

KEGELSNEDEN BENADEREN

Samenvatting Kegelsneden kunnen systematisch worden benaderd door hoekpunten van een (deel van een) omgeschreven veelhoek. Een algoritme wordt ontwikkeld voor het bepalen van de steunpunten van een iteratieve derdegraads 'Bézier' benadering van kegelsneden. Voor de start zijn drie punten nodig. Het algoritme is onafhankelijk van de stand van de kegelsnede.

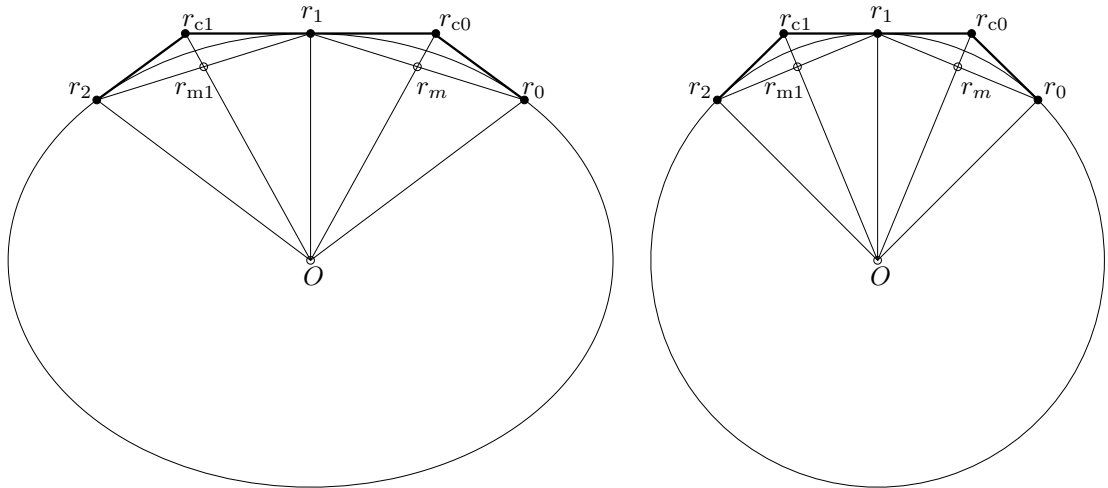
Inleiding

We stellen ons de vraag hoe een cirkel, meer algemeen een ellips, en nog algemener een kegelsnede, op het scherm, of op een printer, te tekenen. Daarvoor moeten vele punten worden berekend. Als steunpunten voor de berekening gebruiken we hoekpunten van een ingeschreven veelhoek en hoekpunten van een omgeschreven veelhoek. Het idee om cirkels te benaderen met veelhoeken komt oorspronkelijk van de oude Grieken. Archimedes heeft rond het jaar 240 voor Christus de waarde van het getal π benaderd met behulp van in- en omgeschreven veelhoeken van de cirkel, en bewees dat $310/71 < \pi < 31/7$ ($3,1408 < \pi \approx 3,1416 < 3,1429$). Hij gebruikte de twaalfhoek, en via verdubbeling achtereenvolgens de veelhoek met vierentwintig, achtenveertig en zesennegentig hoek(punt)en. (Archimedes, Cirkelmeting, -240)?

De lengte van de zijde van de veelhoek was voor hem het middel om de omtrek, en daarmee π , te bepalen. Voor ons zijn de hoekpunten zelf een benadering van de kromme van de cirkel. We zullen laten zien hoe een goede benadering van de cirkel, of algemener de ellips, kan worden verkregen met behulp een algoritme gebaseerd op de hoekpunten van veelhoeken. De hoekpunten worden daarbij opgevat als vectoren in een nog ongedefinieerd assenstelsel voor het platte vlak. De gedachte om deze punten te gebruiken bij het tekenen van krommen zien we reeds bij de Fransman de Casteljau (Courbes à Pôles, 1959?), praktisch leidend tot kwadratische of kubische interpolatie.

Een kanttekening. De ellips is niets anders dan een cirkel die eenzijdig is uitgerekt. Onder die uitrekking blijven rechten rechten, blijft evenwijdig evenwijdig, blijft raken raken. Kortom, zolang we naar de geometrie kijken kunnen we ons beperken tot de cirkel, de ellips zonder voorkeursassen, door de ellips langs de kortste as uit te rekken tot die evenlang is als de langste as. Meer in het algemeen kunnen we ons beperken tot de eenvoudigste vorm van kegelsneden met eenheidsassen (ellips wordt eenheidscirkel, hyperbool wordt eenheidshyperbool, parabool wordt eenheidsparabool)

Verband tussen in- en omgeschreven veelhoek bij ellips



De figuur illustreert duidelijk het verband tussen de ellips, met de langste as horizontaal, en de cirkel. In de tekening is de ellips de horizontaal uitgerekte cirkel. Van de ingeschreven veelhoek liggen de hoekpunten op de ellips. Ze zijn opvolgend genummerd r_0, r_1, r_2, \dots . De hoekpunten van de omgeschreven veelhoek liggen op een parallelle ellips, die we aanduiden met de letter 'c' ('circumscribed'), en zijn bijbehorend genummerd $r_{c0}, r_{c1}, r_{c2}, \dots$. Er is een duidelijk verband tussen opeenvolgende hoekpunten van de omgeschreven veelhoek, zeg r_{c0}, r_{c1} , en het bijbehorende hoekpunt van de ingeschreven veelhoek, r_0 . Het hoekpunt van de ingeschreven veelhoek (punt van de ellips) ligt precies halverwege de twee hoekpunten, het is het gemiddelde van de bijbehorende hoekpunten van de omgeschreven veelhoek:

$$(1) \quad r_1 = (r_{c0} + r_{c1})/2 \Leftrightarrow r_{c1} - r_1 = (r_1 - r_0) - (r_{c0} - r_1)$$

Omgekeerd is er een verband tussen het hoekpunt r_{c0} van de omgeschreven veelhoek met de bijbehorende hoekpunten r_0 en r_1 van de ingeschreven veelhoek. Nu is het hoekpunt van de omgeschreven veelhoek, *vanuit het middelpunt* O van de ellips gezien, een veelvoud $1/\lambda$ van het gemiddelde r_m van de bijbehorende hoekpunten van de ingeschreven veelhoek:

$$(2) \quad r_{c0} = r_m/\lambda \quad \text{vanuit } O$$

$$(3) \quad r_m = (r_0 + r_1)/2$$

De grootte van de factor volgt door te kijken naar de rechthoekige driehoeken Or_1r_{c1} en Or_mr_1 . De hoek bij het O is de helft van de veelhoek-hoek ϕ . Gemeten vanuit O is $|r_m| = R \cos(\phi/2)$, de straal van de ingeschreven cirkel van

de ingeschreven veelhoek. Anderzijds is $|r_{c0}| = R/\cos(\phi/2)$, de straal van de omgeschreven cirkel van de omgeschreven veelhoek. De punten r_m en r_{c0} zijn vanuit O gezien een onderschatting respectievelijk een overschatting van het punt $r_{1/2}$ van de ellips in dezelfde richting. Merk op dat, vanuit O gemeten:

$$(4) \quad r_{c0} = r_{1/2}/\mu \quad \mu = \cos(\phi/2)$$

$$(5) \quad r_m = \mu r_{1/2} = \lambda r_{c0} \quad \lambda = \mu^2$$

Algoritme met tweedegraads Bézier benadering ellips

We gaan uit van het eerste interval met de punten r_0 , r_{c0} en r_1 , die samen een driehoek vormen. De punten van het eerste interval bepalen de punten van het volgende interval r_1 , r_{c1} en r_2 . Voor het gemak van het scalaire vermenigvuldigen kiezen we O als oorsprong. We maken voor de tussenberekeningen ook gebruik van het middenpunt r_m en van de drie relatieve waarden (de reden hiervoor wordt duidelijk uit de vorm van de Bézier benadering):

$$(r_{c1} - r_1) = (r_1 - r_0) - (r_{c0} - r_0) \quad \text{volgens (1)}$$

$$r_1 = r_0 + (r_1 - r_0)$$

$$(6) \quad r_{c1} = (r_{c1} - r_1) + r_1$$

$$r_m = \lambda r_{c1} \quad \text{volgens (2)}$$

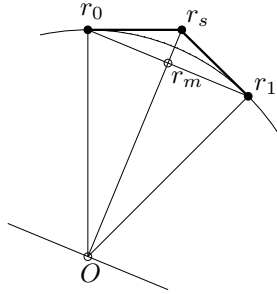
$$r_2 - r_1 = 2(r_m - r_1) \quad \text{volgens (3)}$$

Dit algoritme kan worden voortgezet in de volgende hoek van de veelhoek om zo steeds een punt van de ingeschreven veelhoek en bijbehorend punt van de omgeschreven veelhoek te bepalen. Merk op, dat op deze manier de sinus en cosinus functie alleen nodig zijn bij het bepalen van de beginpunten. Het algoritme bevat slechts scalaire vermenigvuldiging (waarin de halve hoek zit) en vectorverschillen.

Met behulp van de twee hoekpunten van ingeschreven cirkel r_0 en r_1 en het bijbehorende hoekpunt $r_{c0} = r_s$ van de omgeschreven veelhoek kunnen we de ellips benaderen met een tweedegraads Bézier. De benaderings parameter t voor de Lagrange vorm is in dit geval de relatieve doorlopen hoek $t \approx (\varphi - \varphi_0)/\phi$. Vereenvoudiging geeft het gebruik van relatieve punten, ten op zichte van r_m , en daarmee van de relatieve parameter ten opzichte van φ_m , herschaald naar de helft van de doorlopen hoek ϕ , zodat $u = 2(t - 1/2)$.

De tweedegraads Bézier benadering is:

$$\begin{aligned} \text{(kwadratisch Bézier)} \quad r_{B2} &= (1-t)^2 r_0 + 2t(1-t)r_s + t^2 r_1 \\ \text{(veelterm } t) &= r_0 + t(2(r_s - r_0) + t((r_1 - r_0) - 2(r_s - r_0))) \\ \text{(veelterm } u) &= r_m + u(r_1 - r_0)/2 + u^2(r_m - r_s)/2 \end{aligned}$$



De coëfficiënten van de veelterm in u zijn symmetrisch rond het midden:

1. $a_0 = (r_m + r_s)/2$ het punt op halve hoogte van de driehoek $r_0 r_1 r_s$;
2. $a_1 = (r_1 - r_0)/2$, de numerieke eerste afgeleide in koor-derichting;
3. $a_2 = -(r_s - r_m)/2$, de halve numeriek tweede afgeleide in radiële richting.

In de koorderichting is de benadering slechts lineair, in de radiële richting kwadratisch. De tweedegraads benadering is daarom een parabool, die precies raakt in de punten r_0 en r_1 en precies gaat door het punt $(r_m + r_s)/2$, halverwege de hoogte van de intervaldriehoek $r_0 r_1 r_s$. Voor een preciezere beschrijving kiezen we een geschikt assenstelsel dat bestaat uit de lijn door O evenwijdig aan de basiskoord $r_1 - r_0$, voor de x -as, en de symmetrielij van het interval door O , r_m en r_s , voor de y -as. De assen staan, bij de cirkel, loodrecht op elkaar. De punten hebben coördinaten $r_{B2} = (x_{B2}, y_{B2})$: $r_1 = (\sin(\phi/2), \cos(\phi/2))$, $r_s = (0, 1/\cos(\phi/2))$. Merk op, dat $y_m = y_1 = \cos(\phi/2)$ en $y_s = 1/y_1$. De tweedegraads Bézierbenadering componentsgewijs is:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_{B2} &= ux_1 \\ y_{B2} &= (y_1 + y_s)/2 - u^2(y_s - y_1)/2 = y_1 + (1 - u^2)(1/y_1 - y_1)/2 \end{aligned}$$

Eenvoudig is te zien dat de parabool buiten de (eenheids)cirkel (ellips) valt omdat de afstand tot de oorsprong groter dan 1 is. Radiëel is:

$$\begin{aligned} r_{B2}^2 &= u^2 x_1^2 + y_1^2 + (1 - u^2)(1 - y_1^2) + ((1 - u^2)(1/y_1 - y_1)/2)^2 \\ &= 1 + u^2(x_1^2 + y_1^2 - 1) + ((1 - u^2)(1/y_1 - y_1)/2)^2 \\ &= 1 + ((1 - u^2)(y_s - y_m)/2)^2 = 1 + (y_{B2} - y_m)^2 \end{aligned}$$

De grootste afwijking $\max(e_{B2})$ tussen ellips en parabool is in het midden, waar $u = 0$ en $r_{B2} = (0, y_{B2})$. Voor de ellips geldt dan:

$$(8) \quad \begin{aligned} \max(e_{B2}) &= (r_c + r_m)/2 - r_{1/2} = (1/2(1 + \mu^2) - \mu)r_c \\ &= 1/2(1 - \mu)^2 r_c = 1/2(1 - \mu)^2 r_{1/2}/\mu \\ &= 1/2(1 - \cos(\phi/2))^2 r_{1/2}/\cos(\phi/2) \\ &= 2 \sin^4(\phi/4)/\cos(\phi/2) r_{1/2} \approx 1/128 \phi^4 r_{1/2} \end{aligned}$$

Voor kleine hoeken ϕ , en die gebruiken we, is de sinus praktisch gelijk aan de hoek. De fout is verrassend van de vierde orde in de hoek, waar derde orde, vanwege het aantal punten, normaal zou zijn: dit is het gevolg van de symmetrie.

Iteratie van de 2degraads Bézier ellips

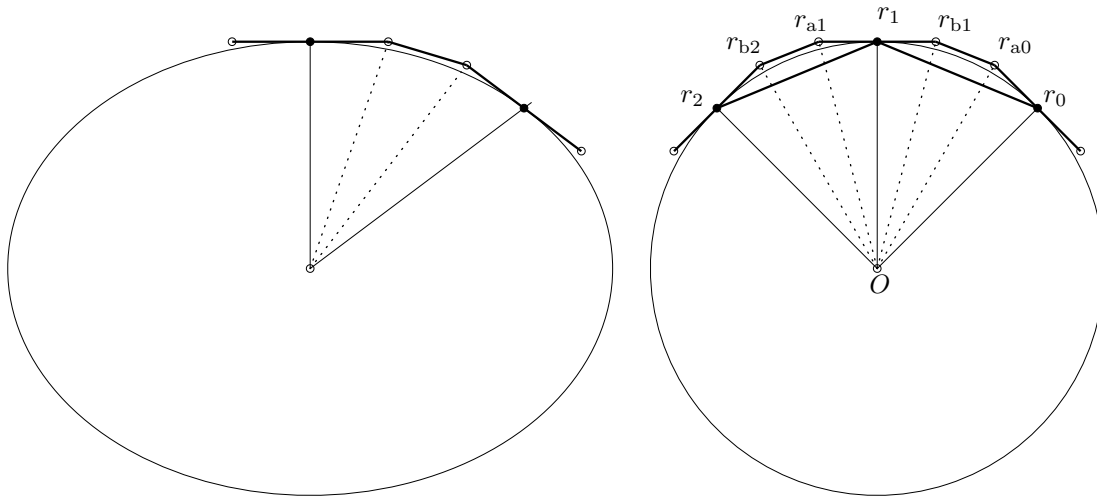
Wat gebeurt er met de fout als we de veelhoek verdubbelen? Als het aantal hoeken verdubbelt wordt de hoek ϕ gehalveerd. De fout wordt, vanwege de vierde macht, een factor $2^4 = 16$ kleiner. Bijvoorbeeld, uitgaande van een 12 hoek, met $\phi = 2\pi/12 = \pi/6 = 30^\circ$, wordt $|e_2|/|r| \approx 0,0006$ dus na de verdubbeling naar een 24 hoek wordt $|e_2|/|r| \approx 0,00004$. Bij een straal van 5cm betekent dat een afwijking van ten hoogste $4 \cdot 10^{-4}$ cm of 0,07pt.

Het is duidelijk dat bij zoveel hoekpunten de nauwkeurigheid van het herhaalde berekenen een grote rol gaat spelen. Iedere berekening geeft een fout, zodat de iteratie een cumulatie van fouten wordt. Het algoritme bevat 1 scalaire vermenigvuldiging en 5 vectoriële sommen. Zeg dat dat 10 standaardfouten geeft. Bij een 24 hoek zijn voor een rondgang totaal 240 standaardfouten mogelijk. We verwachten dat dat maximaal 0,07pt is. Een standaardfout mag dan niet meer zijn dan 0,003pt zijn. Omgekeerd bepaalt de maximale fout de hoek:

$$(9) \quad \phi \approx (128|e_2|/|r_{a0}|)^{-1/4}$$

Een 0,1mm [0,01mm] fout op een straal van 1cm [5cm] geeft een hoek van $1,06 = 60^\circ$ [0,161 = 9°].

Algoritme met derdegraads Bézier ellips



Om tot een derdegraads Bézier benadering te komen verdelen we de hoek in drieën, en laten de raaklijnen in r_0 , r_1 enzovoort verder lopen tot $\phi/3$, een derde van de totale hoek. Op de omschreven veelhoek krijgen we op het interval van r_0 tot r_1 achtereenvolgens de punten r_0 , r_{a0} , r_{b1} en r_1 . Ze gaan tegen de klok in, zoals gebruikelijk in de wiskunde, en vormen een trapezium met de ellips punten r_0 en r_1 als basis en de raaklijnpunten r_{a0} en r_{b1} als top. De topline

$r_{a0} - r_{b1}$ raakt niet aan de cirkel, zodat de omgeschreven veelhoek nu slechts om en om raakt aan de cirkel. Dit is een gevolg van driedeling van de hoek, wat derdegraads Bézier suggereert. De afstand tot het midden van de toplijn is:

$$r_{a0} + r_{b1} = 2\alpha r_{1/2} \quad \alpha = \cos(\phi/6)/\cos(\phi/3)$$

Uit de posities van de punten van het interval, r_0 , r_{a0} , r_{b1} en r_1 , bepalen we de posities van de punten in het volgende interval: r_1 , r_{a1} , r_{b2} en r_2 . We gebruiken daarbij opnieuw de symmetrie ten opzichte van de straal naar het gemeenschappelijke punt r_1 , waardoor het gemiddelde van twee gespiegelde punten op die straal ligt op een afstand $\cos(\alpha)$, waarbij α de projectiehoek is in O . We krijgen achtereenvolgens de symmetrie eigenschappen:

$$\begin{aligned} r_0 + r_2 &= 2\gamma r_1 & \gamma &= \cos(\phi) \\ r_{b1} + r_{a1} &= 2r_1 \\ r_{a0} + r_{b2} &= 2\beta r_1 & \beta &= \cos(2\phi/3)/\cos(\phi/3) \end{aligned}$$

Door combineren volgt daaruit het algoritme voor de iteratie. We zullen echter eerst ingaan op de benadering om te zien welke nodig zijn. Met behulp van de twee hoekpunten r_0 en r_1 op de ellips en de twee hoekpunten r_{a0} en r_{b1} van de omgeschreven veelhoek kunnen we de ellips benaderen met een derdegraads Bézier. Die benadert de ellips met een kromme die bepaald wordt door een derdegraadsveelterm. De kromme raakt de ellips in de punten r_0 en r_1 . Voor de Lagrange benadering is de parameter t gelijk aan de relatieve doorlopen hoek $t = (\varphi - \varphi_0)/(\phi)$. Voor de benadering relatief het midden, met de parameter $u = (\varphi - \varphi_m)/(\phi/2) = 2(t - 1/2)$, is de derdegraads Bézier benadering:

(Lagrange)

$$\begin{aligned} r_{b3} &= (1-t)^3 r_0 + 3t(1-t)^2 r_{a0} + 3t^2(1-t) r_{b1} + t^3 r_1 \\ \text{(veelterm)} &= r_0 + t(3(r_{a0} - r_0) + t(3((r_{b1} - r_0) - 2(r_{a0} - r_0)) + \\ &\quad + t(((r_1 - r_0) - 3(r_{a0} - r_0)) - 3((r_{b1} - r_0) - 2(r_{a0} - r_0)))) \end{aligned}$$

(tov midden)

$$\begin{aligned} &= 1/8(r_0 + r_1 + 3(r_{a0} + r_{b1})) + 3/8u(r_1 - r_0 + r_{b1} - r_{a0}) + \\ &\quad + 3/8u^2(r_0 + r_1 - (r_{b1} + r_{a0})) + 1/8u^3(r_1 - r_0 - 3(r_{b1} - r_{a0})) \end{aligned}$$

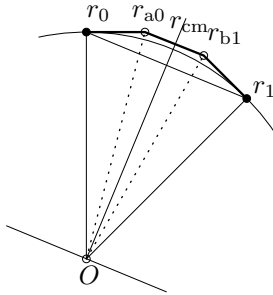
De coëfficiënten van de veelterm in u , symmetrisch rond het midden, zijn:

1. $a_0 = 1/8((r_1 + r_0) + 3(r_{b1} + r_{a0})) = 1/4(r_m + 3r_{am})$, het punt van de benadering op de symmetrieas;
2. $a_1 = 3/8((r_1 - r_0) + (r_{b1} - r_{a0}))$, numeriek eerste afgeleide tangentiëel evenwijdig aan koorde;
3. $a_2 = 3/8((r_1 + r_0) - (r_{b1} + r_{a0})) = 3/4(r_m - r_{am})$, 1/2 numeriek tweede afgeleide radiëel;
4. $a_3 = 1/8((r_1 - r_0) - 3(r_{b1} - r_{a0}))$, 1/6 numeriek derde afgeleide tangentiëel.

In de radiële richting is de benadering van de tweede graad, in de tangentiële koorderichting van de derde graad. Het snijpunt van de diagonalen van het trapezium r_1, r_0, r_{a0}, r_{b1} , op $3/4$ hoogte, is praktisch het punt $(r_m + 3r_{am})/4$, nog net buiten de ellips.

We werken de cirkel hier verder uit. De punten hebben daarin coördinaten $r_{B3} = (x_{B3}, y_{B3})$: $r_1 = (\sin(\phi_1), \cos(\phi_1))$, $r_{b1} = (\sin(\phi_1 - \phi_B), \cos(\phi_1 - \phi_B)) / \cos(\phi_B)$ met $\phi_1 = \phi/2$ en $\phi_B = \phi/3$. Merk op, dat $|r_{b1} - r_1| = \tan(\phi_B)$.

De derdegraads Bézierbenadering componentsgewijs is:



$$\begin{aligned}
 x_{B3} &= 3/4u(x_1 + x_{b1}) + 1/4u^3(x_1 - 3x_{b1}) \\
 &= ux_1 - 1/4u(1 - u^2)(x_1 - 3x_{b1}) \\
 y_{B3} &= 1/4(y_1 + 3y_{b1}) + 3/4u^2(y_1 - y_{b1}) \\
 &= y_1 - 3/4(1 - u^2)(y_1 - y_{b1})
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Voor kleine intervallen is de coëfficiënt van de derdegraads-term in u zeer klein. Immers, bij verwaarlozing van de kromming is $3x_{b1} = x_1$. Daardoor is de tangentiële x-component in tweede orde lineair en de radiële y-component kwadratisch: de derdegraads benadering is in tweede orde een parabool, die in derde orde iets wordt uitgeboid.

Preciezer uitgewerkt:

$$\begin{aligned}
 1/4(x_1 - 3x_{b1}) &= 1/4 \sin(\phi_1) - 3/4 \sin(\phi_1 - \phi_B) / \cos(\phi_B) \\
 &= 1/4 \sin(\phi_1) - 3/4 \sin(\phi_1) + 3/4 \cos(\phi_1) \tan(\phi_B) \\
 &= 3/4 \cos(\phi_1) \tan(\phi_B) - 1/2 \sin(\phi_1) \\
 1/4(y_1 + 3y_{b1}) &= 1/4 \cos(\phi_1) + 3/4 \cos(\phi_1 - \phi_B) / \cos(\phi_B) \\
 &= 1/4 \cos(\phi_1) + 3/4 \cos(\phi_1) + 3/4 \sin(\phi_1) \tan(\phi_B) \\
 &= 3/4 \sin(\phi_1) \tan(\phi_B) + \cos(\phi_1) \\
 1 \mp 1/4(y_1 + 3y_{b1}) &= 1 \mp \cos(\phi_1) \mp 3/4 \sin(\phi_1) \tan(\phi_B) \\
 &= 2(\sin^2[\cos^2](\phi_1/2) \mp 3/4 \sin(\phi_1) \tan(\phi_B) \\
 &= 3/4 \sin(\phi_1) (4/3 \sin^2[\cos^2](\phi_1/2) \mp \tan(\phi_B)) \\
 &= 3/4 \sin(\phi_1) (4/3 \tan[\cot](\phi_1/2) \mp \tan(\phi_B))
 \end{aligned}$$

Als $\phi_1 = \phi/2$ en $\phi_B = \phi/3$ dan zijn eerste en vierde linkerlid nul in eerste orde, en wel van de orde ϕ^3 respectievelijk ϕ^4 . Preciezer gezegd $1/4(x_1 - 3x_{b1}) \approx 3/4((1/3)^3 - 2/3(1/2)^3)\phi^3/3 = -5/432\phi^3$ en $\max(e_{B3}) = 1/4(y_1 + 3y_{b1}) - 1 \approx 3/4(\phi/2)(4/3(1/4)^3 - (1/3)^3)\phi^3/3 = 7/3456\phi^4$. Deze derdegraads Bézier fout is van dezelfde orde als de tweedegraads Bézier fout—slechts 4 keer kleiner.

We zullen aan de hand van de cirkel laten zien dat de gehele benadering buiten de cirkel, dus ook buiten de ellips, ligt. P_1 ligt op de cirkel, $y_1^2 = 1 - x_1^2$, en P_{r1} op de raaklijn loodrecht op de straal: $y_1(y_1 - y_{b1}) + x_1(x_1 - x_{b1}) = 0$, zodat

tezamen $y_1 y_{b_1} + x_1 x_{b_1} = 1$. Voor de radiële r^2 fout geldt enerzijds en anderzijds:

$$\begin{aligned}
r_{B_3}^2 - 1 &= (1 + e_{B_3})^2 - 1 = e_{B_3}(2 + e_{B_3}) = (x_{B_3}^2 + y_{B_3}^2) - 1 \\
&= (ux_1 - 1/4u(1 - u^2)(x_1 - 3x_{b_1}))^2 + (y_1 - 3/4(1 - u^2)(y_1 - y_{b_1}))^2 - 1 \\
&= u^2 x_1^2 + y_1^2 - 1/2u^2(1 - u^2)x_1(x_1 - 3x_{b_1}) - 3/2(1 - u^2)y_1(y_1 - y_{b_1}) + \\
&\quad + (1/4u(1 - u^2)(x_1 - 3x_{b_1}))^2 + (3/4(1 - u^2)(y_1 - y_{b_1}))^2 - 1 \\
&= (u^2 - 1)(x_1^2 + 1/2u^2 x_1(x_1 - 3x_{b_1}) - 3/2x_1(x_1 - x_{b_1})) + \\
&\quad + 1/16(1 - u^2)^2 (u^2(x_1 - 3x_{b_1})^2 + 9(y_1 - y_{b_1})^2) \\
&= 1/16(1 - u^2)^2 (8x_1(x_1 - 3x_{b_1}) + u^2(x_1 - 3x_{b_1})^2 + 9(y_1 - y_{b_1})^2) \\
&= 1/16(1 - u^2)^2 (-16 + (y_1 + 3y_{b_1})^2 + u^2(x_1 - 3x_{b_1})^2) \\
&= (1 - u^2)^2 ((1/4(y_1 + 3y_{b_1}))^2 - 1) + u^2(1/4(x_1 - 3x_{b_1}))^2
\end{aligned}$$

De factor $(1 - u^2)^2$ zorgt voor de perfecte aansluiting op de cirkel bij de hoekpunten. De term $(1/4(y_1 + 3y_{b_1}))^2 - 1$ is precies de fout van r^2 op de symmetrieas. Zolang het punt op de symmetrieas buiten de cirkel is, is het rechterlid positief, dus $e_B \geq 0$: dan is ook de benadering buiten de cirkel.

Merk op, dat de exacte positie van de omschreven hoekpunten niet is gebruikt in de afleiding van de radiële fout. De hoekpunten kunnen nog aangepast door niet exact $1/3$ van het interval te nemen! De fout wordt kleiner als we $1/4(y_1 + 3y_{b_1}) = 1$ maken. Kies daartoe r_{b_1} zo, dat $1/4(r_m + 3r_{bm})$ exact op de cirkel (ellips) ligt. De benadering ligt dan nog steeds geheel buiten de cirkel maar heeft nu ook perfecte aansluiting op de cirkel in het midden. Daarvoor is nodig dat $\tan(\phi'_B) = 4/3 \tan(\phi/4)$. Voor kleine hoeken is $\phi_{B'} \approx 1/3\phi$, maar voor grotere hoeken is $\phi_{B'} \approx 1/3\phi(1 - 7/432\phi^2)$. Voor 90 graden is $\phi_{B'} = 0,3212\phi$, dat is minder dan 4 procent onder $1/3$. De fout is maximaal voor die u^2 -waarde waarbij $|e|$ maximaal is. Dat is: als $u^2 = 1/3$, waarbij de maximale fout is

$$\begin{aligned}
\max(e_{B_3}) &\approx 1/2(1 - 1/3)^2(1/3(1/4(x'_1 - 3x'_{b_1})))^2 = 2/27(1/4(x'_1 - 3x'_{b_1}))^2 \\
&= 2/27(\cos(\phi/2) \tan(\phi/4) - 1/2 \sin(\phi/2))^2 \\
&= 2/27(\sin^2(\phi/4) \tan(\phi/4))^2 \approx 1/55296\phi^6
\end{aligned}$$

Door het oneven karakter van \tan en \sin wordt de fout nu van de orde ϕ^6 , twee orden (!) beter dan bij de tweedegraads Bézier.

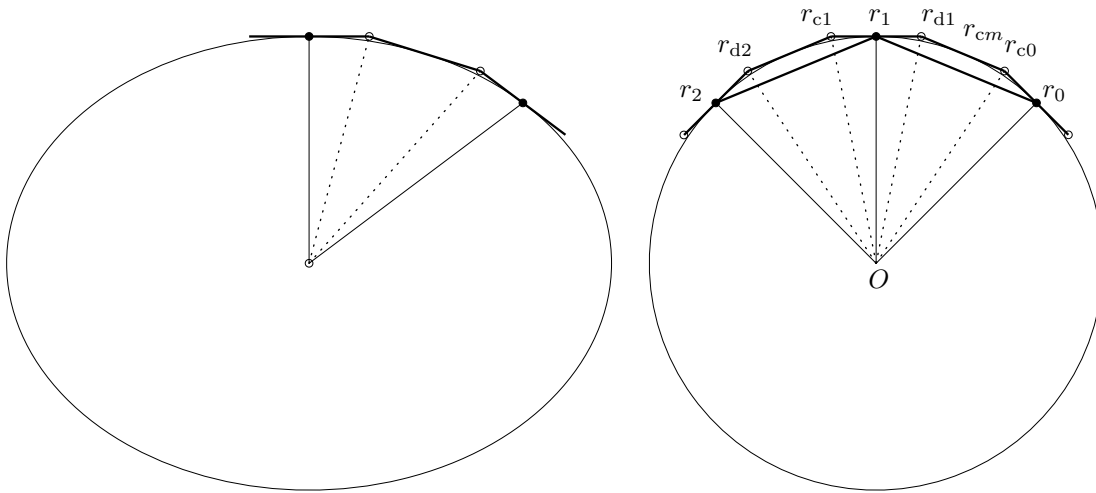
De fout kan zelfs verder verkleind worden door de hoek nog kleiner te nemen, zodat de benadering deels binnen, deels buiten de cirkel ligt met gemiddeld $\langle e_{B_3} \rangle = 0$. Bedenkend dat het gemiddelde van een (even) macht van u is $\langle u^n \rangle = 1/(n + 1)$, geldt bij de optimale hoek:

$$\begin{aligned}
(1 - 2/3 + 1/7)(1 - (1/4(y_1 + 3y_{b_1})))^2 &= (1/3 - 2/5 + 1/7)(1/4(x_1 - 3x_{b_1}))^2 \\
1 - (1/4(y_1 + 3y_{b_1}))^2 &= 4/25(1/4(x_1 - 3x_{b_1}))^2
\end{aligned}$$

Het blijkt dat de oplossingshoek daarmee nauwelijks verandert.

Aangepaste derdegraads Bézier: 4 intervallen

Omdat de klassieke derdegraads Bézier 3 intervallen heeft, komt de omgeschreven veelhoek niet goed uit: de verbindingslijn van de binnenpunten raakt niet aan de cirkel. Door de omgeschreven veelhoek met halve hoek en dubbel aantal hoekpunten te nemen zal de verbindingslijn van de extra punten r_{c0} en r_{d1} raken aan de cirkel. De hoek bevat nu vier intervallen met intervalhoek $\phi/4$.



Deze omgeschreven veelhoek is dezelfde als die we zouden hebben gekregen wanneer we de hoek van de tweedegraads benadering zouden hebben gehalveerd. Het algoritme van de tweedegraads Bézier zal iets moeten worden aangepast. Uitgaande van de tweedegraadspunten r_0, r_{c0}, r_{cm} vinden we de punten van de tweede helft r_{cm}, r_{c1}, r_1 :

$$\begin{aligned}
 (r_{d1} - r_{cm}) &= (r_{cm} - r_0) - (r_{c0} - r_0) \quad \text{relatief} \\
 r_{d1} &= (r_{d1} - r_{cm}) + r_{cm} \quad \text{absoluut} \\
 r_{cm} &= r_0 + (r_{cm} - r_0) \quad \text{absoluut} \\
 r_m &= \lambda r_{d1} \quad \lambda = \cos^2(\phi/4) \quad \text{absoluut} \\
 r_1 - r_{cm} &= 2(r_m - r_{cm}) \quad \text{relatief}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Zo voortgaande is het algoritme voor de iteratie af te leiden.

In plaats van het aanpassen van de hoek zullen we nu de raaklijntijden aanpassen. De met raaklijntijden $t=1/4$ en $t=3/4$ *aangepaste derdegraads Bézier* benadering is:

(Lagrange)

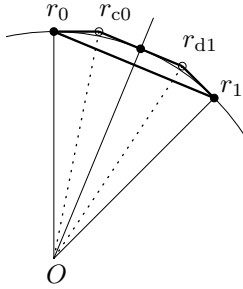
$$r_{B3} = (1-2t)(1-t)^2 r_0 + 4t(1-t)^2 r_{c0} + 4t^2(1-t)r_{d1} + (2t-1)t^2 r_1$$

(veelterm t)

$$= r_0 + 4(r_{c0} - r_0)t + (3(r_1 + r_0) - 8(r_{c0} - r_0) + 4(r_{d1} - r_1))t^2 + (2(r_1 - r_0) - 4(r_{d1} - r_{c0}))t^3$$

(u tov midden)

$$= 1/2(r_{d1} + r_{c0}) + (1/4(r_1 - r_0) + 1/2(r_{d1} - r_{c0}))u + (1/2(r_0 + r_1) - 1/2(r_{d1} + r_{c0}))u^2 + (1/4(r_1 - r_0) - 1/2(r_{d1} - r_{c0}))u^3$$

De coëfficiënten van de veelterm in u zijn symmetrisch rond het midden r_{cm} :

1. $a_0 = r_{cm} = 1/2(r_{d1} + r_{c0})$ het raakpunt aan de cirkel;
2. $a_1 = 1/4(r_1 - r_0) + 1/2(r_{d1} - r_{c0})$, de numerieke eerste afgeleide in tangentiële koorderichting;
3. $a_2 = -(r_{cm} - r_m)$, de halve numeriek tweede afgeleide in radiële richting.
4. $a_3 = 1/4(r_1 - r_0) - 1/2(r_{d1} - r_{c0})$, een zesde numeriek derde afgeleide in tangentiële richting;

Ook hier: in de radiële y -richting is de benadering van de tweede graad, in de tangentiële x -richting van de derde graad, met sterk lineair deel:

$$(12) \quad \begin{aligned} x_{B3} &= u(1/2x_1 + x_{d1}) + u^3(1/2x_1 - x_{d1}) = ux_1 - u(1-u^2)(1/2x_1 - x_{d1}) \\ y_{B3} &= 1 - u^2(1 - y_1) = y_1 + (1-u^2)(1 - y_1) \end{aligned}$$

De puntcoördinaten zijn: $r_1 = (\sin(\phi_1), \cos(\phi_1))$, $r_{d1} = (\tan(\phi_1 - \phi_B), 1)$ met hoeken $\phi_1 = \phi/2$ en $\phi_B = \phi/4$. Voor de radiële fout in het kwadraat van de afstand vinden we voor de cirkel, door op dezelfde manier als bij de klassieke derdegraads Bézier gebruik te maken van $x_1^2 + y_1^2 = 1$ en $x_1 x_{d1} + 1 \cdot y_1 = 1$:

$$\begin{aligned} r_{B3}^2 &= (y_{B3}^2 + x_{B3}^2) = (y_1^2 + u^2 x_1^2) + u^2(1-u^2)^2(1/2x_1 - x_{d1})^2 + \\ &+ (1-u^2)(2y_1(1-y_1) + (1-u^2)(1-y_1)^2) - 2u^2(1-u^2)x_1(1/2x_1 - x_{d1}) \\ &= 1 + u^2(1-u^2)^2(1/2x_1 - x_{d1})^2 + (1-u^2)(-x_1^2 + 2y_1 - 2y_1^2 + (1-y_1^2)) - \\ &- (1-u^2)u^2(x_1^2 - 2x_1 x_{d1} + (1-y_1)^2) = 1 + u^2(1-u^2)^2(1/2x_1 - x_{d1})^2 \end{aligned}$$

Niet toevallig is $1/2x_1 - x_{d1} = 1/2 \sin(\phi_1) - \tan(\phi_1/2)$ gelijk aan de 'klassieke' aangepaste afstand $1/4(x'_1 - 3x'_{b1}) = \cos(\phi_1) \tan(\phi_1/2) - 1/2 \sin(\phi_1)$:

$$\max(e_{B3}) = 2/27(\sin^2(\phi/4) \tan(\phi/4))^2 \approx 1/55296\phi^6$$

Merk op, dat de ordefout bij deze Béziermethode, met aangepaste raaklijntijd $1/4$, veel eenvoudiger wordt verkregen dan bij de klassieke Béziermethode met raaklijntijd $1/3$. Omgekeerd vinden we de aanpassingshoek: ga van raaklijntijd $1/4$ naar $1/3$ door de raaklijn $P_1 P_{d1}$ met een factor $4/3$ te verlengen tot $P_1 P_{b1}$. Gevolg: $\tan(\phi'_B) = 4/3 \tan(\phi/4)$, voilà!

In- en omgeschreven veelhoek bij hyperbool

Naast de cirkel en ellips is ook de hyperbool een kegelsnede. We zullen nu analytisch aantonen dat de veelhoeken constructie ook toepasbaar is bij de hyperbool, zij het met enige aanpassing. Gedachtig de mogelijkheden van herschaling en symmetrie, zoals beschreven in de inleiding, gaan we, zonder verlies van algemeenheid, uit van de standaardhyperbool in de parameter beschrijving vanuit de oorsprong (ook dat is nog lastig genoeg!):

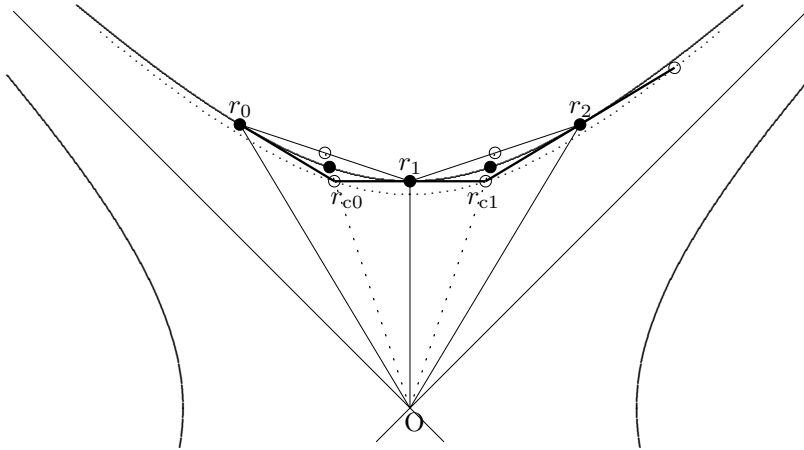
$$(13) \quad x = \cosh t \quad y = \sinh t \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

Bij de parameter t behoort geometrisch de richting(scoëfficiënt) m van de straal

$$(14) \quad m = y/x = \tan \varphi = \tanh t$$

$$(15) \quad x^2 = \frac{1}{1-m^2} \quad y^2 = \frac{m^2}{1-m^2}$$

Naar analogie van de constructie van de veelhoeken bij de cirkel gaan we, in plaats van de hoek φ , uit van de parameter t . In dit geval leidt dat tot oneindig veel hoekpunten om de hyperbool te beschrijven. Uitgaande van een punt van de hyperbool r_0 , bij parameter t_0 , of richting m_0 , vinden we de hoekpunten r_1, r_2, \dots van de ingeschreven veelhoek als de punten met hoeken die veelvoudigen van veelhoek-hoek ϕ verder liggen. De snijpunten van de raaklijnen in de hoekpunten van de ingeschreven veelhoek vormen de hoekpunten r_c van de omgeschreven veelhoek.



Het is eenvoudig in te zien dat, als de richting van de straal m is, de richting van de raaklijn $1/m$ is. Immers door differentiëren van de hyperboolvergelijking in x, y :

$$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = x/y$$

Bezie nu de driehoek van punten $r_0 r_1 r_c$, waarin $r_0 r_1$ een koorde van de hyperbool is en r_a het snijpunt van de raaklijnen in r_0 en r_1 . Op de hyperbool is een punt $r_{1/2}$ 'halverwege' waar de raaklijn evenwijdig loopt aan de koorde. We zullen eerst laten zien dat, net als bij de ellips, de straal naar het raakpunt iedere lijn evenwijdig aan de raaklijn in de hyperbool doormidden deelt. Stel dat de koorde en raaklijn richting $1/m_{1/2}$ hebben, zodat in het raakpunt de straal een richting $m_{1/2}$ heeft. De straal naar $r_{1/2}$ snijdt de koorde in het halverwege punt $r_m = (r_0 + r_1)/2$, omdat de eindpunten van de koorde op de hyperbool liggen:

$$\begin{aligned} x_0^2 - y_0^2 = x_1^2 - y_1^2 = 1 &\Leftrightarrow (y_1^2 - y_0^2) = (x_1^2 - x_0^2) \\ (y_1 - y_0)(y_1 + y_0) &= (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) \Leftrightarrow (y_1 + y_0) = m_{1/2}(x_1 + x_0) \end{aligned}$$

(16) $r_m = \mu r_{1/2}$

wat beduidt dat het midden van de koorde r_m op de straal naar $r_{1/2}$ ligt. In het bewijs is gebruikt dat de koorderichting $1/m_{1/2}$ is. Later zullen we de constante waarde van μ bepalen. Inderdaad is $t_{1/2}$ halverwege t_0 en t_1 :

$$\begin{aligned} \tanh t_{1/2} &= \frac{\sinh t_0 + \sinh t_1}{\cosh t_0 + \cosh t_1} \\ &= \frac{2 \sinh((t_0 + t_1)/2) \cosh((t_0 - t_1)/2)}{2 \cosh((t_0 + t_1)/2) \cosh((t_0 - t_1)/2)} = \tanh((t_0 + t_1)/2) \end{aligned}$$

(17) $t_{1/2} = (t_0 + t_1)/2 = t_m$

We zullen nu laten zien dat, net als bij de ellips, ook het snijpunt r_c van de raaklijnen aan de eindpunten van de koorde op de straal naar het raakpunt $r_{1/2}$ ligt. Het snijpunt ligt op twee raaklijnen, dus voldoet aan twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned} y_c - y_0 &= (x_c - x_0)/m_0 \wedge y_c - y_1 = (x_c - x_1)/m_1 \\ x_c - m_0 y_c &= (1 - m_0^2)x_0 = 1/x_0 \wedge x_c - m_1 y_c = (1 - m_1^2)x_1 = 1/x_1 \\ (m_1 - m_0)y_c &= (1/x_0 - 1/x_1) \wedge 2x_c = (m_0 + m_1)y_c + (1/x_0 + 1/x_1) \\ x_0 x_1 (m_1 - m_0)y_c &= x_1 - x_0 \wedge x_0 x_1 (m_1 - m_0)x_c = m_1 x_1 - m_0 x_0 \\ y_c/x_c &= (x_1 - x_0)/(y_1 - y_0) = m_{1/2} \end{aligned}$$

(18) $r_c = (\mu/\lambda)r_{1/2} = r_m/\lambda$

wat betekent dat het snijpunt van de raaklijnen r_c op de straal naar het raakpunt $r_{1/2}$ ligt. (bewijs moet beter kunnen; meetkundig?)

Liggen de hoekpunten r_c van de omgeschreven veelhoek ook op een hyperbool? Om die vraag te beantwoorden hebben we waarden van μ en λ nodig. In de laatste vergelijkingen zijn x_c en y_c uitgedrukt in x_0, x_1, m_0 en m_1 . Deze drukken we uit in de hyperbolische variabele t :

$$\begin{aligned} x_0 x_1 (m_1 - m_0) &= \cosh t_0 \cosh t_1 (\tanh t_1 - \tanh t_0) \\ &= \sinh t_1 \cosh t_0 - \sinh t_0 \cosh t_1 = \sinh(t_1 - t_0) \\ x_1 - x_0 &= \cosh t_1 - \cosh t_0 = 2 \sinh((t_0 + t_1)/2) \sinh((t_1 - t_0)/2) \\ y_1 - y_0 &= \sinh t_1 - \sinh t_0 = 2 \cosh((t_0 + t_1)/2) \sinh((t_1 - t_2)/2) \end{aligned}$$

Voor $t_1 - t_0$, het verschil van opvolgende t -waarden, nemen we de constante waarde ϕ . We concluderen dat de hoekpunten r_c van de omgeschreven veelhoek op een evenwijdige, iets grotere, hyperbool liggen met parametervergelijking:

$$\begin{aligned}x_c &= (\mu/\lambda) \cosh t & y_c &= (\mu/\lambda) \sinh t \\ \lambda/\mu &= \sinh \phi/2 \sinh(\phi/2) = \cosh(\phi/2)\end{aligned}$$

De eigenaardige 'straal' μ/λ is naar analogie van de ellips. Let bij de waarde van de 'straal' van de ellips op de overeenkomst met de ellipswaarde.

Omdat de punten van de omgeschreven veelhoek op een hyperbool liggen, geldt de middeneigenschap nu ook voor de raaklijnen in de hoekpunten van de ingeschreven veelhoek, die nu immers koorden zijn in de buitenste hyperbool van r_c .

Het algoritme voor het tekenen van een ellips kan gebruikt worden voor de hyperbool. We missen nog de waarde van $\mu = |r_m|/|r_{1/2}| = y_m/y_{1/2} = x_m/x_{1/2}$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{(x_0 + x_1)/2}{x_{1/2}} = \frac{\cosh t_0 + \cosh t_1}{2 \cosh t_{1/2}} \\ &= \frac{2 \cosh((t_0 + t_1)/2) \cosh((t_1 - t_0)/2)}{2 \cosh((t_0 + t_1)/2)} \\ (19) \quad \mu &= \cosh(\phi/2) \quad \lambda = \mu^2\end{aligned}$$

Merk op, dat het enige verschil met de ellips is, dat we sin, cos moeten vervangen door sinh, cosh.

In- en omgeschreven veelhoek bij parabool

Als het benaderen van de cirkel, ellips en hyperbool goed kan met in-en omgeschreven veelhoek, dan moet dat bij de parabool, de enig overgebleven kegel-snede, ook kunnen! Ook de parabool onderzoeken we analytisch. Welnu, door verplaatsen, vergroten, verdraaien, uitrekken is iedere parabool te zien als de standaard parabool:

$$(20) \quad y = x^2$$

De parameter t van de parabool nemen we (evenredig aan) xt , en dus $t = x$. De parameter van de hoekpunten van de ingeschreven veelhoek heeft stapgrootte ϕ , zodat $x_1 = x_0 + \phi$. Voor de richting(scoëfficiënt) m van de raaklijn in raakpunt r geldt:

$$m = y' = 2x$$

Laat r_0 , parameter x_0 , en r_1 , parameter x_1 , twee opeenvolgende hoekpunten zijn van de ingeschreven veelhoek. Dan is $r_{1/2}$ het punt op de kromme met parameterwaarde $x_{1/2} = (x_0 + x_1)/2 = x_m$, waarbij $r_m = (r_0 + r_1)/2$ het punt

halverwege de koorde r_0r_1 . De richting van de raaklijn in $r_{1/2}$ is $m_{1/2} = 2x_{1/2} = 2x_m$ blijkt gelijk aan de richting van de koorde r_0r_1 :

$$(21) \quad (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = (x_1^2 - x_0^2)/(x_1 - x_0) = x_1 + x_0 = 2x_m$$

Dus liggen r_m en $r_{1/2}$ op een lijn evenwijdig aan de as van de parabool, de y-as. Voor de afstand (richting y-as) tussen r_m en het raakpunt $r_{1/2}$ geldt:

$$(22) \quad y_m - y_{1/2} = (y_1 + y_0)/2 - x_{1/2}^2 = (x_1^2 + x_0^2)/2 - (x_1 + x_0)^2/4 = (x_1 - x_0)^2/4 = (\phi/2)^2$$

In woorden: de middens van de korden van de ingeschreven veelhoek liggen op de parabool evenwijdig aan de kromme op een afstand $(\phi/2)^2$ langs de as hoger. De raaklijnen in r_0 en r_1 snijden elkaar in het punt r_{c0} , een hoekpunt van de omgeschreven veelhoek. We zullen laten zien dat $r_{1/2}$ juist halverwege r_m en r_{c0} ligt. Immers, voor het snijpunt van de raaklijnen in r_0 en r_1 geldt

$$\begin{aligned} y_{c0} &= y_0 + m_0(x_{c0} - x_0) = y_1 + m_1(x_{c0} - x_1) \\ x_{c0} &= ((m_1x_1 - m_0x_0) - (y_1 - y_0))/(m_1 - m_0) \\ &= (2(x_1^2 - x_0^2) - (x_1^2 - x_0^2))/2(x_1 - x_0) \\ &= (x_1^2 - x_0^2)/2(x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)/2 = x_{1/2} \\ y_{c0} &= y_0 + m_0(x_1 - x_0)/2 = x_0^2 + 2x_0(x_1 - x_0)/2 = x_0x_1 \\ y_{c0} + y_m &= x_0x_1 + (x_0^2 + x_1^2)/2 = (x_0 + x_1)^2/2 = 2x_m^2 = 2y_{1/2} \end{aligned}$$

$$(23) \quad r_{c0} + r_m = 2r_{1/2}$$

Anders gezegd: de hoekpunten van de omgeschreven veelhoek r_c liggen op de parabool evenwijdig aan de kromme op een afstand $(\phi/2)^2$ langs de y-as lager. Het bijzondere van de parabool numeriek is, dat als we de kwadratische Bézier benadering nemen, de benadering van het eerste interval direct de gehele paraboolkromme geeft. De kwadratische benadering is exact. In het eerste interval, tussen de punten van de kromme r_0 , met $t = t_0$, en r_1 , met $t_1 = t_0 + \phi$, is alleen een algoritme nodig voor het bepalen van het raaklijnpunt r_{c0} . Aangezien we in het algemeen niet weten waar de as van de parabool is, gebruiken we het punt van de kromme $r_{1/2}$, met $t_{1/2} = t_0 + \phi/2$, en het middenpunt r_m daarvoor:

$$(24) \quad \begin{aligned} r_m &= (r_0 + r_1)/2 && \text{definitie} \\ r_{c0} - r_m &= 2(r_{1/2} - r_m) && \text{volgens (23)} \end{aligned}$$

Merk op, dat de richting van de as van de parabool gegeven wordt door (het tegengestelde van) het laatste verschil.

C.M.Fortuin
van Deldenpad 8
6862DC Oosterbeek NL

fortuinc@xs4all.nl