Projecties van de globe op een recht raakvlak

Lengte en breedte op de globe

Standaard wordt de globe, geïdealiseerd gedacht als bol, getekend in een rechthoekig assenstelsel waarbij de assen als volgt worden gekozen. Vanuit het midden van de globe:

a langs de globe-draaias, richting noordpool;

b naar het snijpunt van evenaar en lengtecirkel van Greenwich;

c naar het punt op de evenaar 90 graden ten oosten van Greenwich;

Hierdoor liggen de laatste twee assen in het vlak van de evenaar; de eerste twee assen liggen in het Greenwich lengtecirkelvlak; de eerste en laatste as liggen in het gebruikelijke projectievlak voor kaarten.

Het is handiger om de volgorde van de assen aan te passen zodat de eerste twee assen het projectievlak vormen:

1 naar het oosten;

2 naar de noordpool;

3 naar de evenaar;

De coördinaten van een punt op de globe kunnen in bolcoördinaten worden gegeven. Trek eerst een *breedtecirkel (parallel* aan de evenaar*)* en een *lengtecirkel (meridiaan)* op de globe die door het punt gaan. Het vlak van de breedtecirkel is evenwijdig aan het vlak van de evenaar. Het vlak van de lengtecirkel bevat de globedraaias. De twee cirkels bepalen de volgende afstand en hoeken:

- de straal van de globe, die we 1 nemen (afstandeenheid: aardstraal);
- de hoek tussen het vlak van de lengtecirkel en het Greenwich lengtecirkelvlak genaamd de lengte en genoteerd als φ;
- de hoek tussen het evenaarvlak en de voerstraal naar het punt genaamd de breedte en genoteerd als ϑ;

Een globepunt met bolcoördinaten (φ, ϑ) komt overeen met het punt met cartesische (rechthoek)coördinaten x_1, x_2 en x_3. Een globepunt kan worden bereikt vanaf het punt op de evenaar met lengte en breedte 0, door twee rotaties: de eerste rotatie om de globedraaias 2 over de hoek φ, gevolgd door de tweede rotatie om de (meegedraaide) draaias 1 over de hoek ϑ.

Azimutale projectievlak

Bij een azimutale projectie wordt de globe afgebeeld op een raakvlak aan de globe. Neem als raakpunt een globepunt met bolcoördinaten (φ_O,ϑ_O). Dat raakpunt noemen we de *oorsprong* O ('origin'). Het raakvlak aan de bol in de oorsprong is het *projectievlak* V ('vlak'). Draai nu de standaard assen naar de oorsprong, zoals eerder is aangegeven. De drie assen krijgen dan de volgende richtingen vanuit O:

1 in het projectievlak naar het oosten;

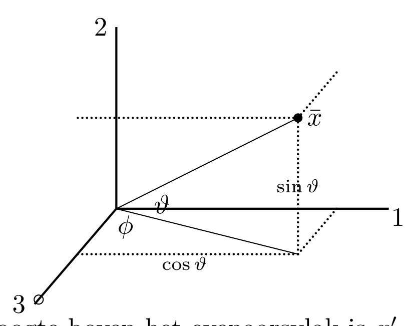
2 in het projectievlak naar het noorden;

3 loodrecht op het projectievlak;

We zoeken de coöordinaten van de projectie van het globepunt $\bar{x}$, het *projectiepunt*, in de assen bij de oorsprong.

Als tussenstap bepalen we eerst de coördinaten ten opzichte van het systeem dat alleen de draaiing om de aardas heeft gehad: de 2de as is nog steeds de aardas en de assen 3 en 1 liggen nog steeds in het evenaarsvlak. De straal naar het globepunt maakt de hoek ϑ met het evenaarsvlak. Het punt ligt dan op een hoek $\varphi - \varphi_O$ langs de evenaar; kortheidshalve noteren we in het vervolg

$$\phi = \varphi - \varphi_O \tag{1}$$



De hoogte boven het evenaarsvlak is $x'_2 = \sin\vartheta$ en de afstand tot as 2 gelijk $\cos\vartheta$. De laatste kan weer worden onbonden in de coördinaten langs as 3 (cosinus) en langs as 1 (sinus) onder de hoek ϕ. Alles bijeen is het tussenresultaat:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \cos\vartheta\sin\phi \\ x'_2 &= \sin\vartheta \\ x'_3 &= \cos\vartheta\cos\phi \end{aligned}$$

Tenslotte draaien we om as 1 de hoek ϑ_O terug met de rotatiematrix $R_1(-\vartheta_O)$ om de precieze coördinaten voor x_2 en x_3 te vinden:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_O & -\sin\vartheta_O \\ 0 & \sin\vartheta_O & \cos\vartheta_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

Met als resultaat de *rechthoekcoördinaten*:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos\vartheta \sin\phi \\ x_2 &= \cos\vartheta_O \sin\vartheta - \sin\vartheta_O \cos\vartheta \cos\phi \\ x_3 &= \sin\vartheta_O \sin\vartheta + \cos\vartheta_O \cos\vartheta \cos\phi \end{aligned} \tag{2}$$

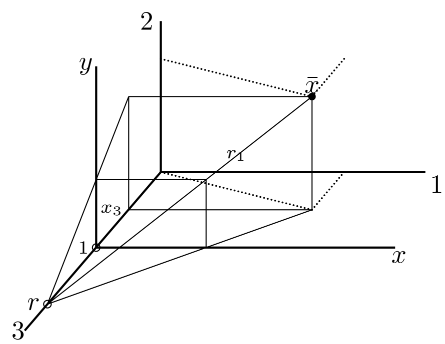
Merk op, dat als dit wordt toegepast op O, met $\phi_O = \varphi - \varphi_O = 0$, we de oorsprong in (0,0,1) vinden, omdat $\sin\phi_O = 0$ en $\cos\phi_O = 1$. Dit is het wiskundig uitgangspunt voor azimutale projecties van de globebol op het projectievlak in een als oorsprong gekozen globepunt.

Azimutale projecties

We beperken ons tot projecties vanuit een vast punt op het raakvlak aan de bol. Het projectiepunt wordt op verschillende manieren gevonden. Meestal als het snijpunt van de projectielijn met het raakvlak. We beschrijven vijf soorten azimutale projecties:

1. projectielijn loodrecht op het vlak: *orthogonaal*;
2. projectielijn vanuit een vast punt buiten de bol (de la Hire, 1673): *stereografisch*;
3. projectielijn vanuit het punt tegenover de oorsprong (Ptolemaeus, 1ste eeuw): *conform*;
4. projectielijn vanuit het midden van de bol: *gnomonisch*;
5. projectie door omcirkeling van de koorde vanuit de oorsprong: *equivalent*;
6. projectie door uitzetting van de boog vanuit de oorsprong: *equidistant*;

Deze projecties zijn te onderscheiden in twee verschillende typen, de perspectivische en de getrouwe. De orthogonale projectie kan worden gezien als een bijzonder geval van de stereografische projectie. Daartoe denken we de hoogte van het vaste punt oneindig ver weg, zodat de projectielijnen praktisch loodlijnen op het projectievlak worden. Ook de conforme en gnomonische projectie zijn bijzondere gevallen van de stereografische: het vaste punt is alleen niet buiten de bol maar er binnen. We noemen dit type azimutale projecties *perspectivisch*. Bij de equivalente projectie wordt de hoek tov de oorsprong getrouw weergegeven, en bij de equidistante projectie de afstand tov de oorsprong; daarom noemen we die twee *getrouwe* projecties.



De coördinaten van het projectiepunt (x, y) is bij alle projecties te vinden uit een herschaling van de eerste twee coördinaten van de orthogonale projectie, met als projectiepunt (x_1, x_2). De oorsprong kan worden gezien als het centrum van 'vergroting', met *vergrotingsfactor* μ, van het orthogonale projectiepunt (x_1, x_2) naar het projectiepunt (x, y) waarvoor geldt:

$$\begin{aligned} x &= \mu(\cos\vartheta \sin\phi) \\ y &= \mu(\cos\vartheta_O \sin\vartheta - \sin\vartheta_O \cos\vartheta \cos\phi) \end{aligned} \tag{3}$$

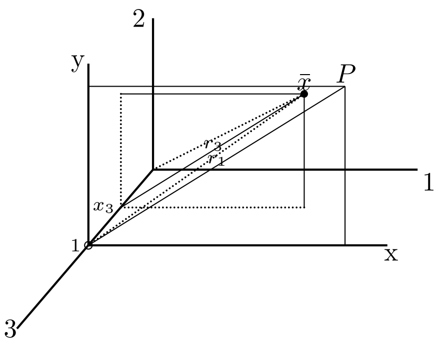
De vergrotingsfactor μ wordt bepaald door 'diepte' waarop projectiepunt ligt ten opzichte van de diepte van het globepunt (alles vanuit het vaste punt gezien). Ligt het vaste punt op een afstand r van het midden van de globe dan is de vergrotingsfactor bij de vaste punt projecties:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{(r-1)}{r - x_3} = \frac{(1-s)}{1 - s x_3} \\ x_3 &= \sin\vartheta_O \sin\vartheta + \cos\vartheta_O \cos\vartheta \cos\phi \end{aligned} \tag{4}$$

met $s = 1/r$. Bij de stereografische projectie is $1 < r < \infty$ of $0 < s < 1$. De orthogonale projectie is een stereografische projectie met $r = \infty$ of $s = 0$; wiskundig is nodig om teller en noemer in het rechterlid van de eerste vergelijking te delen door r. Verder hebben we de conforme projectie voor $r = -1$ of $s = -1$ en de gnomonische projectie voor $r = 0$ of $s = -\infty$. Het volgende overzicht geeft r, s en de vergrotingsfactor:

projectie	s	vergrotingsfactor μ
orthogonaal	0	1
stereografisch	s	$(1-s)/(1-sx_3)$
conform	-1	$2/(1+x_3)$
gnomonisch	$-\infty$	$1/x_3$
equivalent		$\sqrt{2/1+x_3}$
equidistant		$\arccos(x_3)/\sqrt{1-x_3^2}$

De vergrotingsfactoren voor de eveneens gegeven equivalente en equidistante projecties hebben een iets andere vorm dan die van de perspectivische projecties. Merk op, dat hier ingewikkelde functies nodig zijn; bij equivalent de wortel van de conforme vergrotingsfactor, bij equidistant de boogcosinus om de booglengte te bepalen. Bezie de equivalente projectie van een punt $\bar{x}$ met diepte x_3:



In de figuur zien we enkele rechthoekige driehoeken waaruit we voor de vergrotingsfactor afleiden van de getrouwe projecties:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r_3^2 + (1-x_3)^2} \\ r_3 &= \sqrt{1-x_3^2} \\ \text{equivalent} \quad \mu &= \frac{r_1}{r_3} = \sqrt{\frac{2}{1+x_3}} \\ x_3 &= \cos(\beta_3) \\ \text{equidistant} \quad \mu &= \frac{\beta_3}{r_3} = \frac{\arccos(x_3)}{r_3} \end{aligned}$$

Projectie van het gradennet

Over de globe ligt het gradennet bestaande uit breedtecirkels, evenwijdig aan de evenaar, en lengtecirkels, loodrecht op de breedtecirkels en gaande door de polen. Bezie je een cirkel vanaf een punt op de cirkelas dan zie je werkelijk een cirkel. Maar vanuit een iets andere positie zie je een ellips. De perspectiviesche projectie van een cirkel op een vlak kan dus variëren van cirkel tot ellips, maar ook een lijn, hyperbool en parabool zijn mogelijk: in het algemeen is de projectie een kegelsnede. We onderzoeken voor de perspectivische projecties van een netcirkel de algebraïsche vorm.

Breedtecirkels en lengtecirkels worden gekenmerkt door het constant zijn van breedte of lengte. Bij de breedtecirkel is dus ϑ constant en ϕ variabel. Omgekeerd is bij de lengtecirkel ϕ constant en ϑ variabel.

breedtecirkels

Eerst onderzoeken we breedtecirkels, met variabele ϕ en constante ϑ (en ϑ_O). Kenmerkend voor x_1, x_2 en x_3 is de lineairiteit in $\cos\phi$ resp $\sin\phi$, met 'constanten' a_b, e_b, d_b, s_b en c_b (onderling afhankelijk):

$$\begin{aligned} a_b &= \cos\vartheta \\ e_b = \cos\vartheta_O \sin\vartheta \quad d_b &= -\sin\vartheta_O \cos\vartheta \\ s_b = \sin\vartheta_O \sin\vartheta \quad c_b &= \cos\vartheta_O \cos\vartheta \end{aligned} \tag{5}$$

die tezamen de breedtecirkel kenmerken:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_b \sin\phi \\ x_2 &= e_b + d_b \cos\phi \\ x_3 &= s_b + c_b \cos\phi \end{aligned} \tag{6}$$

Inspectie van de vergelijkingen voor de perspectivische projecties ($|s| \leq 1$) leidt tot het volgende karakterisering van de *perspectivische projectie* van een *breedtecirkel*:

$$\begin{aligned} x &= c\frac{\sin\phi}{b + a\cos\phi} \\ y &= c\frac{e + d\cos\phi}{b + a\cos\phi} \\ a = -s\,c_b \quad b = 1 - s\,s_b &\quad c = (1-s)a_b \\ d = -\sin\vartheta_O &\quad e = \cos\vartheta_O \tan\vartheta \end{aligned} \tag{7}$$

De noemer geeft aanleiding tot kegelsneden.

Voor de *gnomonische* breedtecirkel projectie ($s = -\infty$) zijn de constanten rechtstreeks:

$$\begin{aligned} a = c_b \quad b = s_b \quad c = a_b \\ d = d_b/a_b \quad e = e_b/a_b \end{aligned} \tag{8}$$

Voor de *equivalente* breedtecirkel projectie, met de wortel in de noemer, krijgen we:

$$
\begin{aligned}
x &= c\frac{\sin\phi}{\sqrt{b+a\cos\phi}} \\
y &= c\frac{e+d\cos\phi}{\sqrt{b+a\cos\phi}} \\
a &= c_b \quad b = 1+s_b \\
c &= \cos\vartheta\sqrt{2} \\
d &= -\sin\vartheta_O \quad e = \cos\vartheta_O\tan\vartheta
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Ook hier kan (de wortel in) de noemer aanleiding geven tot kegelsneden.

lengtecirkels

Lengtecirkels zijn grote cirkels (door de polen) bij een constante lengte. Bij de lengtecirkel is ϕ constant en ϑ variabel. De coördinaten worden gekenmerkt door 'constanten' c_l, s_l, b_l, d_l, e_l, naar analogie met de constanten bij de breedtecirkels:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_l\cos\vartheta \\
x_2 &= e_l\sin\vartheta + d_l\cos\vartheta \\
x_3 &= s_l\sin\vartheta + c_l\cos\vartheta
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
b_l &= \sin\phi \\
e_l &= \cos\vartheta_O \quad d_l = -\sin\vartheta_O\cos\phi = -s_l\cos\phi \\
s_l &= \sin\vartheta_O \quad c_l = \cos\vartheta_O\cos\phi = e_l\cos\phi
\end{aligned}
\tag{11}
$$

We zien dat bijna alle coördinaten niet alleen $\cos\vartheta$ maar ook $\sin\vartheta$ bevatten. Het is echter altijd mogelijk om een lineaire combinatie van sinus en cosinus uit te drukken in alleen cosinus met een geschikt gekozen amplitude a_m en faseverschuiving ϑ_m. De fase verschoven hoek noemen we de *breedteverschilhoek* θ:

$$\theta = \vartheta - \vartheta_m$$

Zo wordt x_3:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= s_l\sin\vartheta + c_l\cos\vartheta = a_m\cos\theta \\
&\sin\vartheta_m = s_l/a_m \quad \cos\vartheta_m = c_l/a_m \\
a_m &= \sqrt{s_l^2+c_l^2} = \sqrt{1-\cos^2\vartheta_O\sin^2\phi} = \sqrt{1-a_l^2} \\
a_l &= \cos\vartheta_O\sin\phi = b_l e_l
\end{aligned}
\tag{12}
$$

In het speciale geval dat de oorsprong op de evenaar op de as van de lengtecirkel ligt met $\sin\vartheta_O = \cos\phi = 0$, is a_l=1 en zijn a_m=x_3=0; er is dan geen rotatie.

Ook de coördinaten x_1 en x_2, of combinaties daarvan, kunnen worden uitgedrukt in sinus (of cosinus) van de hoek θ. Zo leidt de lineaire combinatie met λ_1, λ_2 tot:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= (\lambda_1 b_l + \lambda_2 d_l)\cos\vartheta + \lambda_2 e_l\sin\vartheta \\
&= [(\lambda_1 b_l + \lambda_2 d_l)\cos\vartheta_m + \lambda_2 e_l\sin\vartheta_m]\cos\theta + \\
&\quad + [-(\lambda_1 b_l + \lambda_2 d_l)\sin\vartheta_m + \lambda_2 e_l\cos\vartheta_m]\sin\theta \\
&= [\lambda_1 b_l c_l + \lambda_2(d_l c_l + e_l s_l)]\cos\theta/a_m + \\
&\quad + [-\lambda_1 b_l s_l + \lambda_2(e_l c_l - d_l s_l)]\sin\theta/a_m \\
&= b_l e_l[\lambda_1 c_l/e_l + \lambda_2 b_l s_l]\cos\theta/a_m + \\
&\quad + [-\lambda_1 b_l s_l + \lambda_2 c_l/e_l]\sin\theta/a_m
\end{aligned}
$$

Alleen de cosinusterm blijft over als:

$$
\begin{gathered}
-\lambda_1 b_l s_l + \lambda_2\cos\phi = 0 \\
\lambda_1 = c_l/e_l \quad \lambda_2 = b_l s_l
\end{gathered}
$$

Alleen de sinusterm blijft over als:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 c_l/e_l + \lambda_2 b_l s_l = 0 \\
\lambda_1 = -b_l s_l \quad \lambda_2 = c_l/e_l
\end{gathered}
$$

met verwisselde λ's en $\lambda_1^2+\lambda_2^2=(c_l/e_l)^2+(b_l s_l)^2$, en dat blijkt mirakuleus gelijk aan a_m^2: $\cos^2\Phi + \sin^2\vartheta_O\sin^2\phi = 1-\cos^2\vartheta_O\sin^2\phi = 1-a_l^2$. De λ/a_m combinaties van x_1 en x_2 vormen een draaiing om as 3 over een hoek α:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= b_l s_l/a_m = \sin\vartheta_O\sin\phi/a_m \\
\cos\alpha &= c_l/e_l/a_m = \cos\phi/a_m \\
\tan\alpha &= \sin\vartheta_O\tan\phi \\
x_1' &= x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha = a_l\cos\theta \\
x_2' &= -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha = \sin\theta
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Toepassing van de faseverschuiving over hoek ϑ_m en de rotatie over hoek α leidt tot het volgende karakter van de *perspectivische projectie* van een *lengtecirkel*:

$$
\begin{aligned}
x' &= c\frac{e+d\cos\theta}{b+a\cos\theta} = c\frac{d\cos\theta}{1+a\cos\theta} \\
y' &= c\frac{\sin\theta}{b+a\cos\theta} = c\frac{\sin\theta}{1+a\cos\theta} \\
c &= (1-s) \quad d = a_l = \cos\vartheta_O\sin\phi \quad e=0 \\
a &= -s\,a_m \quad b = 1 \quad a_m = \sqrt{1-a_l^2}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

dezelfde vergelijkingen als bij de breedtecirkels, maar door de rotatie zijn de rollen van x en y verwisseld, evenals die van ϕ en θ. Er is nu slechts een enkele variabele a_l (logisch: alle lengtecirkels zijn grote cirkels, terwijl breedtecirkels allerlei grootten hebben). Dit zijn kegelsneden

als $d \neq 0$. Voor $d = a_l = 0$ is $x' = 0$, de (geroteerde) verticale lijn door de oorsprong.
Voor de *gnomonische projectie* ($s = -\infty$) van de lengtecirkel, met $\gamma = 1/x_3$, zijn de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{d\cos\theta}{a\cos\theta} = \frac{a_l}{a_m} \\ y' &= \frac{\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{a_m} \\ a &= a_m \quad b = 0 \\ c&{=}1 \quad d = a_l \quad e{=}0 \end{aligned} \tag{15}$$

(geroteerde) verticale lijnen $x'{=}a_l/a_m$, ook als $a_l \neq 0$.
Voor de *equivalente* projectie van de lengtecirkel krijgen we op vergelijkbare wijze

$$\begin{aligned} x' &= \sqrt{2}\frac{d\cos\theta}{\sqrt{a\cos\theta}} = a_l\sqrt{2/a_m}\sqrt{\cos\theta} \\ y' &= \sqrt{2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{a\cos\theta}} = \sqrt{2/a_m}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} \\ a &= a_m \quad b = 0 \\ c&{=}\sqrt{2} \quad d = a_l \quad e{=}0 \end{aligned} \tag{16}$$

normaalvorm-op-zijn-kant achtige krommen $y^2 = 1/x^2 - x^2$ met $0 \leq |x| \leq 1$, die we niet verder bespreken. Ook hier bij $a_l = 0$ is $x' = 0$: de verticale lijn door de oorsprong.

Perspectivische projectie netcirkel altijd kegelsnede

We hebben gezien dat de algemene gedaante van de perspectivische projectie van een breedtecirkel kan worden geschreven als

$$\begin{aligned} x &= c\frac{\sin\phi}{b + a\cos\phi} \\ y &= c\frac{e + d\cos\phi}{b + a\cos\phi} \\ a &= -s\,c_b \quad b = 1{-}s\,s_b \quad c = (1{-}s)a_b \\ d &= -\sin\vartheta_O \quad e = \cos\vartheta_O\tan\vartheta \end{aligned} \tag{17}$$

Omdat $-1 \leq \sin, \cos \leq +1$, wordt de noemer van x (of y) begrensd $b{-}|a| \leq b{+}a\cos\phi \leq b{+}|a|$. De vraag is of de noemer 0 kan worden. Dat hangt er van af of $|b|$ groter of kleiner is dan $|a|$; dat wordt bepaald door het teken van de *discrimant* D:

$$D = b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) \tag{18}$$

Er zijn drie mogelijkheden voor de projectie:

1. $D > 0$, $|b| > |a|$: ellips
   $b{-}a$, b en $b{+}a$ liggen aan dezelfde kant van 0, dus heeft de noemer $b{+}a\cos\phi$ het teken van b ($\neq 0$), en zijn x en y begrensd;
2. $D = 0$, $|b| = |a|$: parabool
   $b{-}a$, b en $b{+}a$ liggen aan dezelfde kant van 0, dat samenvalt met een van beide randen, zodat de noemer $b{+}a\cos\phi$ net 'raakt' aan 0, en x en y onbegrensd zijn, waarbij y eenzijdig;
3. $D < 0$, $|b| < |a|$: hyperbool
   $b{-}a$ en $b{+}a$ liggen aan verschillende kanten van 0, zodat de noemer $b{+}a\cos\phi$ 'door' 0 gaat, en x en y naar beide zijden onbegrensd zijn;

We zullen nader laten zien dat de projecties inderdaad kegelsneden zijn. Een kegelsnede is een tweedegraads vorm in x en y met een centrum en hoofdassen. Gezien de vorm van x en y zijn de hoofdassen gewoon in de richting van x en y en ligt het centrum op de y-as; dan is er een lineaire combinatie $\alpha(y{-}y_c)^2{+}\beta x^2 = \gamma$. Daartoe zoeken we een geschikte verschuiving μ in y/c:

$$\begin{aligned} (y/c - \mu) &= \frac{(e{+}d\cos\phi) - \mu(b{+}a\cos\phi)}{b{+}a\cos\phi} \\ &= \frac{(e{-}\mu b) + (d{-}\mu a)\cos\phi}{b{+}a\cos\phi} \end{aligned}$$

Het kwadraat van de teller bevat een dubbelproduct term in $\cos\phi$ die op een factor na gelijk moet worden aan de dubbelproduct term in $\gamma c^2(b{+}a\cos\phi)^2$. Dat kan, op een factor λ na, als de waarden a en b verwisseld worden:

$$\begin{aligned} (e - \mu b) &= \lambda a \\ (d - \mu a) &= \lambda b \\ \mu &= (be - ad)/D = \Upsilon/D \\ \lambda &= (bd - ae)/D = \Lambda/D \end{aligned} \tag{19}$$

De determinant van de vergelijkingen is de discriminant D. Als $D{=}0$ zijn de vergelijkingen strijdig tenzij $\Lambda{=}0$. Dan is $\lambda{=}0$ en $\mu{=}e/b{=}d/a{=}y/c$, de rechte lijn. Omgekeerd geldt dat er slechts dan een rechte lijn is als $\Lambda{=}0$. Als $D{\neq}0$ blijkt het kwadraat van de verschoven y eenvoudig van vorm:

$$\begin{aligned} (y/c - \mu) &= \lambda\frac{a + b\cos\phi}{b + a\cos\phi} \\ (\frac{a + b\cos\phi}{b + a\cos\phi})^2 &= 1 - (b^2 - a^2)\frac{1 - \cos^2\phi}{(b + a\cos\phi)^2} \\ (y/c - \mu)^2/\lambda^2 &= 1 - D(x/c)^2, \end{aligned}$$

met als tweede resultaat:
Als de discriminant $D\neq 0$, dan is de projectie van de netcirkel een *kegelsnede*, ellips of hyperbool:

$$
\begin{aligned}
D &= b^2 - a^2 \neq 0 \\
(y-c\mu)^2/(c\lambda)^2 + x^2(D/c^2) &= 1 \qquad (20)\\
(y-C_y)^2/R_y^2 + \operatorname{sign}(D)(x-C_x)^2/R_x^2 &= 1
\end{aligned}
$$

De *kegelsnede parameters* zijn $C_y=c\mu$, $R_y=c\lambda$ en $C_x=0$, $R_x=c/\sqrt{|D|}$. Voor $D>0$ hebben we de ellips (of cirkel), voor $D<0$ de hyperbool.
Gezien bovenstaande vorm ligt het centrum van de kegelsnede in $x=0$, $y=c\mu$, en de hoofdassen langs de y-as en x-as. In geval van de ellips ($\cos^2+\sin^2=1$) hebben we de *ellips parametervergelijking*:

$$
\begin{aligned}
(y-y_c)/c\lambda &= \cos u = \frac{a+b\cos\phi}{b+a\cos\phi} \\
x/c\lambda &= \sin u = \sqrt{D}\frac{\sin\phi}{b+a\cos\phi}
\end{aligned} \qquad (21)
$$

en in geval van de hyperbool ($\cosh^2-\sinh^2=1$) de *hyperbool parametervergelijking*:

$$
\begin{aligned}
(y-y_c)/c\lambda &= \cosh u = \frac{a+b\cos\phi}{b+a\cos\phi} \\
x/c\lambda &= \sinh u = \sqrt{|D|}\frac{\sin\phi}{b+a\cos\phi}
\end{aligned} \qquad (22)
$$

waarbij we zijn overgegaan op hyperbolische trignometrische functies.
Resteert $D=0$, de parabool. Vul $a=\pm b$ rechtstreeks in, en onderzoek of een lineaire combinatie van y en x^2 mogelijk is, :

$$
\begin{aligned}
x &= (c/b)\frac{\sin\phi}{1\pm\cos\phi} \quad y = (c/b)\frac{e+d\cos\phi}{1\pm\cos\phi} \\
x^2 &= (c/b)^2\frac{\sin^2\phi}{(1\pm\cos\phi)^2} = (c/b)^2\frac{1-\cos^2\phi}{(1\pm\cos\phi)^2} \\
&= (c/b)^2\frac{1\mp\cos\phi}{1\pm\cos\phi}
\end{aligned}
$$

Of te wel, zijn er een α, β zodat

$$
\begin{aligned}
y &= \alpha x^2 + \beta \\
(c/b)(e+d\cos\phi) &= \\
&= \alpha(c/b)^2(1\mp\cos\phi) + \beta(1\pm\cos\phi)
\end{aligned}
$$

Door bijvoorbeeld $\cos\phi=\mp 1$ te nemen vinden we α en β:

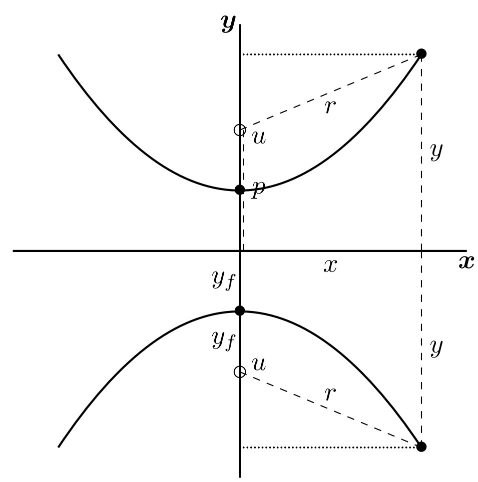
$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2}(b/c)(e\mp d) \\
\beta &= \frac{1}{2}(c/b)(e\pm d)
\end{aligned}
$$

en de x,y-paraboolvergelijking voor $a=\pm b$:

$$
y = \frac{1}{2}(b/c)(e\mp d)x^2 + \frac{1}{2}(c/b)(e\pm d) \qquad (23)
$$

Het teken van α bepaalt of het een dal-parabool of een berg-parabool is. De *parabool parameter vergelijking* is:

$$
\begin{aligned}
x/(c/b(e\mp d)) &= (e\mp d)\frac{\sin\phi}{1\pm\cos\phi} \\
(y-\beta)/\frac{1}{2}(c/b(e\mp d)) &= (e\mp d)^2\frac{(1\mp\cos\phi)}{(1\pm\cos\phi)}
\end{aligned}
$$



Uit de parabool eigenschap: “de afstand van een punt van de grafiek tot het brandpunt (straal) is gelijk aan de hoogte boven de ‘directrix ‘lijn”, volgt dat de directrix evenveel onder het dal-punt ligt als het brandpunt erboven (of bij een bergpunt juist omgekeerd); de *brandpunt afstand* $y_f=\frac{1}{2}p$ is gelijk aan de halve *perimeter* p, de afstand tussen brandpunt en directrix (x-as). De afstand tussen de parabool en het brandpunt, de straal r, is enerzijds $r=y$ (of $r=-y$ bij de topparabool), terwijl anderzijds volgens de stelling van Pythagoras, $r^2=x^2+(y-p)^2$:

$$
\begin{aligned}
(y-\frac{1}{2}p) &= \frac{1}{2}x^2/p \quad \text{dal/top} \\
x = r\sin u &= p\frac{\sin u}{1+\cos u} \\
y-p = r\cos u &= p\frac{\cos u}{1+\cos u}
\end{aligned}
$$

de *standaard paraboolvergelijking* ten opzichte van de directrix ($p>0$ of $p<0$). Uit de x-parameter vergelijking volgen perimeter p en poolhoek u (de poolas is gericht van brandpunt naar de directrix):

$$p = 1/2\alpha = (c/b)/(e\mp d)$$
$$\frac{\sin u}{1 \pm \cos u} = (e\mp d)\frac{\sin\phi}{1\pm\cos\phi}$$
$$(y-\beta)/p = \tfrac{1}{2}(x/p)^2$$

De *paraboolparameters* zijn: R_x=R_y=p=$1/2\alpha$, C_x=0, C_y=β=$\frac{1}{2}(c/b)(e\pm d) = \frac{1}{2}p(e^2-d^2)$.
Merk op de herschaling met een factor $(e\mp d)$ van projectiehoek ϕ naar poolhoek u; zie de uitwerking van het verband tussen de poolhoek u en de projectiehoek ϕ in het deel "Hoektransformaties". Daar blijkt dat bij alle kegelsneden $\tan(u/2)$ een herschaling is van $\tan(\phi/2)$.

Equivalente projectie van netcirkel soms lijn of kegelsnede.

Omdat de noemer in de equivalente projectie van de gradennetcirkel een wortel bevat, ligt het voor de hand om te zien of er toch nog een lineaire combinatie van x^2 en y^2 mogelijk is voor alle ϕ. Door vergelijken van $\cos\phi$-machten vinden we de voorwaarden waaraan de λ's en de gradennetcirkels moeten voldoen:

$$\begin{aligned}
&1 = \lambda_x x^2 + \lambda_y y^2\\
&(b + a\cos\phi) = \lambda_x c^2 \sin^2\phi + \lambda_y c^2 (e + d\cos\phi)^2\\
&\cos\text{-term} \quad \lambda_y c^2 = a/2ed\\
&\cos^2\text{-term} \quad \lambda_x c^2 = \lambda_y c^2 d^2 = ad/2e\\
&\text{constante} \quad b = \lambda_x c^2 + \lambda_y c^2 e^2 = a(e^2+d^2)/2de
\end{aligned}$$

Voor breedtecirkels is een kegelsnede oplossing mogelijk mits

$$\begin{aligned}
0 &= -2bde + a(d^2+e^2) \to \cos\vartheta_O = 0 \quad \vee\\
0 &= -2b(d\sin\vartheta) + \cos^2\vartheta(d^2 + \cos^2\vartheta_O \tan^2\vartheta)\\
&= -2b(-s_b) + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta_O + \cos^2\vartheta_O\sin^2\vartheta\\
&= 2(1+s_b)s_b + \cos^2\vartheta\sin^2\vartheta_O + \cos^2\vartheta_O\sin^2\vartheta\\
&= 2(1+s_b)s_b + \sin^2\vartheta_O - s_b^2 + \sin^2\vartheta - s_b^2\\
&= 2s_b + \sin^2\vartheta_O + \sin^2\vartheta = (\sin\vartheta + \sin\vartheta_O)^2\\
&= \sin\vartheta + \sin\vartheta_O
\end{aligned}$$

Als de oorsprong op een pool ligt ($\cos\vartheta_O$=0, $\vartheta_O = \pm\frac{1}{2}\pi$) zijn $a = e = 0$, en $d = \mp 1$, zodat $\lambda_x c^2 = \lambda_y c^2 = b = 1 \pm \sin\vartheta$: de breedtecirkels worden als cirkels afgebeeld met straal $R = \cos\vartheta\sqrt{2/(1\pm\sin\vartheta)} = \sqrt{2(1\mp\sin\vartheta)} = 2\cos((\vartheta \mp \frac{1}{2}\pi)/2)$.
Als de tegenoorsprong op de breedtecirkel ligt ($\sin\vartheta$= $-\sin\vartheta_O$, ϑ= $-\vartheta_O$), vereenvoudigen de constanten tot a=b=$\cos^2\vartheta_O$, en d=e= $-\sin\vartheta_O$, zodat $\lambda_x c^2 = \cos^2\vartheta_O/2$ en $\lambda_y c^2 = \cot^2\vartheta_O/2$. De breedtecirkel wordt als ellips rond O afgebeeld met stralen R_x=$2\cos\vartheta/\cos\vartheta_O$ en R_y=$2\cos\vartheta/|\cot\vartheta_O|$. Gelijke stralen(cirkel) treedt alleen dan op als $\sin\vartheta_O$=1, dus O op een pool.
Voor lengtecirkels zou de voorwaarde voor een kegelsnede bij equivalente projectie zijn

$$\begin{aligned}
0 &= -2bde + a(d^2+e^2) = ad^2 = a_m a_l^2\\
a_l &= 0 \vee |a_l| = 1 \quad a_l = \cos\vartheta_O \sin\Phi
\end{aligned}$$

Dat kan niet, want als $a_l = 0$ is $x' = 0$, een geroteerde verticale lijn; en met $|a_l| = 1$ zou $a_m = 0$ dus $x_3 = 0$ zijn, wat niet mag in de noemer.

Discriminant en kegelsnede bij perspectivische projectie.

breedtecirkels

De discriminant waarde $D = b^2 - a^2$ bepaalt het type kegelsnede. We zullen laten zien dat de discriminant positief is voor breedtecirkels in de perspectivische projecties, met $|s| \leq 1$—dat zijn de projecties stereografisch ($1 > s > 0$), orthogonaal ($s = 0$) en conform ($s = -1$):

$$\begin{aligned}
b + a &= 1 - s(c_b + s_b)\\
&= 1 - s(\cos\vartheta_O\cos\vartheta + \sin\vartheta_O\sin\vartheta)\\
&= 1 - s\cos(\vartheta - \vartheta_O)\\
b - a &= 1 + s(c_b - s_b)\\
&= 1 + s\cos(\vartheta + \vartheta_O)\\
D &= (1 - s\cos(\vartheta-\vartheta_O))(1 + s\cos(\vartheta+\vartheta_O))
\end{aligned}$$

Aangezien $|\cos| \leq 1$ èn $|s| \leq 1$ is $|s\cos| \leq 1$ zodat beide factoren van de discriminant niet negatief zijn en $D \geq 0$. Het randgeval $D = 0$, treedt alleen op als beide $|s| = |\cos| = 1$ zijn. Dus alleen als s=-1, de conforme projectie, en als $|\vartheta - \vartheta_O|$=$\pi$ of als $|\vartheta + \vartheta_O| = 0$. Daarvan is alleen $\vartheta = \vartheta_O$ mogelijk, maar dan gaat de breedtecirkel door de oorsprong en degenereert de projectie tot een lijn.
Tussen haakjes: het niet negatieve van D blijkt

ook uit de relatie tussen D en Λ^2:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - a^2 = (1 - ss_b)^2 - s^2 c_b^2 \\ &= 1 - 2ss_b + s^2(s_b^2 - c_b^2) \\ &= \cos^2\vartheta_O^2 + \sin^2\vartheta_O - 2ss_b + s^2(s_b^2 - c_b^2) \\ &= \cos^2\vartheta_O^2 + (s\sin\vartheta - \sin\vartheta_O)^2 + \\ &+ s^2(s_b^2 - c_b^2 - \sin^2\vartheta) \\ &= \Lambda^2 + (1 - s^2)\cos^2\vartheta_O \end{aligned}$$

immers

$$\begin{aligned} \Lambda &= bd - ae \\ &= (1 - ss_b)d - (-sc_b)e = d + s(c_b e - s_b d) \\ &= d + s(\cos^2\vartheta_O \sin\vartheta + \sin^2\vartheta_O \sin\vartheta) \\ &= s\sin\vartheta - \sin\vartheta_O \end{aligned}$$

In het bijzonder verdwijnt de verschilterm als $s = -1$, bij de *conforme* projectie, waarbij $D = \Lambda^2$ is, dus $|\Lambda| = \sqrt{D}$, waardoor $R_x = R_y = 2\cos\vartheta|\sin\vartheta + \sin\vartheta_O|$ en alle ellipsen degenereren naar cirkels.

In de *gnomonische* projectie ($s = -\infty$) zal de discriminant voor breedtecirkels iedere waarde tussen $-\cos^2\vartheta_O$ en $+\sin^2\vartheta_O$ kunnen hebben:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - a^2 = s_b^2 - c_b^2 \\ &= \sin^2\vartheta_O \sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta_O \cos^2\vartheta \\ &= -\cos^2\vartheta_O + \sin^2\vartheta \end{aligned}$$

Merk op, dat D niet verandert als het teken van ϑ of ϑ_O verandert, zodat ze slechts afhangt van de absolute waarde ervan. Het geval $D = 0$, treedt op als $|\cos\vartheta_O| = |\sin\vartheta|$, dus als $|\vartheta| = |\pi/2 - \vartheta_O|$.

We zagen hiervoor dat de *equivalente* projectie van een breedtecirkel een cirkel is, als de oorsprong op een pool ligt ($\vartheta_O = \pm\frac{1}{2}\pi$), een ellips, als de tegenoorsprong op de breedtecirkel ligt, of een lijn, als die breedtecirkel de evenaar is.

Samengevat krijgen we voor de projectie van een breedtecirkel:

alle projecties	O op pool	cirkel
perspectivisch	$s\sin\vartheta = \sin\vartheta_O$	lijn
	anders	ellips
conform	$-$O op breedtecirkel	lijn
	anders	cirkel
gnomonisch	$\lvert\vartheta\rvert > \lvert\pi/2 - \lvert\vartheta_O\rvert\rvert$	ellips
	$\lvert\vartheta\rvert = \lvert\pi/2 - \lvert\vartheta_O\rvert\rvert$	parabool
	$\lvert\vartheta\rvert < \lvert\pi/2 - \lvert\vartheta_O\rvert\rvert$	hyperbool
equivalent	$\vartheta = \vartheta_O = 0$	lijn
	$\vartheta = -\vartheta_O$	ellips

lengtecirkels

Ook lengtecirkels in perspectivische projecties ($|s| \leq 1$) blijken een positieve discriminant te hebben:

$$\begin{aligned} b = 1 \quad a &= -s\,a_m \\ D = 1 - (s\,a_m)^2 &= a_l^2 + (1 - s^2)a_l^2 \end{aligned}$$

Aangezien $|a_l| \leq 1$, is $a_m \leq 1$ en geldt opnieuw voor $|s| \leq 1$ dat $D \geq 0$, zodat alle lengtecirkels bij stereografisch-achtige projecties ellipsen worden. Het randgeval $D = 0$ doet zich voor als beide $|s| = |a_m| = 1$. Dan is $s = -1$ (conforme projectie) en $a_l = \cos\vartheta_O \sin\phi = 0$: of $|\vartheta_O| = \pi/2$ of $\phi = 0$ (of $\phi = \pi$, maar dat is dezelfde lengtecirkel). Dan is of de oorsprong op een pool ($|\vartheta_O| = \pi/2$), of de lengtecirkel gaat door de oorsprong ($\phi = 0$, $\varphi = \varphi_O$). In ieder geval degenereert de conforme projectie daar tot een lijn.

Voor de

De gnomonische projectie ($s = -\infty$) van een lengtecirkel is altijd een lijn, zagen we eerder.

Bij de equivalente projectie van een lengtecirkel krijgen we een lijn als de oorsprong op een pool ligt en anders speciale krommen.

Samengevat krijgen we voor de *projectie van een lengtecirkel*:

alle projecties	O op pool	lijn
	O op lengtecirkel	lijn
niet gnomonisch	O op evenaar $\cos\phi = 0$	cirkel
gnomonisch		lijn
perspectivisch	anders	ellips

Wanneer degeneratie?

Een ellips, parabool of hyperbool kan de gedaante aannemen van een lijn als een van de stralen nul wordt. Als de stralen van een ellips gelijk worden hebben we een cirkel, zoals bij de conforme projectie. We onderzoeken de degeneratie zo mogelijk direkt vanuit de basisvergelijkingen.

breedtecirkel als lijn

Een breedtecirkel wordt een horizontale lijn als $y = \mu(x_3)x_2$ constant wordt. De eerste mogelijkheid doet zich voor als $x_2 = 0$ voor alle ϕ:

$$\begin{aligned} x_2 &= e_b + d_b \cos\phi = 0 \\ e_b &= 0 \wedge d_b = -\sin\vartheta_O \cos\vartheta = 0 \\ \cos\vartheta_O \sin\vartheta &= 0 \wedge \sin\vartheta_O \cos\vartheta = 0 \\ \sin\vartheta_O &= 0 \wedge \sin\vartheta = 0 \end{aligned}$$

dus: de oorsprong ligt op de evenaar en de breedtecirkel is de evenaar. De tweede mogelijkheid, dat x_2 èn x_3 tegelijk constant worden doordat de variabele (cosinus)termen in x_2 èn x_3 tegelijk zouden verdwijnen, blijkt niet mogelijk omdat er geen breedtecirkel is op de polen.

$$\begin{aligned} & x_2 = e_b + d_b \cos\phi \quad x_3 = s_b + c_b \cos\phi \\ & d_b = -\sin\vartheta_O \cos\vartheta = 0 \wedge c_b = \cos\vartheta_O \cos\vartheta = 0 \\ & \cos\vartheta = 0 \end{aligned}$$

De derde mogelijkheid, dat de cosinusterm in x_2 wegdeelt tegen een deel van de vergrotingsfactor $\mu(x_3)$, doet zich voor bij de meeste perspectivische projecties. Uitdelen betekent daar:

$$\begin{aligned} y &= c\frac{e + d\cos\phi}{b + a\cos\phi} = c\frac{e}{b} = c\frac{d}{a} \\ c &= 0 \vee \frac{e}{b} = \frac{d}{a} \\ \Lambda &= bd - ae = s\sin\vartheta - \sin\vartheta_O = 0 \\ (\cos\vartheta &= 0) \vee (s\sin\vartheta = \sin\vartheta_O) \end{aligned}$$

Specificerend: bij de orthogonale projectie ($s = 0$) ligt de oorsprong op de evenaar en iedere breedtecirkel wordt een lijn; bij de stereografische projectie ($0 < s < 1$) ligt het vaste punt O van de waarnemer in het vlak van de breedtecirkel;bij de conforme projectie ($s{=}-1$), ligt de tegenoorsprong $-O$ op de breedtecirkel. Bij de gnomonische projectie ($s = -\infty$) kan niet aan de voorwaarde voor delen worden voldaan: $\cos\vartheta_O \tan\vartheta / \sin\vartheta_O \sin\vartheta = -\sin\vartheta_O / \cos\vartheta_O \cos\vartheta$ of $\tan^2\vartheta_O = -1$.
Samengevat: De projectie van een breedtecirkel is een (horizontale) lijn als:

iedere projectie	O op breedtecirkel = evenaar
orthogonaal	O op evenaar
stereografisch	O in vlak van breedtecirkel
conform	−O op breedtecirkel

lengtecirkel als lijn

We zagen eerder dat de gnomonische projectie van lengtecirkels lijnen worden, en wel geroteerde verticale lijnen door de oorsprong bepaald door $x/y = x'_1/x'_2 = a_l = \cos\vartheta_O \sin\phi$. Bij alle projecties wordt een lengtecirkel een (geroteerde) verticale lijn als $x = \mu(x_3)x'_1$ constant wordt. De eerste mogelijkheid daartoe is dat x'_1 verdwijnt:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_l \cos\theta = 0 \quad a_l = \cos\vartheta_O \sin\phi = 0 \\ \cos\vartheta_O &= 0 \vee \sin\phi = 0 \end{aligned}$$

Dat is: de oorsprong ligt op een pool ($|\vartheta_O| = \pi/2$) of de oorsprong ligt op de lengtecirkel ($\phi = 0 \vee \phi = \pi$). De mogelijkheid dat x'_2 constant wordt doet zich niet voor.
Samengevat: de projectie van een lengtecirkel is een scheve (verticale) lijn als:

iedere projectie	O op pool
	O op lengtecirkel
gnomonisch	altijd

breedtecirkel als cirkel

We merken op, dat de projectie van een cirkel weer een cirkel is als het vaste punt van de projectie op de as van die cirkel ligt en het projectievlak evenwijdig aan het cirkelvlak is. De as van een breedtecirkel is de poolas, de as van een lengtecirkel ligt in het vlak van de evenaar. Bij een lengtecirkel moet de oorsprong op de lengtecirkel liggen op de evenaar. Bij de breedtecirkel is voldoende dat de oorsprong op een pool ligt. Dan geldt voor een punt van de breedtecirkel $c_b = \cos\vartheta_O \cos\vartheta = 0$, dus $x_3 = s_b + c_b \cos\phi = s_b = \sin\vartheta_O \sin\vartheta = \pm\sin\vartheta$. Verder is $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = 1 - s_b^2 = \cos^2\vartheta$, dus de straal van de projectiecirkel is $R = |\mu(\sin\vartheta)\cos\vartheta|$, waarbij μ afhangt van het type projectie.
Bij de conforme projectie zagen we eerder dat ongeacht de positie van de oorsprong de projectie van ongeacht welke cirkel een cirkel is. Omgekeerd degenereert een ellips tot cirkel als $R_x{=}R_y$, dus als $\Lambda{=}\sqrt{D}$. Dat laatste gebeurt als $(1-s^2)\cos\vartheta_O{=}0$. Maar dat zijn juist de zojuist beschreven situaties.
Samengevat: de projectie van een breedtecirkel is een cirkel als:

iedere projectie	O op pool
conform	altijd

lengtecirkel als cirkel

De projectie van een lengtecirkel is een cirkel als de oorsprong op de as van de lengtecirkel ligt, dus op de evenaar. Dan is $\vartheta_O = 0$ en $\phi = \pi/2$. Bijgevolg geldt voor punten van de lengtecirkel

$d = a_l = \sin\phi\cos\vartheta_O = 1$, $a = a_m = 0$ en $x_3 = 0$. Verder is $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = 1$, dus de straal van de projectiecirkel $R = \mu(0)$ constant, maar afhankelijk van het type projectie.
Samengevat: de projectie van een lengtecirkel is een cirkel als:

$$\text{iedere projectie} \quad \text{O op as lengtecirkel dus evenaar}$$

Parameters voor kegelsneden

We bepalen eerst de parameters λ en μ van de kegelsnede voor $D \neq 0$ voor breedtecirkels en-lengtecirkels. Daarna bepalen we de parameters van de parabool voor $D = 0$, beide voor breedtecirkels onder de gnomonische projectie.

breedtecirkel als ellips

Verder uitwerken van de factoren voor *perspectivische projecties*($|s| \leq 1$) van breedtecirkels, geeft:

$$\begin{aligned}
D &= (1 - s\cos(\vartheta - \vartheta_O))(1 + s\cos(\vartheta + \vartheta_O)) \\
\Lambda &= bd - ae \\
&= -(1 - s\,s_b)\sin\vartheta_O + s\,c_b\cos\vartheta_O\tan\vartheta \\
&= -\sin\vartheta_O + s\sin^2\vartheta_O\sin\vartheta + s\cos^2\vartheta_O\sin\vartheta \\
&= s\sin\vartheta - \sin\vartheta_O
\end{aligned}$$

en analoog

$$\Upsilon = be - ad = (\sin\vartheta - s\sin\vartheta_O)\cos\vartheta_O/\cos\vartheta$$

Beide Λ en $\Upsilon' = \Upsilon\cos\vartheta/\cos\vartheta_O$ zijn lineair is s: bij $s = -1$ tegengesteld ($\mp(\sin\vartheta + \sin\vartheta_O)$) en bij $s = +1$ gelijk ($\sin\vartheta - \sin\vartheta_O$). De tekenwisseling vindt dan plaats bij de nuldoorgang $s = \sin\vartheta/\sin\vartheta_O$ of de omgekeerde.
De breedtecirkel ellips parameters worden daarmee:

$$\begin{aligned}
R_x &= (1 - s)\cos\vartheta/\sqrt{D} \\
R_y &= -(1 - s)\cos\vartheta(\sin\vartheta_O - s\sin\vartheta)/D \\
C_y &= (1 - s)\cos\vartheta_O(\sin\vartheta - s\sin\vartheta_O)/D
\end{aligned} \tag{24}$$

Merk op, dat $(R_y/R_x)^2 = \Lambda^2/D \leq 1$ is, omdat $D \geq \Lambda^2$, zodat de grootste as in de x-richting is.
Bij de *conforme projectie* ($s = -1$) doet zich nog iets bijzonders voor. Dan blijkt dat de discriminant een perfect kwadraat is:

$$D = \Lambda^2 = (\sin\vartheta + \sin\vartheta_O)^2$$

zodat de ellips parameters kunnen worden vereenvoudigd tot cirkel parameters:

$$\begin{aligned}
R_x &= |R_y| = 2\cos\vartheta/|\sin\vartheta + \sin\vartheta_O| \\
C_y &= 2\cos\vartheta_O/(\sin\vartheta + \sin\vartheta_O)
\end{aligned} \tag{25}$$

Bij de *gnomonische projectie* ($s = -\infty$) van de breedtecirkels worden de ellips parameters :

$$\begin{aligned}
\Lambda &= bd - ae = -\sin\vartheta \\
\Upsilon &= be - ad = \sin\vartheta_O\cos\vartheta_O/\cos\vartheta
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
R_x &= \mathrm{sign}(b)\cos\vartheta/\sqrt{D} \\
R_y &= \sin\vartheta\cos\vartheta/D \\
C_y &= \sin\vartheta_O\cos\vartheta_O/D
\end{aligned} \tag{27}$$

breedtecirkel als hyperbool

We bepalen de hyperbool parameters onder de voorwaarde $D < 0$, waaraan alleen voldaan kan worden door de *gnomonische projectie* ($s = -\infty$) van breedtecirkels. Alle breedtecirkels waarvan $|\vartheta| \pm |\vartheta_O| < \pm\pi/2$ worden geprojecteerd als hyperbool. De bepaling van de parameters gaat analoog aan die van de ellips parameters, rekening houdend met het extra minteken bij γ. De hyperbool parameters voor breedtecirkels worden:

$$\begin{aligned}
D &= -\cos(\vartheta - \vartheta_O)\cos(\vartheta + \vartheta_O) \\
R_x &= \cos\vartheta/\sqrt{-D} \\
R_y &= -\sin\vartheta\cos\vartheta/(-D) \\
C_y &= -\sin\vartheta_O\cos\vartheta_O/(-D)
\end{aligned} \tag{28}$$

breedtecirkel als parabool

De parabool parameters worden bepaald onder de voorwaarde $D = 0$. Dat bleek alleen bij de gnomonische projectie ($s = -\infty$) van breedtecirkels voor te komen. Dan zijn van belang:

$$\begin{aligned}
c/b &= \cos\vartheta/\sin\vartheta_O\sin\vartheta \\
e + d &= \sin(\vartheta - \vartheta_O)/\cos\vartheta \\
e - d &= \sin(\vartheta + \vartheta_O)/\cos\vartheta \\
a - b &= \cos(\vartheta + \vartheta_O) \\
a + b &= \cos(\vartheta - \vartheta_O)
\end{aligned}$$

In geval $a = b$, is $\vartheta = \pm\pi/2 - \vartheta_O$ waardoor:

$$\begin{aligned}
c/b &= \pm 1/\cos\vartheta_O \\
e - d &= 1/\sin\vartheta_O \\
e + d &= \cos(2\vartheta_O)/\sin\vartheta_O
\end{aligned}$$

met parameters:

$$\begin{aligned} Rx = Ry = (c/b)/(e-d) = p = \pm\tan\vartheta_O \\ C_y = \frac{1}{2}(c/b)(e+d) = \pm\cot(2\vartheta_O) \end{aligned} \tag{29}$$

In geval $a = -b$, is $\vartheta = \pm\pi/2 + \vartheta_O$. Dat wordt bereikt door de eenvoudige verwisseling $\vartheta_O \to -\vartheta_O$. De parameter waarden worden daardoor tegengesteld: de parabool komt 'op zijn kop'.

lengtecirkel als ellips

Bij de *perspectivische projecties* ($|s| \le 1$) van lengtecirkels worden de benodigde factoren:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - a^2 = 1 - (s\,a_m)^2 \\ \Lambda &= ae - bd = -d = -a_l \\ \Upsilon &= be - ad = -ad = s\,a_m a_l \end{aligned}$$

Daarmee kunnen de lengtecirkel ellips parameters worden uitgedrukt:

$$\begin{aligned} R_y &= (1-s)/\sqrt{D} \\ R_x &= (1-s)a_l/D \\ C_x &= (1-s)s\,a_m a_l/D \quad C_y = 0 \\ \cos\alpha &= \frac{\cos\phi}{a_m} \quad \sin\alpha = \frac{\sin\phi\sin\vartheta_O}{a_m} \end{aligned} \tag{30}$$

De rotatiehoek $\alpha = 0$ als $a_m = 0$. Ook hier is bij de *conforme projectie* ($s = -1$) de discriminant een perfect kwadraat: $D - \Lambda^2 = (1-s^2)a_m^2 = 0$, zodat $D = \Lambda^2 = a_l^2$. De ellips parameters vereenvoudigen daarbij tot cirkel parameters:

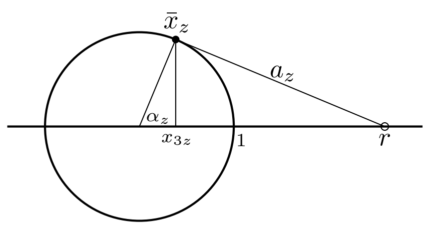
$$\begin{aligned} R_y = 2/|a_l| \quad R_x = -2/a_l \\ C_x = 2\,a_m/a_l \quad C_y = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Zichtbaarheid

Niet ieder punt van de globe is zichtbaar voor een waarnemer. Welke punten zichtbaar zijn hangt af van de projectiemethode. Bij de orthogonale projectie is eenvoudig te zien dat maximaal de helft van de globe zichtbaar is: de helft die naar de waarnemer is gekeerd. Wiskundig geformuleerd: Een punt op de globe is bij orthogonale projectie *buitenzicht* als $x_3 < 0$ en in zicht als $x_3 \ge 0$. De *uiterst zichtbare coördinaat*, notatie x_{3z}, is de kleinste coördinaat die zichtbaar is. Vanaf het midden van de globe gezien zijn alle punten van de globe zichtbaar die binnen een hoek ϕ_z liggen ten op zichte van de as naar de waarnemer. We kunnen de zichtbaarheid verder beperken door de zichtbare rand onder een kleinere hoek $\phi_r \le \phi_z$ te nemen met bijbehorende *randcoördinaat* x_{3r} zodat $x_{3r} = \cos\phi_r$ en $x_{3r} \ge x_{3z}$. Bij de orthogonale projectie is $\phi_z = \pi/2$ (90 graden) dus $x_{3z} = 0$.

globepunt

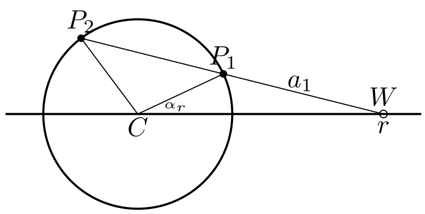
Wat is de kleinste coördinaat die zichtbaar is bij projectie van een globepunt? Bij de stereografische projectie zit de denkbeeldige waarnemer op een 'hoogte' r, waardoor nog niet de halve bol zichtbaar is. Het zichtbare deel van de bol heeft een minimale waarde x_{3z}. Welke waarde dat is volgt uit de tekening, waarbij zulk een punt is getekend in het gemeenschappelijke vlak, met oorsprong bij 1 en waarnemer bij r.



Uit de evenredigheid van de staande kleine rechthoek en de liggende grote rechthoek volgt: $x_{3z} : 1 = 1 : r$, waarbij $x_{3z} = 1/r = s = \cos\alpha_z$. Voor de afstand van waarnemer tot het verst zichtbare punt geldt $a_z^2 = r^2 - 1 = r^2(1-s^2)$. Een punt van de globe is *onzichtbaar bij stereografische projectie* als $x_3 < x_{3z} = s$ is. Door invullen van $s = 0$ voor de orthogonale projectie vinden we terug $x_{3z} = 0$. Evenzo is bij de conforme projectie $x_{3z} = -1$. De gnomonische projectie, die projecteert vanuit het midden van de globe op het raakvlak heeft uiteraard een minimale zichtcoördinaat van $x_{3z} = 0$. Aan de andere kant kunnen alle punten van de globe worden geprojecteerd op het raakvlak bij de equivalente en equidistante projecties, zodat daar $x_{3z} = -1$. De *uiterst zichtbare coördinaat* is:

projectie	x_{3z}	ϕ_z
stereografisch	s	$\arccos s$
orthogonaal	0	$\pi/2$
gnomonisch	0	$\pi/2$
conform	-1	π
equivalent	-1	π
equidistant	-1	π

Meer in het algemeen kunnen we de projectie beperken door een randcoördinaat binnen de zichtbaarheid aan te geven met een randhoek α_r. Vanuit de waarnemer gezien zijn er twee punten van de bol die, in perspectief, het zelfde randpunt geven: P_1 en P_2. Het dichtstbijzijnde randpunt P_1 wordt bepaald door de randhoek: $P_1 = (\cos\alpha_r, \sin\alpha_r)$, met $x_{3r} = \cos\alpha_r$. Het tweede punt P_2 is een vergroting van P_1.



Voor de afstanden van de waarnemer tot de randpunten geldt, volgens de machtstelling van een punt ten opzichte van een cirkel, dat $a_1 a_2 = a_z^2 = (r-1)(r+1) = r^2-1$. De vergrotingsfactor van P_1 naar P_2 is gelijk aan $a_2/a_1 = a_1 a_2/a_1^2 = a_z^2/a_1^2$. Volgens de cosinusregel in (drie)hoek WCP_1 is $a_1^2 = r^2 + 1 - 2r\cos\alpha_1$ met $\alpha_1 = \alpha_r$, en $\cos\alpha_1 = x_{3r}$, zodat de vergrotingsfactor kan worden uitgedrukt in r en x_{3r}. Daarmee is dus P_2 te bepalen:

$$\begin{aligned}
(P_2 - W) &= (a_2/a_1)(P_1 - W) \\
a_2/a_1 &= (r^2-1)/(r^2+1-2rx_{3r}) \\
y_2 &= \frac{(r^2-1)}{r^2+1-2rx_{3r}} y_1 \\
x_2 - r &= (r^2-1)/(r^2+1-2rx_{3r})(x_{3r}-r) \\
x_2 &= \frac{2r-(r^2+1)x_{3r}}{(r^2+1)-2rx_{3r}}
\end{aligned}$$

netcirkel

Uitgaande van de randcoördinaat kunnen we voor breedtecirkels en lengtecirkels bepalen bij welke ellipshoek(en) u_r de zichtbaarheid verdwijnt. Immers $x_{3z} \le x_{3r} \le x_3$. Voor breedtecirkels geldt:

$$\begin{aligned}
x_3 = s_b + c_b\cos\phi &\ge x_{3r} \\
x_{3r} &\le s_b + c_b\cos\phi
\end{aligned}$$

In het bijzonder blijft een breedtecirkel geheel buitenzicht (geen ϕ mogelijk) als het linkerlid boven het maximum van het rechterlid is:

$$\begin{aligned}
x_{3r} &> s_b + |c_b| \\
\cos\phi_r &> \cos(\vartheta - \pm\vartheta_O) \\
|\phi_r| &< |\vartheta - \pm\vartheta_O|
\end{aligned}$$

waar $\pm$ het teken van c_b is. De breedtecirkel is daarentegen geheel binnenzicht als voor alle ϕ het omgekeerde geldt:

$$\begin{aligned}
x_{3r} &\le s_b - |c_b| \\
\cos\phi_r &\le -\cos(\vartheta + \pm\vartheta_O) \\
|\phi_r| &\ge \pi - |\vartheta + \pm\vartheta_O|
\end{aligned}$$

Bij de lengtecirkel geldt voor de parameters

$$\begin{aligned}
x_3 = a_m\cos\theta \ge x_{3r} &= \cos\theta_r \\
\cos\theta \ge x_{3r}/a_m &= \cos\theta_r/a_m
\end{aligned}$$

In het bijzonder is een lengtecirkel geheel buitenzicht als

$$\begin{aligned}
a_m &< x_{3r} \\
\sqrt{1-a_l^2} &< \cos\theta_r
\end{aligned}$$

De lengtecirkel is geheel binnenzicht als

$$-a_m \ge x_{3r}$$

Grote cirkel door een punt

Hoe is een grote cirkel te beschrijven die door een gegeven punt P_1 gaat (zeg de oorsprong $P_1 = O$)? In principe wordt de grote cirkel bepaald door zijn as, die door het midden van de bol gaat en loodrecht op de straal naar P_1 staat. Het vlak loodrecht op die as, dat dus P_1 bevat, is het vlak van de grote cirkel door P_1. De drie coördinaten assen die hierbij horen zijn dus:

1. e_1 in de richting van de raaklijn in P_1
2. e_2 in de richting van de grotecirkeldraaias
3. e_3 in de richting van P_1

Een punt P van de grote cirkel kan dan worden beschreven door uit te gaan van $P_1 = e_3$ en te draaien over de draaihoek t rond de groetcirkeldraaias. Een punt van de grotecirkel is:

$$P = e_3\cos t + e_1\sin t$$

De 3 coördinatenassen zijn eenvoudig uit te drukken in de standaard assen met behulp van de bolcoördinaten van het startpunt P_1. De assen worden verkregen uit de standaardassen in drie stappen, waarbij de grotecirkel evenaar overgaat in de gevraagde grote cirkel. Eerst draaien we om de aardas over de hoek φ_1 om onder het punt P_1 te komen:

$$\begin{aligned}
e_1' &= (\ \cos\varphi_1\ , 0,\ -\sin\varphi_1) \\
e_2' &= (\ 0\ , 1,\ 0) \\
e_3' &= (\ \sin\varphi_1\ , 0,\ \cos\varphi_1)
\end{aligned}$$

Natuurlijk vereenvoudigt de formulering sterk door alles verder te beschrijven vanaf deze rotatie, maw door over te gaan op de relatieve hoek $\phi = \varphi - \varphi_1$. We doen dat vanaf hier. Vervolgens draaien om de eerste as (oosten) over de hoek ϑ_1:

$$\begin{aligned} e_1'' &= (1, 0, 0) \\ e_2'' &= (0, \cos\vartheta_1, -\sin\vartheta_1) \\ e_3 &= (0, \sin\vartheta_1, \cos\vartheta_1) \end{aligned}$$

Het gedraaide evenaarsvlak gaat nu door het punt P_1, maar loopt daar evenwijdig aan de evenaar in de richting e_1''. Neem aan dat de hoek tussen de raaklijn e_1 en de evenaarsrichting e_1'' gelijk is aan α. Draai nu om de derde as (P_1) over de hoek α om de evenaar langs de raaklijn te krijgen:

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1'' \cos\alpha + e_2'' \sin\alpha \\ &= (\cos\alpha, \cos\vartheta_1 \sin\alpha, -\sin\vartheta_1 \sin\alpha) \\ e_2 &= -e_1'' \sin\alpha + e_2'' \cos\alpha \\ &= (-\sin\alpha, \cos\vartheta_1 \cos\alpha, -\sin\vartheta_1 \cos\alpha) \end{aligned}$$

De grotecirkel door het punt $P_1 = e_3$ is vastgelegd door de richting α die de raaklijn aan de grotecirkel e_1 daar maakt met as e_1''. Alternatief kan de grotecirkel worden bepaald door een tweede punt P_2 te geven waar de grotecirkel doorgaat. Nemen we aan dat het tweede punt in de positieve richting van de grotecirkel ligt met draaihoek gelijk aan de *booghoek* β:

$$\begin{aligned} P_2 &= e_3 \cos\beta + e_1 \sin\beta \\ &= (\cos\alpha \sin\beta, \cos\vartheta_1 \sin\alpha \sin\beta, \\ &\qquad \cos\vartheta_1 \cos\beta - \sin\vartheta_1 \sin\alpha \sin\beta) \\ &= (\cos\vartheta_2 \sin\phi_2, \sin\vartheta_2, \cos\vartheta_2 \cos\phi_2) \end{aligned}$$

Merk op, dat de booghoek β rechtstreeks uit het inproduct van P_1 en P_2 volgt:

$$\begin{aligned} \cos\beta = P_1 \cdot P_2 &= (0, \sin\vartheta_1, \cos\vartheta_1) \cdot \\ &\quad (\cos\vartheta_2 \sin\phi_2, \sin\vartheta_2, \cos\vartheta_2 \cos\phi_2) \\ &= \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\phi_2 \end{aligned}$$

Hoektransformaties

Inleiding

Bij de transformatie van de geprojecteerde bolcoördinaten (ϕ) naar de standaardvorm in poolcoördinaten speelt de hoek u een belangrijke rol. Ze werd in essentie gevonden door uitdrukkingen voor $\sin u$ ($\sinh u$) of $\cos u$ ($\cosh u$) in $\sin\phi$ en $\cos\phi$. We zullen nu laten zien dat de verhouding van $\tan(u/2)$ (of $\tanh(u/2)$) en $\tan(\phi/2)$ een constante is, gelijk aan de wortel van *parameter* γ. Voor ellips of hyperbool:

$$\gamma = \frac{b-a}{b+a} = \frac{D}{(b+a)^2} \qquad \sqrt{|\gamma|} = \frac{\sqrt{|D|}}{|b+a|} \tag{32}$$

Merk op, dat de tekens van γ en D gelijk zijn. In geval van de parabool is γ afhankelijk van het teken van a

$$\begin{aligned} \gamma &= e - d \quad \text{als } a = b \\ \gamma &= e + d \quad \text{als } a = -b \end{aligned} \tag{33}$$

Bij de afleiding van de hoektransformatie gaan we uit van de eigenschap dat sinus en cosinus kunnen worden uitgedrukt in de tangens $t = \tan(\phi/2)$ van de halve hoek, en vergelijkbaar voor de hyperbolische functies:

$$\begin{aligned} \sin\phi &= 2t/(1+t^2) \\ \cos\phi &= (1-t^2)/(1+t^2) \\ \sinh\phi &= 2t/(1-t^2) \\ \cosh\phi &= (1+t^2)/(1-t^2) \end{aligned}$$

Omgekeerd is dan:

$$\begin{aligned} \tan(\phi/2) &= \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi} \\ \tanh(\phi/2) &= \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi - 1} \end{aligned}$$

ellips

De relaties gevonden voor u zijn:

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{a + b\cos\phi}{b + a\cos\phi} \\ \sin u &= \sqrt{D}\frac{\sin\phi}{b + a\cos\phi} \end{aligned} \tag{34}$$

Overgaande op $t = t_\phi = \tan(\phi/2)$:

$$\begin{aligned}
\cos u &= \frac{a(1+t^2)+b(1-t^2)}{b(1+t^2)+a(1-t^2)} \\
&= \frac{(a+b)-(b-a)t^2}{(a+b)+(b-a)t^2} \\
&= \frac{1-\gamma t^2}{1+\gamma t^2} = \frac{1-(\sqrt{\gamma}t)^2}{1+(\sqrt{\gamma}t)^2} \\
\sin u &= \sqrt{D}\frac{2t}{b(1+t^2)+a(1-t^2)} \qquad (35) \\
&= \sqrt{\gamma}\frac{2(a+b)t}{(a+b)+(b-a)t^2} \\
&= \sqrt{\gamma}\frac{2t}{1+\gamma t^2} \\
&= \frac{2\sqrt{\gamma}t}{1+(\sqrt{\gamma}t)^2}
\end{aligned}$$

volgt voor tangens $t_u = \tan(u/2)$:

$$t_u = \sqrt{\gamma} t_\phi \qquad (36)$$

hyperbool

Voor $D < 0$ zijn de relaties gevonden voor u vergelijkbaar aan die van de ellips, maar voor u zijn de goniometrische functies vervangen door de hyperbolische:

$$\begin{aligned}
\cosh u &= \frac{a+b\cos\phi}{b+a\cos\phi} \\
\sinh u &= \sqrt{|D|}\frac{\sin\phi}{b+a\cos\phi}
\end{aligned} \qquad (37)$$

Met $D < 0$ is $\gamma = (b-a)/(b+a) < 0$, of $\gamma = -|\gamma|$. Vergeleken met de ellips krijgen we nu tekenwisselingen:

$$\begin{aligned}
\cosh u &= \frac{1-\gamma t^2}{1+\gamma t^2} \\
&= \frac{1+(\sqrt{|\gamma|}t)^2}{1-(\sqrt{|\gamma|}t)^2} \\
\sinh u &= \sqrt{|\gamma|}\frac{2t}{1+\gamma t^2} \\
&= \frac{2\sqrt{|\gamma|}t}{1-(\sqrt{|\gamma|}t)^2}
\end{aligned}$$

Als de herschaalde t klein is: $\sqrt{|\gamma|}t \leq 1$ kunnen we die zien als tanh, en dus als $t_u = \tanh(u/2)$:

$$t_u = \frac{\sinh u}{1+\cosh u} = \sqrt{|\gamma|} t_\phi \qquad (38)$$

Is echter $\sqrt{|\gamma|}t > 1$, dan kunnen we haar zien als coth, en dus als $1/t_u = \coth(u/2)$:

$$1/t_u = \frac{\sinh u}{1+\cosh u} = \sqrt{|\gamma|} t_\phi \qquad (39)$$

parabool

Voor D=0 is de transformatie het eenvoudigst te vinden. We zagen al eerder hoe de projectie was uitgedrukt in enerzijds de bolcoördinaat Φ en anderzijds de poolhoek u.

$$\frac{\sin u}{1 \pm \cos u} = (e \mp d)\frac{\sin\phi}{1 \pm \cos\phi}$$

Allereerst merken we op, dat de 'bovenste' vergelijking, voor $a = b$, overgaat in de onderste vergelijking, voor $a = -b$, door spiegeling in de x-as, mits e gelijk blijft en d van teken wisselt. Feitelijk gaan ϕ en u over in het complement $\pi - \phi$, $\pi - u$, en dus de halve hoeken $\phi/2$ en $u/2$ over in het complement $\pi/2 - \phi/2$, $\pi/2 - u/2$, waardoor tan overgaat in de omgekeerde. We beschrijven daarom alleen het geval $a = b$.
De goniometrische vormen voor zowel u als ϕ zijn gelijk aan de tangens halve hoek, zodat de gewenste hoektransformatie direct volgt:

$$\begin{aligned}
\tan(u/2) &= (e-d)\tan(\phi/2) \\
t_u &= \gamma t \quad \gamma^2 = e - d
\end{aligned}$$

C.M.Fortuin
van Deldenpad 8
6862DC Oosterbeek NL
fortuinc@xs4all.nl
eerste versie 2004/laatste versie oktober 2020