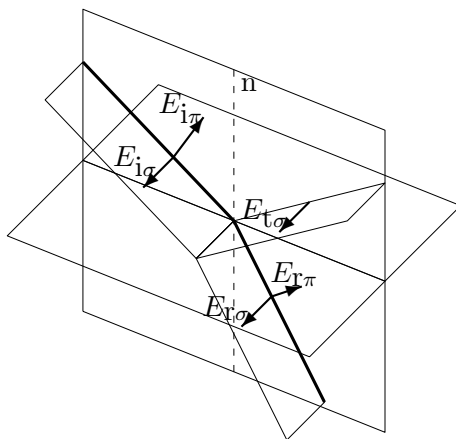
Polarisatie-componenten We noemen de richting waarin het elektrische veld van een em-golf staat de *polarisatierichting* van de golf. De polarisatierichting kan in principe in ruimte en tijd veranderen. Als de polarisatierichting vast en constant is heet de em-golf **lineair gepolariseerd**. Een lineair gepolariseerde elektromagnetische golf kan worden ontbonden in twee gepolariseerde golven waarvan de velden *in fase* zijn. De ontbindingsrichtingen kan willekeurig worden gekozen, bijvoorbeeld horizontaal en verticaal. Hebben we **harmonische** gepolariseerde golven: sinussen of cosinussen met één bepaalde frequentie, dan kunnen we de em-golf op een speciale manier ontbinden. Zo onderscheiden we dus twee bijzondere gevallen bij harmonische em-golven:

- de ontbindingsrichtingen zijn de vaste (x en y) assen: *lineaire polarisatie*;
- de ontbindingsrichtingen zijn twee ‘wijzers’ die linksom en rechtsom met de golffrequentie rondlopen: *circulaire polarisatie*;

We zullen op beide gevallen iets ingaan.

Polarisatie en uitdoving Als een gepolariseerde golf door een **polarisatiefilter** gaat wordt één bepaalde component van de golf uitgedoofd. Waarom? In het polarisatiefilter is de geleiding voor elektrische veld in één richting, de *polarisatierichting*, veel beter dan in andere richtingen. Denk daarbij aan ‘doorzichtige’ stoffen, gemaakt van moleculen die in de polarisatierichting langgerekt zijn. Valt een em-golf op een polarisatiefilter, dan kan alleen de elektrische component in de polarisatierichting (evenwijdig aan de moleculen) door het filter komen. Dat geldt ook voor de eraan gekoppelde magnetische component; die is immers evenredig met de elektrische component. Het licht dat het filter gepasseerd is, heeft *lineaire polarisatie* in de polarisatierichting van het filter. Laten we dat licht op een tweede filter vallen, waarvan de polarisatierichting 90 graden gedraaid is ten opzichte van die van het eerste filter, dan zal ook de overgebleven elektrische component door het filter worden uitgedoofd (tezamen met het gekoppelde magnetische veld). Dus twee polarisatiefilters achter elkaar, met 90 graden verschil in polarisatierichtingen, zal geen enkel licht doorlaten.

Weerkaatsing en polarisatie De werking van een polaroid-zonnebril is erop gebaseerd dat *teruggekaats*, *gespiegeld*, licht gepolariseerd is in een bepaalde richting. Om dat te begrijpen bezien we het weerkaatsen van licht door een wateroppervlak, of een metaaloppervlak, nader (figuur 5.12). De elektrische component evenwijdig aan het oppervlak kan veel gemakkelijker ongestoord blijven oscilleren dan de component loodrecht erop, die in de buurt van het oppervlak als het ware voor een deel



Figuur 5.12 Licht is een gepolariseerde em-golf. Getekend is de terugkaatsing ('t') en breking ('r') van één vlak van een op een medium met hogere brekingsindex invallende ('i') vlakke em-golf. De elektrische (en magnetische) velden van het licht, dat op een oppervlak valt, kunnen worden ontbonden in langs het oppervlak (index σ) en loodrecht erop (index π). Alleen de elektrische component E is aangegeven. Merk op, dat alleen E_σ langs het oppervlak wordt weerkaatst, zodat het gespiegelde licht gepolariseerd is.

het oppervlak in moet. In het weerkaatste licht blijft daardoor alleen de elektrische component evenwijdig aan het 'spiegelvlak' over: het licht wordt gepolariseerd evenwijdig aan het spiegeloppervlak. We hoeven dan slechts een bril te nemen met glazen met verticale polarisatierichting om het weerkaatste licht 'uit te doven'.

Circulaire polarisatie We hebben allen natuurlijk geleerd hoe de amplituden van een cosinus of sinus, van een golf met een bepaalde frequentie, kunnen worden afgeleid van een punt dat, met de golfrequentie, op een cirkel ronddraait in het xy -vlak. De cosinus is dan de x -component en de sinus de y -component. Welnu, precies op die manier kunnen we een *staande* gepolariseerde golf ontbinden in twee *rondraaiende* gepolariseerde golven. Stel dat de velden cosinusvormig met de tijd veranderen; in het bijzonder voor E_x :

$$E_x = \hat{E}_x \cos(\omega t)$$

Bezie nu (figuur 5.13) de twee velden \underline{E}_{x+} en \underline{E}_{x-} met grootte \hat{E}_x en fase ωt respectievelijk $-\omega t$. Dan geldt:

$$\underline{E}_x = \frac{1}{2}(\underline{E}_{x+} + \underline{E}_{x-})$$

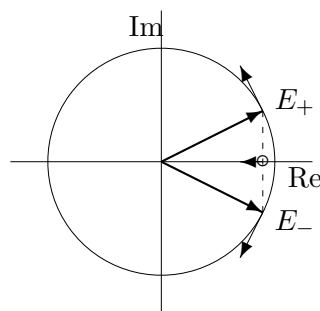
Op dezelfde manier geldt voor het magnetische veld in de x -richting:

$$\underline{H}_x = \frac{1}{2}(\underline{H}_{x+} + \underline{H}_{x-})$$

Voor de velden in de y-richting kunnen we iets dergelijks doen. We moeten er rekening mee houden dat de linksom en rechtsom draaiende velden nu bekeken moeten worden ten opzichte van de positieve y-as. Dus staat op ieder moment \underline{E}_{x+} loodrecht op \underline{H}_{y+} , en \underline{E}_{y+} loodrecht op $-\underline{H}_{x+}$.

$$\underline{E}_y = \frac{1}{2}(\underline{E}_{y+} + \underline{E}_{y-})$$

Als de \underline{E}_x en \underline{E}_y velden even groot maar juist 90 graden uit fase zijn, dan zullen \underline{E}_{x-} en \underline{E}_{y-} elkaar precies uitdoven, daarentegen zullen \underline{E}_{x+} en \underline{E}_{y+} elkaar precies versterken: we hebben een circulair gepolariseerde golf die linksom draait.



Figuur 5.13 Een elektrisch veld in de x-richting, dat cosinusvormig in de tijd 'draait', wordt ontbonden in twee velden die ronddraaien in de ruimte, met dezelfde en tegengestelde frequentie.

Veldenergiedichtheid De koppeling tussen het elektrische en magnetische veld lijkt—tenminste op de manier die we gebruikten tot nu—niet erg 'symmetrisch' of gelijkwaardig. Er is echter een meer symmetrische vergelijking voor de koppeling tussen het elektrische en magnetische veld die in verband staat met de energiedichtheid van het em-veld van de golf. Daartoe nemen we de koppelingsvergelijking 5.3, van een in de x-richting gepolariseerde golf, en kwadrateren die om het teken te laten verdwijnen. Met $v^2 = 1/\mu\epsilon$ wordt dat:

$$\begin{aligned} E_x^2 &= v^2 B_y^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} \mu^2 H_y^2 = \frac{\mu}{\epsilon} H_y^2 \\ \frac{1}{2} \epsilon E_x^2 &= \frac{1}{2} \mu H_y^2 \end{aligned}$$

In het linkerlid staat de elektrische *energiedichtheid* en in het rechterlid de *magnetische veldenergiedichtheid* van de in de x-richting gepolariseerde golf. De **em-veldenergie** is dus gelijk verdeeld tussen het elektrische en het magnetische veld. Net zo geldt voor een in de y-richting gepolariseerde golf:

$$\frac{1}{2} \epsilon E_y^2 = \frac{1}{2} \mu H_x^2$$

De energiedichtheid van een gepolariseerde vlakke golf in de z-richting met *willekeurige* polarisatierichting wordt bepaald door het kwadraat van de amplitude van de veldsterkte:

$$\frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

Bij de vlakke em-golf geldt: $E^2 = E_x^2 + E_y^2$ $H^2 = H_x^2 + H_y^2$ zodat:

$$\begin{aligned}\frac{dW_e}{dV} &= \frac{1}{2}\epsilon (E_x^2 + E_y^2) = \left(\frac{1}{2}\epsilon E_x^2 + \frac{1}{2}\epsilon E_y^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\mu H_y^2 + \frac{1}{2}\mu H_x^2\right) = \frac{1}{2}\mu (H_x^2 + H_y^2) \\ \frac{dW_e}{dV} &= \frac{dW_m}{dV}\end{aligned}$$

Conclusie *Bij een gepolariseerde em-golf is de energiedichtheid van de em-veldenergie gelijk op verdeeld tussen het elektrische en magnetische veld.*

De energiestroomdichtheid \underline{S} Bekijk een gepolariseerde vlakke golf die zich voortplant in de z-richting. Die energie gaat met de golf mee, zodat een *energiestroom* ontstaat in de richting van de golf. De totale energiestroom door een vierkante meter per seconde is de **energiestroomdichtheid \underline{S}** van de vlakke golf. De **eenheid van** is $\text{J/s/m}^2 = \text{W/m}^2$. De grootte S kan worden berekend door de energiedichtheid te vermenigvuldigen met de golfsnelheid. In ons voorbeeld, met de golf in de z-richting is \underline{S} in de z-richting met de component S_z :

$$S_z = v \frac{dW_{em}}{dV}$$

Bij de vlakke em-golf geldt door de koppeling: $v\mu H_y = E_x$ en $v\mu H_x = -E_y$, waarmee de energiestroomdichtheid S wordt:

$$S_z = v\mu H_y^2 + v\mu H_x^2 = E_x H_y - E_y H_x$$

De gevonden vergelijking voor de energiestroomdichtheid S_z blijkt precies de z-component te zijn van het uitproduct van het elektrische en magnetische veld van de golf. Dat verband tussen de energiestroomdichtheid en het uitproduct blijkt algemeen te zijn. Daarom heeft $\underline{E} \times \underline{H}$ een speciale naam, de **Poyntingvector**, en geldt voor de *energiestroomdichtheid*:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

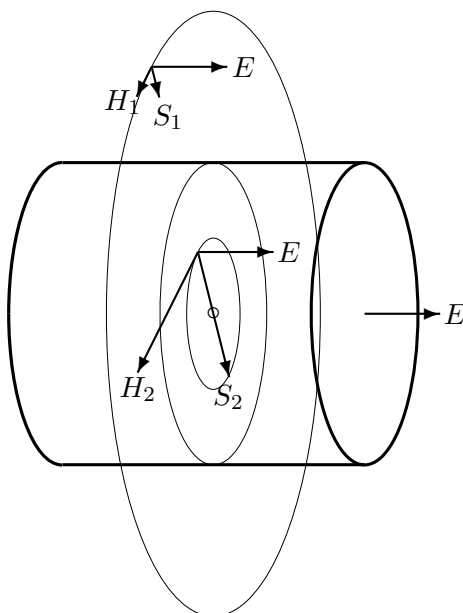
Conclusie *De energiestroomdichtheid van een em-veld wordt gegeven door de grootte en richting van de Poyntingvector \underline{S} :*

$$\boxed{\frac{dW_{em}}{dV} \underline{v} = \underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}}$$

- Opg 5.5.1** ** Een em-golf met een frequentie van 1 MHz gaat door water met een $\epsilon_r = 80$ en $\mu_r = 1$. Bij meting blijkt de *effectieve* elektrische veldsterkte 1 mV/m te zijn.
- Bereken de effectieve *elektrische energiedichtheid* van de golf.
[Antw. $W_e = 0,35 \cdot 10^{-15} \text{ J/m}^3$]
 - Bereken de effectieve *magnetische energiedichtheid* van de golf.
[Antw. $W_m = W_e$]
 - Bereken de grootte van de *energiestroomdichtheid* S .
[Antw. $S = vW = 0,23 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$]

Energiestroom en straling Ook voor willekeurige elektromagnetische velden blijkt de energiestroomdichtheid gelijk te zijn aan de Poynting-vector. Dat heeft belangrijke gevolgen. Denk bijvoorbeeld eens aan een geleider in de z -richting waarin ‘eenvoudig’ een elektrische stroom loopt tengevolge van een spanning. De veldsterkte in de richting van de stroom is $E = V/l$. De stroom heeft de sterkte $I = V/R$. Op het oppervlak van de geleider, zeg een ronde met straal R zoals is getekend in figuur 5.14, is de magnetische veldsterkte $H = I/(2\pi R)$. Bereken een energiestroomdichtheid op het oppervlak ter grootte

$$S = EH = \frac{VI}{2\pi Rl}$$



Figuur 5.14 Het elektrische veld E veroorzaakt een stroom I naar rechts, die op zijn beurt een rechtsonder circulerend magnetisch veld H veroorzaakt. Kennelijk is er een energiestroom van het veld naar binnen toe die precies het vermogen levert voor de dissipatiestraling naar buiten toe.

Merk op, dat de noemer precies het totale oppervlak van de geleider is, en de teller precies het totale elektrische vermogen dat de spanningsbron aan de geleider levert. Kennelijk wordt dat vermogen geleverd via het elektromagnetische veld: met \underline{E} naar rechts en \underline{H} rechtsonder circulerend, is de energiestroomdichtheid vector, de Poyntingvector $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$ naar binnen gericht. Binnen de geleider wordt de veldenergie omgezet in warmtebeweging, welke, na een bijbehorende temperatuurverhoging, weer als *temperatuurstraling* wordt uitgestraald. Temperatuurstraling is zelf ook elektromagnetisch—maar dan als infraroodstraling. Dus statische veldenergie (spanningsbron) is omgezet in dynamische veldenergie (warmtestraling).

- Opg 5.5.2** *** Er is gegeven: $S_y = E_z H_x$. We trekken hieruit de conclusie: S_y is de y-component van $\underline{E} \times \underline{H}$
- A dit is algemeen waar
 - B dit is nooit waar
 - C dit is waar als $E_y = 0$ en $H_y = 0$
 - D dit is waar als $E_x = 0$ of $H_z = 0$
- Opg 5.5.3** ** We hebben een zeer lange rechte geleider waardoor een stroom gaat van 3A. Per meter staat er een spanning over de draad van 60V. Bereken de energiestroomdichtheid in een punt buiten de draad, op 20 cm van de hartlijn van de draad. [Antw. 0,143 kW/m², naar binnen gericht]

5.6 Breken van velden

Fluxdichtheden loodrecht op grensvlak Voor toepassingen is het belangrijk te weten hoe de elektrische en magnetische velden zich gedragen als ze van het ene naar het andere medium doorlopen. Op grond van de wetten van Gauss en de inductiewetten kan daar gemakkelijk iets over worden gezegd. Allereerst: volgens de *wet van Gauss* zullen fluxen altijd doorlopen; veldlijnen kunnen niet ophouden (alleen elektrische veldlijnen kunnen op ladingen uitkomen, maar we nemen aan dat er geen oppervlaklading is). Daaruit volgt onmiddellijk dat de fluxdichtheid loodrecht op het grensvlak (of contactvlak), dus langs de *normaal* op het grensvlak, aan beide zijden van het grensvlak dezelfde waarde heeft. Noemen we de media 0 en 1, dan geldt bij de brekende velden voor de fluxdichtheden langs de normaal van het grensvlak:

$$D_{n0} = D_{n1} \quad B_{n0} = B_{n1}$$

Veldsterkten evenwijdig aan grensvlak Bekijk nu de componenten van de veldsterkten in het grensvlak. De veldsterkten zijn de spanningen per meter. De spanningen aan beide zijden van het grensvlak zijn natuurlijk gelijk (er kan geen energieverval zijn als we ‘door’ het grensvlak gaan). Dus moeten de veldsterkten langs het grensvlak aan beide zijden gelijk zijn. Noemen we de media 0 en 1, dan geldt bij de brekende velden voor de veldsterkten langs (‘tangentiëel’ = ‘rakend’ aan) het grensvlak:

$$E_{t0} = E_{t1} \quad H_{t0} = H_{t1}$$

Conclusie *De elektrische en magnetische velden aan weerszijden van een grensvlak zijn gekoppeld: de fluxdichtheden loodrecht op het grensvlak, D_n en B_n , zijn aan weerszijden gelijk; de veldsterkten langs het grensvlak, E_t en H_t , zijn aan weerszijden gelijk.*

Breking van velden aan grensvlak Door de juist gegeven eigenschappen van fluxdichtheden en veldsterkten te combineren met de materiaaleigenschappen—zowel elektrisch als magnetisch—kunnen we een eenvoudige betrekking afleiden voor het breken van elektrische of magnetische velden aan een grensvlak. Deze lijken enigszins op de bekende wet van de leidenaar W. Snel van Royen (1621), maar die geldt slechts voor ‘gecombineerde’ *elektromagnetische* vlakke golven (of ‘licht’stralen). In veel materie geldt een evenredig verband tussen fluxdichtheid en veldsterkte met de evenredigheidsconstanten *permittiviteit* ϵ en *magnetische permeabiliteit* μ :

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} \quad \underline{B} = \mu \underline{H}$$

Daarbij wordt praktisch gebruik gemaakt van de relatieve evenredigheidsfactoren ten opzichte van vacuüm, de *relatieve permittiviteit* of *diëlektrische constante* ϵ_r en de *relatieve magnetische permeabiliteit* μ_r :

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

Op grond daarvan kunnen we de betrekking voor het breken van de fluxdichtheden B en D uitdrukken in de diëlektrische constanten of de relatieve permeabiliteiten:

$$\epsilon_{r0} E_{n0} = \epsilon_{r1} E_{n1} \quad \mu_{r0} H_{n0} = \mu_{r1} H_{n1}$$

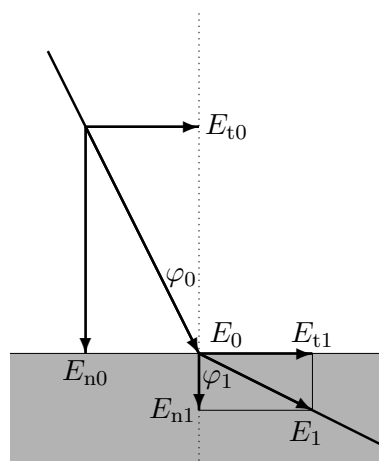
De hoek die een veld maakt met de normaal van het grensvlak is, zoals eenvoudig te zien is (figuur 5.15), bepaald door de verhouding van de tangentiële en normale component:

$$\tan \varphi_E = \frac{E_t}{E_n} \quad \tan \varphi_H = \frac{H_t}{H_n}$$

Door de betrekkingen voor fluxdichtheden en veldsterkten op elkaar te delen volgt onmiddellijk de *brekingswetten* voor de velden: een betrekking voor de hoeken die de velden aan beide zijden van het grensvlak maken met de normaal

$$\frac{1}{\epsilon_{r0}} \tan \varphi_{E_0} = \frac{1}{\epsilon_{r1}} \tan \varphi_{E_1}$$

$$\frac{1}{\mu_{r0}} \tan \varphi_{H_0} = \frac{1}{\mu_{r1}} \tan \varphi_{H_1}$$



Figuur 5.15 Breking van velden op een grensvlak; de vectoren stellen de *veldsterkten* voor van het netto veld. Dat moet niet verward worden met de voortplantingsrichting in geval het veld deel uitmaakt van een em-golf.

Merk op dat de *velden* in een stof met hogere materiaalconstante van de normaal af worden gebroken; dat is precies de andere kant uit als bij lichtstralen, die naar de normaal toe worden gebroken.

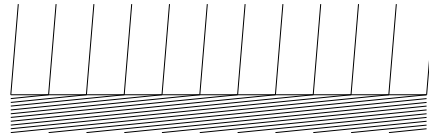
Voorbeeld Veld rond ijzer De breking van een magnetisch veld bij het grensvlak van een magnetisch materiaal met hoge permeabiliteit en lucht. Het 'ijzer' trekt ahw het magnetische veld ahw naar zich toe. Als een veldlijn buiten onder een hoek van 1° met de normaal bijna recht afkomt op het ijzer, met bijvoorbeeld $\mu_r = 1000$, bepaal de richting van het veld in het ijzer.

De magnetische veldrichtingen worden bepaald door de magnetische brekingswet. Daaruit volgt dat binnen het ijzer de hoek van het veld Φ is bepaald door

$$\tan \Phi = 1000 \tan 1^\circ = 17,46$$

De bijbehorende hoek van $86,7^\circ$ betekent dat het veld bijna evenwijdig aan het ijzer loopt: het scheelt nog maar $3,3^\circ$. Van buiten naar binnen is het veld $92,3^\circ$, iets meer dan 90 graden, gedraaid.

De veldichtheid is binnen het ijzer, door de hoekverdraaiing, sterk toegenomen: namelijk met de factor $\cos(1^\circ)/\cos(86,7^\circ) = 17,4$. Bij een hoge waarde van de magnetische permeabiliteit geldt bij benadering dat het veld verdicht met de factor $\mu_r \sin \Phi_0$.



Breking van magneetveld in ijzer aan de rand, waarbij het veld praktisch loodrecht op de rand 'weglekt'.

Opg 5.6.1 * Bij de toepassing van de *wet van Gauss* voor de breking van een statisch elektrisch veld op het grensvlak van twee media vinden we een betrekking voor de normaalcomponent van de fluxdichtheid, omdat:

- A de fluxdichtheid altijd loodrecht op de grenslaag staat
- B de raakcomponent van de fluxdichtheid altijd nul is op de grenslaag van twee media
- C er bij de bepaling van de flux sprake is van een uitwendig (vectorieel) produkt tussen de fluxdichtheid en de grensvlakvector
- D er bij de bepaling van de flux sprake is van een inwendig (scalair) produkt tussen de fluxdichtheid en de grensvlakvector

Opg 5.6.2 ** Een elektrisch veld valt door een medium met $\epsilon_r = 1,5$ op een perspex plaat met $\epsilon_r = 4,8$. Het elektrische veld in het medium heeft een sterkte langs het grensvlak van $E_t = 1,2 \text{ V/m}$, loodrechte erop is $E_n = 1,6 \text{ V/m}$. Bereken de elektrische veldsterkte in perspex.

- A $1,2 \text{ V/m}$
- B $1,3 \text{ V/m}$
- C $1,6 \text{ V/m}$
- D $2,0 \text{ V/m}$

Opg 5.6.3 ** Een magnetisch veld valt onder een hoek van 10° met de normaal van een stof met brekingsindex 2 naar een stof met brekingsindex 3. In het eerste medium is de diëlektrische constante 1 en in het andere gelijk 2. Bereken de hoek van het veld met de normaal in het andere medium.

[Antw. $11,2^\circ$]

5.7 Breken en spiegelen van stralen

Stralen bij grensvlak Bij vele toepassingen van elektromagnetische velden ‘loopt’ het veld van het ene medium naar het andere medium—wij zullen overigens de toepassing beperken tot *glasvezels*. Dus is het belangrijk te weten hoe velden zich gedragen bij grensvlakken (contactvlakken). Dat wordt in het algemeen bepaald door brekingswetten, voor elektrische en magnetische velden apart. De *wet van Gauss* (elektrisch en magnetisch) en de inductiewetten, toegepast op het grensvlak (hier vrij van oppervlakladingen en oppervlakstromen) bepalen de *brekingswetten voor velden*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon_{r0}} \tan \varphi_{E_0} &= \frac{1}{\epsilon_{r1}} \tan \varphi_{E_1} \\ \frac{1}{\mu_{r0}} \tan \varphi_{H_0} &= \frac{1}{\mu_{r1}} \tan \varphi_{H_1}\end{aligned}$$

De *veldrichting* φ , in de brekingswetten, moet niet worden verward met de *voortplantingsrichting* θ van een em-golf (de richting van de ‘straal’ dus). Doordat een em-golf transversaal is, staan de elektrische en magnetische velden altijd loodrecht op de straal waarvan ze deel uitmaken. Het precieze verband tussen de richting van de straal θ en de richting van het veld φ wordt mede bepaald door de richting van het polarisatievlak.

Breken en terugkaatsen van stralen De brekingshoek van het elektrische veld wordt bepaald door de verhouding van de permittiviteiten ϵ aan beide zijden van het grensvlak, terwijl die van het magnetische veld wordt bepaald door die van de magnetische permeabiliteiten μ . Die verhoudingen zijn in het algemeen niet dezelfde, zodat elektrische en magnetische *velden* aan het grensvlak onder *verschillende* hoeken wordt gebroken. Hoe kan dan een *em-golf*, die toch bestaat uit gekoppelde elektrische en magnetische velden, naar één richting worden gebroken op een grensvlak? Het antwoord is: omdat slechts een deel van de invallende straal wordt gebroken, in de ‘gemiddelde’ richting, en de rest van de straal wordt ‘gespiegeld’, ‘gereflecteerd’, aan het grensvlak. De gespiegelde straal is noodzakelijk om het verschil in elektrische en magnetische breking te kunnen wegwerken. Soms is het compromis tussen elektrische en magnetische breking onmogelijk: dan is er alleen een gespiegelde straal.

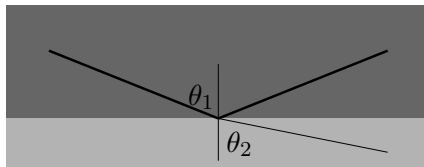
We komen zo tot drie soorten gekoppelde *velden* op het grensvlak:

1. het ‘i’nvallende veld;
2. het ge‘s’piegelde veld;
3. het geb‘r’oken veld;

De brekingswetten voor velden bepalen *in principe* de sterkte van de verschillende velden, dus ook bij dynamische golven. In het bijzonder volgt aan een *grensvlak* een brekingswet van em-golven, de **brekingswet van Snel** (Snellius in het latijn, 1621), met *brekingsindex* n :

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$$

Hierin is θ de hoek tussen de lichtstraal en de normaal van het brekingsvlak. Vergelijk de brekingswet voor lichtstralen met die voor velden.



Figuur 5.16 Op grond van de wet van Snel wordt een lichtstraal die vanuit een 'dichter' naar een 'lichter' medium valt van de normaal af gebroken. Als de invalshoek naar de grenshoek gaat, gaat de gebroken hoek naar 90 graden. Daarna volgt totale spiegeling van de straal

Gaat de straal (van materie met) een hogere naar een lagere brekingsindex, $n_1 > n_2$, dan kan de straal totaal worden gespiegeld. De **totale spiegeling** van de invallende straal gebeurt bij een *te grote invalshoek*: de **grenshoek** θ_g voor de invallende straal wordt bepaald door:

$$n_1 \sin \theta_g = n_2$$

We herinneren eraan, dat de *lichtsnelheid* in materie gelijk is aan de lichtsnelheid in vacuüm gedeeld door de brekingsindex: $v = c/n$.

Opg 5.7.1 ** Op een glasplaat, een planparallele plaat met een dikte van 6 mm, valt uit lucht een lichtstraal. In het glas is de brekingshoek met de normaal 30° . De relatieve permittiviteit (diëlektrische constante) van het glas is 2,5; de relatieve magnetische permeabiliteit is 1.

a Bereken de brekingsindex n van het glas. [Antw. $n = 1,58$]

b Bereken de lichtsnelheid v in het glas. [Antw. $v = 1,90 \cdot 10^8$ m/s]

c Bereken de transmissietijd van het licht door het glas is. [Antw. $t = 36,5$ ps]

Opg 5.7.2 *** We hebben een gepolariseerde em-golf met een golflengte van 2,0 cm in lucht; de maximale magnetische veldsterkte is 1,0 mA/m. Deze golf valt op een medium met een magnetische permeabiliteit van $\mu_r = 4$, onder een hoek van 10° met de normaal. Bereken de maximale magnetische fluxdichtheid loodrecht op het grensvlak in het andere medium.

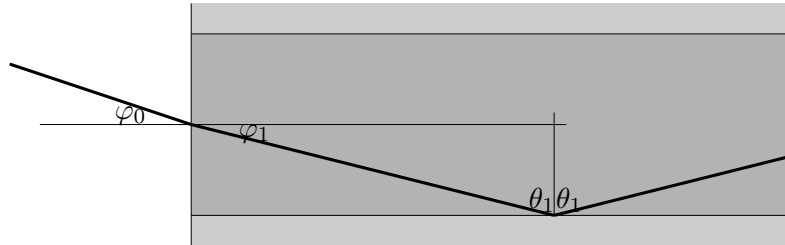
A 0,043 mA/m

B 0,25 mA/m

C 0,98 mA/m

D met deze gegevens niet te berekenen

Glasvezels: acceptatiehoek en numerieke apertuur We beperken ons tot de gang van de lichtstralen in glasvezels. De **glasvezel**



Figuur 5.17 Acceptatiehoek en grenshoek: het licht dat onder de acceptatiehoek de vezel ingaat zal daar de dekmantel treffen onder de grenshoek. Bij een nog grotere invalshoek zal het licht door de mantel ‘breken’ en gedeeltelijk verloren gaan.

(‘glasfiber’, engels: ‘optic fiber’) is een lichtgeleider gemaakt van zuiver kwartsglas, brekingsindex $n_1 \sim 1,56$, dat is ‘afgedekt’ met kwartsglas van een *iets lagere* brekingsindex n_2 . Kenmerkend is, dat de lichtgeleidende ‘vezel’ een diameter heeft in de orde van grootte van de golflengte van het licht: micrometers. De lichtstraal zal natuurlijk vanaf de buitenzijde, met brekingsindex n_0 (in lucht is $n_0 \sim 1,000$), de vezel moeten worden ingestraald. De maximale hoek waaronder een lichtstraal de vezel kan worden ingestraald (en als ‘mode’ praktisch ongedempt verder wordt getransporteerd) heet de **acceptatiehoek** φ_c . De acceptatiehoek wordt uitgedrukt in de **numerieke apertuur** NA , de bijbehorende term uit de *brekingswet van Snel*:

$$NA = n_0 \sin(\varphi_c)$$

De acceptatiehoek φ_c *buiten* de vezel hangt, via de numerieke apertuur, samen met de grenshoek θ_g *in* de vezel (zie figuur 5.17). Allereerst maakt de gebroken straal een hoek φ_1 met de normaal van het vezel grensvlak, de as van de vezel: $NA = n_1 \sin \varphi_1$. Deze straal valt maximaal onder de grenshoek $\theta_g = \frac{1}{2}\pi - \varphi_1$ op de mantel, dus $NA = n_1 \cos \theta_g$. De grenshoek θ_g wordt op haar beurt bepaald door de verhouding van de brekingsindices van vezel en mantel: $\sin \theta_g = n_2/n_1$, of $\cos \theta_g = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$. Dit alles onder de aanname dat het grensvlak loodrecht op de vezelas staat. We concluderen dat de *numerieke apertuur* NA *van de glasvezel* (en de acceptatiehoek) wordt bepaald door de brekingsindices van kern en mantel:

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Harmonische golven en fotonen De wet van Snel is feitelijk voor (golvende) velden niet meer correct heel dicht bij het grensvlak. Tot nu hebben we aangenomen dat het *breken* en *spiegelen* van een lichtstraal aan een niet geleidend grensvlak precies gebeurt *op* het grensvlak.

Omdat we bij glasvezels te maken hebben met vezels, zo dun, dat de afmetingen vergelijkbaar worden met de golflengte van het licht, mogen we daar niet meer van uitgaan. Om een goede indruk te krijgen van wat er bij het grensvlak gebeurt bestuderen we een ‘harmonische’ vlakke golf. Een **harmonische vlakke golf** wordt het eenvoudigst beschreven met complexe notatie, zoals we ook deden bij het verschijnsel stroomverdringing in paragraaf 3.6 op pagina 164. De twee kenmerkende getallen van een harmonische golf zijn de **golflengte** λ , de herhaalafstand van de golf, en de **periodetijd** T , de tijd van een periode. Beschouwen we de golf echter als een deeltje, het foton, dan is het handig om die twee te vervangen door de **golffrequentie** ω en door het **golfgetal** k :

$$\omega = 2\pi/T \quad k = 2\pi/\lambda$$

Bij een vrije golf zijn golffrequentie en golfgetal evenredig, met de golfsnelheid v als evenredigheidsconstante; dat geeft de **dispersievergelijking**:

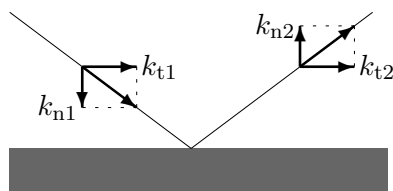
$$\omega^2 = v^2 k^2$$

De amplitude van een vrije golf wordt bepaald door de ‘fase’ $x - vt = (kx - \omega t)/k$, waaruit de ‘absolute fase’ $kx - \omega t$ volgt; de harmonische golf in complexe notatie wordt daarmee

$$f = e^{i(kx - \omega t)}$$

Deze harmonische golf voldoet aan de **golfvergelijking**, mits de dispersievergelijking geldt.

Fotonen als botsende deeltjes



Figuur 5.18 Foton spiegeling: de impulsen voor en na de botsing zijn ahw gespiegeld in de spiegel

naar het resultaat van de botsing). Bij het botsen van de fotonen zal de energie behouden blijven. Verder zal de impuls evenwijdig aan het grensvlak niet veranderen, en de impuls loodrecht op het grensvlak van richting omkeren. Het impulsverschil wordt aan de spiegel meegegeven.

Een em-golf kan niet alleen als golf, maar ook als een stroom van fotonen worden opgevat. Als een foton op een grensvlak ‘botst’, dan zullen de wetten van behoud van energie en impuls voor die botsing moeten gelden. Spiegelen is te zien als het botsen van een elastische bal op een muur. We vergelijken momenten voor en na de botsing (dus kijken niet naar het botsproces zelf, maar

Uit de algemene golftheorie van deeltjes (in dit geval de fotonen van het em-veld) weten we dat ω en k bepalend zijn voor de energie E en de impuls p van het *foton* (van de vrije golf): $E = hf = h/T = \hbar\omega$ en $p = h/\lambda = \hbar k$:

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

Gemakshalve zullen we ‘denken’ dat $\hbar = 1$, zodat energie gelijk is aan ω , en de impuls kan worden vervangen door k .

Goos-Hänchen verschuiving achter grensvlak Omdat een em-veld, even voorbij het spiegelend grensvlak, niet zomaar verdwijnt zal de golf voor een deel ‘in de spiegel’ dringen. Veronderstel dat de golf onder een kleine hoek θ_1 met de z-as in het xz-vlak loopt. De energie en impuls van de golf vóór de spiegel voldoen aan de dispersievergelijking:

$$\omega_1^2 = v_1^2 k_1^2$$

In de spiegelmaterie kan de impuls k_2 niet meer dezelfde zijn als die van de golf, k_1 : ‘bij de botsing van foton op spiegel verliest het foton impuls’. Wij zullen nu onderzoeken wat er gebeurt met de energie en impuls van de golf die net door het grensvlak in de (dichtere) spiegelmaterie komt. De energie, dus de frequentie ω , zal onveranderd zijn. Dat heeft gevolgen voor de impuls:

$$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow k_2 = \frac{v_1}{v_2} k_1 = \frac{n_2}{n_1} k_1$$

Verder zal de impuls k_t langs het grensvlak niet veranderen (zie voor de ‘projectie’ figuur 5.19):

$$k_{t1} = k_{t2} = k_1 \sin \theta_1$$

Voor de impuls k_{n2} loodrecht op het grensvlak, die de mantel ingaat, blijft dan over:

$$k_{n2}^2 = k_2^2 - k_t^2 = \left(\frac{n_2}{n_1} k_1\right)^2 - (k_1 \sin \theta_1)^2 = k_1^2 \left(\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2(\theta_1)\right)$$

Kenmerkend voor *totale reflectie* is, dat het rechterlid *negatief* wordt. Daarmee hebben we de bekende voorwaarde voor **totale spiegeling** afgeleid, namelijk dat de invalshoek boven de grenshoek is:

$$\sin(\theta_1) \geq \sin \theta_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Omdat k_{n2}^2 negatief is, hebben we een **imaginair golfgetal** $k = i\kappa$. Een foton met een imaginaire golfgetal is op te vatten als een **virtueel**

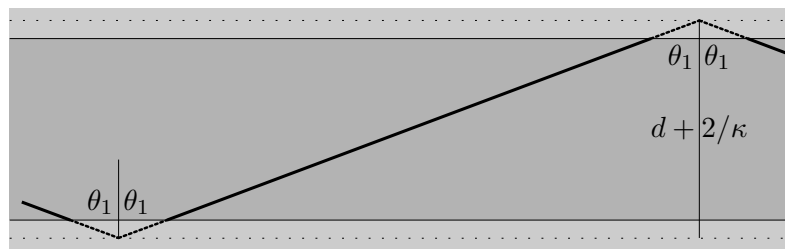
foton, niet zichtbaar foton. Tengevolge van het imaginair zijn van het golfgetal is een virtueel foton een **em-golf** met **golfdemping**:

$$e^{i(\kappa x - \omega t)} = e^{-\kappa x} e^{i\omega t}$$

Vergelijk dit met het complexe golfgetal bij stroomverdringing, die aanleiding gaf tot de indringdiepte d (zie pag. 165). Net zo schatten we bij de em-golf, met een invalshoek boven de grenshoek, de **indringdiepte** van de golf in de spiegel af als $1/\kappa$. De indringdiepte hangt af van de golflengte ($k = 2\pi/\lambda$) en de invalshoek:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda_1/2\pi}{\sqrt{\sin^2(\theta_1) - (n_2/n_1)^2}}$$

Een grotere golflengte, of een kleinere invalshoek, geeft een diepere indringing. Deze indringdiepte kan ook als volgt worden geïnterpreteerd: de straal spiegelt niet aan het grensvlak, maar aan een effectief grensvlak op een diepte $1/\kappa$ erachter. Dat betekent voor de glasvezel dat de afstand d tussen de grensvlakken effectief vermeerderd moet worden met tweemaal $1/\kappa$ in de vergelijking van het aantal modes; dit is de **Goos-Hänchen verschuiving** (1943), die is ingetekend in figuur 5.19.



Figuur 5.19 Goos-Haenchen verschuiving: correctie van de stralenbreking in een glasvezel voor het doordringen van de em-golf in de spiegelende mantel. Bij de diameter d moet tweemaal de indringdiepte $1/\kappa$ worden opgeteld.

‘Mode’voorwaarde in glaslaag Een lichtstraal die in een dunne, vlakke, glaslaag is ingestraald zal voortdurend tegen de grensvlakken van de laag botsen—spiegelen. Omdat de vezelkern betrekkelijk dun is, vergeleken met de golflengte van de lichtstraal, zullen de heen en weer gaande stralen met elkaar gaan ‘interfereren’. Het gevolg daarvan is,

dat alleen stralen in de ‘goede’ richtingen niet worden uitgedoofd, en ongestoord door de glaslaag kunnen gaan: dat zijn de ‘**modes**’ van de glaslaag. De richting is dan zodanig, dat de golflengten precies in de ‘breedte’ van de vezel passen. We zullen voor het geval van de dunne vlakke glaslaag met dikte d de ‘mode’voorwaarde afleiden onder de aanname dat de spiegeling exact op de grensvlakken plaats vindt: dat is een benadering, die zonodig kan worden verbeterd.

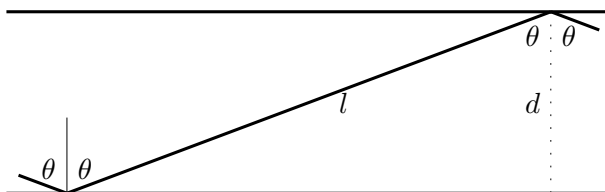
Een golflengte λ_1 langs de lichtstraal is in de normaalrichting (dwars op het grensvlak) op te vatten als een veel grotere golflengte: $\lambda_n = h/p_n = h/p_1 \cos \theta_1 = \lambda_1 / \cos \theta_1 = \lambda_1 / \sin \varphi_1$, waarbij de golflengte overeenstemt met de impuls van het foton. Die golflengte moet nu in breedte d passen, namelijk een veelvoud m van de halve λ_n . De **modevoorwaarde** in de glasvezel met dikte d voor een lichtstraal met een golflengte λ_1 in de kern wordt:

$$d = m \frac{\lambda_n}{2} = m \frac{\lambda_1}{2 \sin \varphi_1}$$

De golflengte is omgekeerd evenredig met de *brekingsindex*, omdat $v = c/n = f\lambda$, dus $\lambda_1 = (n_0/n_1)\lambda_0$. Verder moeten we er rekening mee houden dat de hoek θ_1 boven de grenshoek blijft, die wordt bepaald door $n_1 \sin \varphi_1 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = NA$. Daarmee rekening houdend wordt het maximum aantal mogelijke modes m_{\max} in de *vlakke glaslaag*:

$$m_{\max} = \frac{2d NA}{\lambda_0 n_0}$$

Modes in glasvezel Voor we van de vlakke vezel naar een cilindrische glasvezel gaan, bezien we eerst een vierkante vezel. We kunnen een vierkante vezel opvatten als een vlakke laag ‘naar twee kanten’. Een lichtstraal kunnen we ontbinden in twee stralen, één in de x-richting en één in de y-richting (door de impuls te ontbinden). De straaldelen zullen ieder weerkaatst worden door de x-grensvlakken resp. y-grensvlakken. Alleen de lichtstralen in de goede richtingen, de ‘modes’, zullen niet worden uitgedoofd. Voor de twee richtingen apart krijgen we het aantal ‘modes’ als hierboven. Totaal kunnen we die combineren tot het aantal



Figuur 5.20 Spiegeling van lichtstraal aan onder- en bovengrens. Uitdoving treedt alleen dan niet op, als de vergelijkbare spiegelpunten in fase zijn.

mogelijke modes m_{\max} in de *vierkante glasvezel* als:

$$m_{\max} = \left(\frac{2d}{\lambda_0} \frac{NA}{n_0} \right)^2$$

Bij een cilindrische glasvezel zijn er vele soorten stralen mogelijk. Een straal die door de as gaat is natuurlijk te vergelijken met de straal tussen twee evenwijdige grensvlakken op afstand $d = 2r$. Andere stralen draaien als het ware om de as, ietwat vergelijkbaar met scheve stralen in de vierkante vezel. Het gevolg van het een en ander is dat het aantal 'modes' van de *cilindrische glasvezel* een factor 1,23 groter is dan van de vierkante glasvezel. Het maximum aantal modes van de *cilindrische glasvezel* is:

$$m_{\max} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{4r}{\lambda_0} \frac{NA}{n_0} \right)^2$$

Als het maximum 1 is, spreekt men van 'singlemode', anders van 'multimode'. Bedenk dat alle modes gepolariseerd zijn. In het algemeen onderscheiden we de *TE-mode*, die het 'E'lektrische veld evenwijdig aan het grensvlak heeft en de *TM-mode*, waarvan het 'M'agnetische veld evenwijdig aan het grensvlak staat. Verschillende modes hebben, in principe, verschillende snelheid. We merken nog op, dat de demping bij de huidige glasvezels zeer klein is: in de orde van tienden dB per km.

Conclusie Een glasvezel, brekingsindex n_1 in de kern en n_2 in de mantel, wordt gekenmerkt door de straal r en de numerieke apertuur $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. De acceptatiehoek φ_c van de invallende straal met golflengte λ_0 in 'lucht', brekingsindex n_0 , is bepaald door:

$$\sin(\varphi_c) = \frac{NA}{n_0}$$

Het maximaal aantal modes door de cilindrische vezel is:

$$m_{\max} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{4r}{\lambda_0} \frac{NA}{n_0} \right)^2$$

Opg 5.7.3 ** Gegeven een glasvezel met een diameter van $5,0 \mu\text{m}$, waarvan de brekingsindex in de kern is $n_1 = 1,55$ en de brekingsindex in de mantel $n_2 = 1,54$.

a Bereken de numerieke apertuur en acceptatiehoek

[Antw. $NA = 0,18$ en $\varphi_c = 10^\circ$]

b Bereken het aantal modes van deze vezel voor licht met een golflengte van $1,3 \mu\text{m}$.

[Antw. $m = 2$]

MEERKEUZEANTWOORDEN**Hoofdstuk 5 Dynamische velden****5.2 Vlakke golf golfvergelijking**

5.2.1 D

5.3 Differentiaalvergelijkingen vlakke em-golf

5.3.1 D

5.4 Vergelijkingen em-veld5.4.1 A fase wordt bepaald door t en x

5.4.2 C hernoem de assen van de theorie door 'opschuiving'

5.5 Polarisatie en energiestroom

5.5.2 D

5.6 Breken van velden

5.6.1 D

5.6.2 B

5.7 Breken en spiegelen van stralen

5.7.2 D polarisatie richting niet gegeven

Index

Bij een trefwoord is het paginanummer aangegeven waar de definitie staat, of, bij meerdere nummers, waar het trefwoord op een karakteristieke manier wordt gebruikt: definitie **scheef vet**; gebruik *cursief*.

Symbolen	
A	19
A_{om}	26
B	22
D	22
E	65
E_k	82
E_l	62
E_p	92
E_r	183
E_φ	183
F	76
F_l	76
F_C	51
G	43
G_p	45
H	56
H_c	167
I	19
I_{door}	131
I_{uit}	26
J	20
J_c	167
L	137
L_{12}	137
L_p	149
L_s	147
M	139
NA	256
O	52
P	49
P_{ind}	123
Q	13
Q_{in}	32
R	43
R_s	44
S	226
T	257
T_L	112
T_c	167
T_i	122
T_o	123
U_H	102
U_R	42
$U_{\text{m rond}}$	118
V	
potentiaal	65
volume	19
V_P	53
W	77
Ω	43
Φ	22
Φ_{door}	117
Φ_{uit}	38
Ψ	22
Ψ_{door}	132
Ψ_{uit}	32
ϵ	53
ϵ_0	53
γ	43
\int	14
κ	259
λ	
golflengte	257
lijnladingsdichtheid	187
μ	56
μ_0	215
μ_0	56
μ_B	115
μ_r	56
ω	97
ρ	
ladingsdichtheid	14
soortelijke weerstand	43
σ	
soortelijke geleiding	43
vlakladingsdichtheid	194
θ_g	255
φ_c	256
a_r	97
dA	25
dF_C	74
dI	26
dQ	74, 187

- dW **76, 90**
 $d\Psi$ **35**
 $d\varphi$ **90**
 dl 76
 k
 golfgetal **257**
 koppelfactor **139**
 l **41**
 m **82**
 n 255
 q 95
 r **97**
 v **82**
 w **50**
 $\frac{N}{l}$ **212**
 \underline{S} 249
 $\underline{1}_r$ **202**
 \underline{B} 22
 \underline{E} **75**
 \underline{E}_H **101**
 \underline{F}_C 74
 \underline{F}_L **95**
 \underline{F}_C **52**
 \underline{J} **20**
 \underline{S} **248**
 \underline{T} **87**
 \underline{T}_L **112**
 \underline{a}_r **97**
 \underline{dA} **20**
 $\underline{d\varphi}$ **91**
 \underline{p}_e **88**
 \underline{p}_m **113, 207**
 \underline{r} **87**
- A**
- A** **19**
aandrijfkoppel **122**
 effectief 123
 momentane 124
aangrijpingspunt 87
aantal modes 261
aardmagneetveld 23, 107
acceptatiehoek 255, **256**, 261
afbuiging 85
 elektrisch 82, **84**
 magnetisch 82, **99**, 100
Ampère 19, 56, **215**
ampèrewindingen 39
- amplitude
 golf 257
 snaar 224, 225, 226, 228
 stroom 28, 31
 veld 165, 242, 246, 247
amplitudeverhouding **241**
amplitudeversterking ... 128, **159**
anode **81**
arbeid
 elektrisch 49
 elektrisch veld 42, 49, 51, 53, 62
 langs veldlijn 58
 magnetisch 55
 magnetisch veld 56
 spanningsbron 49
arbeidsdeel 76, **76**, 77
arm **87**
- B**
- baanstraal **97**
beeldscherm **81**
behoudswetten **25**
benodigde elektrische vermogen **156**
Bohr-magneton **115**
bolbliksem 37
bollading **35**, 37, 54, 67, 79, 85, 198
breken
 golf **255**, 256
 straal zie breken/golf
 veld 251–254
brekingsindex .. 239, 240, **240**,
 253, 255, 255, 256, 260, 261
brekingswet
 golf 255
 magnetisch veld 253
 veld 252, 254, 255
brekingswet van Snel ... **255**, 256
bronnen **25**
- C**
- C** **19**, 75
capaciteit 136
centripetale versnelling **97**
cilindrische spoelen 141
circulaire polarisatie 245, 246
cirkelbaan 97, 98
cirkelstroom 205
coax-kabel **37**
coaxkabel 55, 70

commuteren 116
 complexe methode **159**, 164
 complexe notatie **164**
 condensator
 27, 28, 34, 54, 55, 58, 60, 78
 condensatorplaat 27, 30
 conversie *zie* omzetten
 Cooperparen **168**
 Coulomb 19, 22, **215**
 Coulombkoppel **88**, 89
 Coulombkracht 75, 84, 85
 dipool 86, 88, 89
 Hallveld 101
 homogeen veld **52**
 puntlading **51**, 74
 snelheidsmeter 101
 sorteerplaten 93
 tussen bolladingen 198
 Coulombkrachtdeel 74

D

deelflux **35**
 deellading **187**
 deeloppervlak **25**
 deelstroom **26**, **200**
 diëlektrische constante *zie*
 permittiviteit/relatieve,
 53, 230, 252, 255
 diëlektrische verschuiving **22**
 differentiaal **15**, 117, 138, 189
 differentiaalkubus
 **230**, 231, **232**, 233
 differentiaalquotient 59
 differentiaalrekening **15**, 117
 differentiaalvergelijking
 158, 163, 164, 224, 225
 differentiaalvlak
 . 230, 231, 233, 235, 236, 243
 differentie **15**
 dipool 92
 elektrische **86**
 koppel 90
 kracht 90
 potentiële energie **92**
 potentiaal 182
 potentiaalvlak 185
 veldsterkte **184**
 dipoolmoment . **113**, 114, 115, 116

 elektrisch 89, 93, **181**, 182
 elektrische **88**
 koppel 89
 kringstroom 207
 dispersievergelijking **257**
 dissipatie-energie 50
 dissipatiestraling 249
 dissipatievermogen **50**
 dissipatiewarmte **50**
 divergentie **232**
 doorsnedeoppervlak **19**
 draaiarbeid
 elektrische 91
 krachtmoment 91
 magnetische **117**
 draaiarbeidsdeel **90**
 Draaispoelmeter **112**
 draaivermogen **117**
 dynamo 121

E

eenheid keuze **32**, 215
 eenheid van
 arbeid 82
 dipoolmoment **88**
 elektrische capaciteit 53
 elektrische flux **22**, 24, 32
 elektrische fluxdichtheid **22**, 23
 elektrische lading 13,
 19, 22, 32, 51, 53, 75, **215**
 elektrische potentiaal **53**
 elektrische spanning 41
 elektrische stroomdichtheid **19**
 elektrische stroomsterkte ..
 19, 133, **215**
 elektrische veldsterkte
 **42**, **52**, 56, 75
 elektrisch vermogen **49**
 energie 87
 energiestroomdichtheid ... **248**
 geleiding **43**, 45
 golfgetal **164**
 kracht **75**
 krachtmoment **87**
 magnetische fluxdichtheid .
 **22**, 96
 magnetische lading **55**, 56

magnetische permeabiliteit
 **56**, 57
 magnetische potentiaal . **56**, 57
 magnetische spanning **133**
 magnetische veldsterkte ...
 **56**, 201, **203**
 magnetisch moment **113**
 permittiviteit **53**
 soortelijke geleiding 43, 45
 soortelijke weerstand 43, 45
 vlakladingsdichtheid 13
 weerstand **43**
 zelfinductie 56
 elektrische netwerk 26, 27
 elektromagnetisch
 238, 244, 245, 249, 251, 254
 elektromagnetische golf *zie* em-golf
 elektromagnetisch veld *zie* em-veld
 elektromotor **115**
 elektromotorische kracht 122
 elektronenbuis **81**
 elektronenkanon **81**
 elektronsnelheid 82
 elektronvolt **82**, 83
 elementair magnetisch dipoolmo-
 ment **115**
 em-golf 222,
 230, 232, 235, 237-242,
 243, 244, 245, 248, 248,
 249, 252, 254, 254, 257, 259
 gedempt **259**
 em-veld **230**, 238, 242, 247, 248, 258
 em-veldenergie **247**
 EMK 122
 energiedichtheid
 elektrisch 247
 magnetisch 249
 energiestroomdichtheid
 248, **248**, 249, 250
 effectief 249
 eV **82**
 evenwijdige stromen 214
 extreme koppeling 150

F

Farad 53
 fase

complex 128,
 155, 159, 160, 165, 245, 246
 golf **224**, 225, 240, 242, 257, 260
 toestand 170
 faseverdraaiing 128, 155, **159**
 flux 12, 19, 32-34, 40
 elektrisch **22**,
 24, 33, 33, 34, 36, 37, 79, 131
 magnetisch 12, **22**,
 23, 39, 55, 112, 114, 118, 129
 omvatte 121, 130
 passende **114**
 richting **118**, 119
 fluxdichtheid
 . 33, 36, 39, 59, 65, 101, 251
 bolcondensator 79
 bollading 35, 54
 elektrisch **22**, 33, 36, 36, 37, 53
 homogeen veld 54
 magnetisch . 23, 38, 39, 56,
 95, 98, 99, 99, 103, 112, 121
 magnetische 96
 vlakkeplaten-condensator ... 78
 flux door een kring
 elektrisch 132, 135
 magnetisch 128, 136
 fluxdraden 129
 fluxuitstoting 129, **169**
 fluxverandering 118, 121, 138, 154
 fluxverlies 128, **153**, 156

G

Gauss **23**
 gekruiste velden **100**
 geleidend oppervlak **79**
 geleider . 18, 27, 32, 34, 37, 38,
 42, 44, 44, 49, 51, 93, 110, 161
 dissipatiewarmte 50
 Halleffect 101
 ideaal 41
 magnetisch 38
 niet ideaal 45
 stroomverdringing 129
 typen 45
 geleiderdeel 45
 geleiding **43**
 generator ... *zie* inductiegenerator
 gesloten oppervlak .. **25**, 33, 34, 35

- glasfiber *zie* glasvezel
 glasvezel
 254, **255**, 257, 259, 260, 261
 golfdamping **259**
 golffrequentie **257**
 golfgetal **257**
 complex **164**, 259
 imaginair **258**
 golfengte **257**
 golfsnelheid
 224, 227, 230, 239, 248, 257
 golfvergelijking . 222, **225**, 227,
 229, 230, 239, 240, 243, 257
 Goos-Hänchen verschuiving .. **259**
 grenshoek **255**, 256, 258–260
 grensvlak 251–254, 255
- H**
 H **56**
 Hallspanning 102, **102**, 103
 Hallveld **101**, 102
 harmonische **245**
 harmonische functies **164**
 harmonische vlakke golf **257**
 Helmholtz-spoel 208
 hoekfrequentie **164**
 hoeksnelheid **97**
 hoekvariabele 203, 211
 hoekverandering **91**
 hoekverdraaiing 90
 homogeen 229
 homogene ladingsverdeling ... **13**
 hoogfrequent 161, 166
 hoogfrequente wisselstroom 17
- I**
 ideale condensator **34**
 ideale geleider **41**, 42, 42
 ideale rechte stroomgeleider .. **199**
 ideale solenoïde **209**, 210
 ideale transformator **152**
 ijzerverliezen 128, 153
 indringdiepte
 129, 161, 162, **165**, 166, **259**
 inductie 118
 elektrisch **133**
 energie 143
 magnetische 130
 maximum 150
 minimum 150
 inductie-energie
 gekoppelde spoelen **144**
 wederzijdse inductie **144**
 zelfinductie 143
 inductiedamping **119**
 inductiegenerator
 aandrijfkoppel 123
 belast 122
 dynamo **121**
 lamelleren 119
 onbelast 122
 inductiemotor **123**
 inductiespanning
 118, 119, 120, 122, 122, 123
 inductiestroom 119, 120, 122
 inductievermogen **123**, 124
 inductiewet van Faraday
 118, **118**, 130, 133,
 138, 154, 161, 161, 230, 233
 DVvorm 164, **234**, 235, 236, **243**
 inductiewet van Maxwell
 130, **133**, 234
 DVvorm .. **234**, 235, 236, **243**
 influentie 93, **93**
 integraal 29
 integraalrekening **15**
 InUitvergelijking
 transformator **158**
 inwendige vectorprodukt **63**
 inwendig produkt **20**
 inwendig vectorprodukt **76**
 ionenplasma 37
- K**
 kathode **81**
 kinetische energie **82**
 knooppunten **27**
 koppel 87
 koppelfactor 128, **139**,
 142, 143, 146, 148, 150, 151
 grenzen 146
 ideale transformator 153
 Rhumkorff-transformator ..
 141, 160
 transformator 154
 kracht
 elektrisch veld
 *zie* Coulombkracht

magnetisch veld
 *zie* Lorentzkracht
 krachtmoment **87**
 krachtmoment tussen niet-
 evenwijdige stromen ... 217
 kringrichting **118**, 119
 kringstroom . *zie* cirkelstroom, 207
 kritieke stroomdichtheid **167**
 kritieke temperatuur **167**, 169
 kritieke veldsterkte **167**
 kurkretrekkerregel 118, 241

L

labiel **91**, **114**
 lading 12, **13**,
 17, 19, 26, 27, 32, 51, 74, 95
 condensatorplaat 28, 30, 31, 31
 magnetisch 55
 ladingdeel 74
 ladingsdichtheid
 .. 13, **14**, 15, 16, 54, 70, 103
 lamellering 119
 lavastroom 24
 lengte **41**
 lichtsnelheid ... 222, 230, 240, 255
 vacuüm 82, 239
 lijnlading 187
 lijnladingsdichtheid **187**
 lijnstroom **199**
 lineaire polarisatie 245
 lineair gepolariseerd **245**
 loodrecht op elkaar
 . 230, 235, 237, 238, 240, 244
 lopende golf **164**
 Lorentzkoppel . 110, 112, **112**,
 113, 116, 117, 119, 122, 123
 Lorentzkracht
 Hallveld 102
 snelheidsmeter 101
 stroomgeleider 104,
105, 106, 108, 109, 113, 214
 tussen evenwijdige stromen **214**
 vrije lading 55, **95**, 96, 97, 98, 99
 Lorentzkrachtdeel 108, 110, 111, 214
 Lorentzkrachtmoment 109
 belaste generator 123
 inductiemotor **123**
 stroomkring **112**

M

magneetveldmeter 103
 magnetische flux 116
 magnetische fluxdichtheid **22**, 102
 magnetische inductie **22**, 119
 magnetische kringspanning .. **131**
 magnetische lading **38**
 magnetische monopool **55**
 magnetische nulpotentiaalvlak **57**
 magnetische permeabiliteit ...
 . **56**, 129, 215, 251, 253, 254
 relatieve **56**,
 135, 142, 166, 239, 252, 255
 vacuüm 215
 magnetische potentiaal **56**
 magnetische uitflux **38**
 magnetische veldenergiedicht-
 heid 247
 magnetische veldsterkte .. **56**, 167
 magnetisch flux kwant **170**
 massa **82**
 materievergelijkingen **238**
 Maxwell vergelijkingen **243**
 meekoppeling **146**, 148, 153
 maximale 146, 153
 Meissnereffect **168**
 mode **260**
 modevoorwaarde **260**
 momentane hoeksnelheid **121**
 monitor 99
 multimode 261

N

N **75**
 Newton **75**
 noordpool **38**
 normale toestand **167**
 nullaststroom 128, **154**
 nulpotentiaalvlak **52**, 82
 elektrisch 60, 66
 magnetisch 56
 numerieke apertuur
 255, 256, **256**, 261

O

Ohm 43, **43**, 241
 omsloten volume **25**, 26
 omsluitend oppervlak **26**
 omvatte flux **117**, 118

omzetten .. 184, 188, 195, 203, 211
 oppervlakstroom 129, **161**
 oppervlakvector **20**, 25, 26
 oppervlakverhouding
 spoelen 141
 oscilloscoop 84

P

parallelgeleiding **45**
 parallelinductie **149**
 parallelschakeling 148, 150
 periodetijd **257**
 permittiviteit ... **53**, 230, 251, 254
 relatieve **53**, 239, 252, 255
 vacuüm **53**
 plaatlading *zie* vlaklading
 polarisatie
 elektrische 128, 181
 golf 222, 244, 245
 polarisatiefilter **245**
 polarisatierichting .. **238**, 243, 245
 polarisatievlak 222, 254
 polen **38**
 poolcoördinaten
 181, 183, **183**, 184, 185, 188
 poolschoen 38, 39
 potentiële energie **82**
 potentiaal
 bollading **67**
 dipool **182**
 elektrisch 51,
 53, 58, 59, 60, 61, 66, 66, 79
 inhomogeen veld 65
 lijnloading **189**
 magnetisch 56
 vlakkeplaten-condensator .. **59**
 vlaklading **196**
 potentiaalverschil **58**, 83
 potentiaalvlak **17**, 18, 20, 23, 24,
 32, 36, 40, 45, 46, 52, 58, 101
 bollading 35, 35, 37, 67, 79
 cilinderlading 55
 dipool 185
 elektrisch 32, 79
 elektrische dipool 186
 lijnloading 192
 magnetisch 57
 poolschoen 38

 vlakkeplaten-condensator ... 59
 Poyntingvector .. 244, *zie* ener-
 giestroomdichtheid, **248**, 249
 primaire spoel **152**
 putten **25**

Q

Quantum **13**

R

radiale versnelling **97**
 rechte stroomgeleider 199
 rechthoekcoördinaten ... 183, 185
 regenstroom 23
 relatieve permittiviteit *zie*
 diëlektrische constante,
 zie permittiviteit/relatieve
 relativistische bewegingsenergie **83**
 relativistische massa **83**
 Rhumkoff-transformator **141**
 ruimteladingsdichtheid 33

S

S **43**
 secundaire spoel **152**
 serie-inductie **147**
 serieschakeling 147, 148
 serieweerstand **44**
 Siemens 43, **43**
 signaalfrequentie **164**
 singlemode 261
 snaar 225, **226**, 227, 228
 snelheid **82**
 solenoïde
 138, 140, 142, **209**, 212, 213
 soortelijke geleiding **43**
 tabel 44
 soortelijke weerstand **43**
 tabel 44
 sorteerplaten 93
 spankracht **226**, 227, 228
 spanning 43, **58**
 effectief 123, 156
 elektrisch **77**
 geleider 49
 spanningsval **42**
 spanningsversterking
 ideale transformator **154**
 transformator belast . 156, **159**

transformator onbelast **154**, 159
 spiegelen 256, 258, 259
 spiraalvormige spoel 213
 spoed **209**
 spoel 209
 staaflading *zie* lijnlading
 stabiel **91**, **114**
 statische elektrische velden en
 statische magnetische velden **178**
 sterkte van het elektrische veld **51**
 stroom 25, 32, 38, 39
 bollading 31
 deeltjes 12
 effectief 123, 156, 211
 elektrisch 12, 17, 41, 42
 lava 24
 stroomomkeren **116**
 stroombuis **17**
 stroomdichtheid 19,
20, 22, 23, 24, 25, 26, 168
 elektrisch 42, 42,
 43, 47, 134, 162, 167, 173, 234
 stroomdraad 12,
17, 18, 57, 107, 108, 113,
 133, 134, 151, 199, 208, 209
 stroomkring
 . 107, 109–113, **114**, 115–
 117, 118, 122, 140, 151,
 204, 205, 208, 209, 215, 218
 stroomlijn .. 17, **17**, 18, 20, 45,
 46, 48, 101, 199, 200, 202, 203
 stroomsnelheid 23
 stroomsterkte **19**, 24
 elektrisch 41, 42
 stroomverdringing
 129, 161, 166, 257, 259
 stroomversterking
 transformator belast 155
 substitutie 213
 supergeleidende toestand **167**
 supergeleider 129, *zie* supergeleiding
 supergeleiding
 129, **167**, 171, 171, 173
 superpositie
 . 132, **178**, 182, 185, 188,
 190, 198, 200, 205, 210, 213
 superpositiebeginsel **179**, 194, 202

symbool voor
 elektrische flux 23
 magnetische fluxdichtheid .. 24

T

T **22**
 tangentieel **69**
 TE-mode 261
 tegenkoppel 122
 tegenkoppeling . 145, **146**, 148, 149
 maximale 146
 temperatuurstraling 249
 Tesla **22**, 103
 TM-mode 261
 totale energie **145**
 totale reflectie 258
 totale spiegeling **255**, **258**
 transformator 119, 128
 faseverdraaiing
 *zie* faseverdraaiing
 fluxverlies *zie* fluxverlies
 ideale **153**
 ijzerverliezen . *zie* ijzerverliezen
 ingangsvermogen 157
 inuit-vergelijking 158
 juk 39
 koppelfactor 153
 model 157
 nullaststroom *zie* nullaststroom
 Rhumkorff 141, 157
 spanningsversterking
 ... *zie* spanningsversterking
 stroomversterking belast .. 155
 vermogensverlies 156
 wederzijdse inductie 153
 wikkelverhouding
 *zie* wikkelverhouding
 transport **19**
 transversaal ... **230**, 234, 236,
 237, 238, 239–241, **244**, 254
 TV-buis 99
 type-II supergeleiding **170**
 type-I supergeleiding **170**

U
 uit-flux **32**
 uitstroom 25, 26, **26**, 27
 uitwendig produkt 96
 uitwendig vectorprodukt **88**

V

V **41**
 vacuümimpedantie **241**
 veerkoppel 112
 veldarbeid **77**
 veldenergie 144
 veldlijn
 bollading 35, 37, 67, 79
 breken 252
 cirkelstroom 205
 deelstroom 202, 214, 216
 elektrisch
 . **32**, 33, 34, 57, 78, 163, 251
 elektrische dipool 185, 186
 fluxkwantisatie 170
 homogeen veld 74
 ideale condensator 34
 ideale solenoïde 209
 inhomogeen veld 92
 lijnlading 192
 lijnstroom 200
 magnetisch 38,
 57, 132, 133, 162, 199, 251
 nulpotentiaalvlak 52
 poolschoen 38
 richting 22, 58, 61, 63, 66
 sorteerplaten 93, 94
 stroomdraad 131
 toroïde 210
 vlakkeplaten-condensator ... 58
 zichtbaar maken 17
 veldsterkte 52, 75
 bollading 54, 54, **54**
 cilinderlading **55**
 cirkelstroom **206**
 condensator 78
 dipool **184**
 effectief 249
 elektrisch 42, 43, 43, 49, 51,
 53, 54, 61, 74, **75**, 77–79, 80
 ideale geleider 42
 kringstroom 207
 lijnlading **191**
 lijnstroom **199**
 magnetisch 162
 magnetische 56
 solenoïde **212**
 uit potentiaal 63

vector 61
 vlakkeplaten-condensator ... 58
 vlaklading **196**
 veldsterktedeel **190**
 veldvermogensdichtheid
 elektrisch **50**
 vermogen
 effectief 156, 160
 elektrisch **49**
 spanningsbron 49
 vermogensverlies **156**
 verplaatsing
 ontbinden 65
 verplaatsingsstroom **132**, 134
 verschuifeigenschap **224**
 vervangingsgeleiding 44
 vervangingsinductie . **147**, 148, 149
 vervangingsweerstand 44
 vierkante glasvezel 261
 virtueel foton **259**
 vlakke-golf **229**
 vlakke em-golf in DV-vorm ... **243**
 vlakkeplaten-condensator
 27, **58**, 60
 elektrische flux 34
 vlaklading **194**
 vlakladingsdichtheid
 22, **194**, 195, 197
 Volt 41, **53**, 56
 volume 19, 50
 volumelading **32**

W
 Watt **49**
 Wb 23, **55**
 Weber **55**
 wederzijdse inductie 128,
 128, 136, **137**, 138, **139**,
 143, 144, 144, 145, 147, 153
 ideale transformator 153
 transformator 158
 wederzijdse inductiecoëfficiënt .
 zie wederzijdse inductie
 weerstand **43**, 46
 conisch **47**
 trapezium 48
 vlak cirkel 48
 vlak radiëel 48

- Wehnelt-cilinder 81
 wervelstromen 119
 wet van Ampère 130, 161, 164, 210
 wet van behoud van lading ...
 28, 30, 132
 wet van Biot en Savart
 201, 202, 204, 205
 vectorvorm 202
 wet van Coulomb 85, 190, 198
 wet van Gauss 251
 breking 254
 elektrisch 32, 32, 33,
 34, 53, 78, 132, 191, 197, 253
 elektrisch DVvorm ... 232, 243
 magnetisch 38
 magnetisch DVvorm 232
 wet van Joule 50
- wet van Kirchhoff .. 26, 27, 27, 28
 wet van Lenz 123, 230
 wet van Ohm ... 43, 43, 44, 45, 47
 elektrisch 163
 wikkeldichtheid 212
 wikkelverhouding
 . 141, 152, 154, 156, 158, 160
- Z**
 zelfinductie 128,
 136, 137, 138, 139, 144,
 145, 147–150, 152, 153, 157
 effectief 147, 149
 spoel 141
 zelfinductiecoëfficiënt
 zie zelfinductie
 zuidpool 38