Maart 1994 vervangt N5.4-6

NUMERIEKE INTEGRATIE

Inleiding

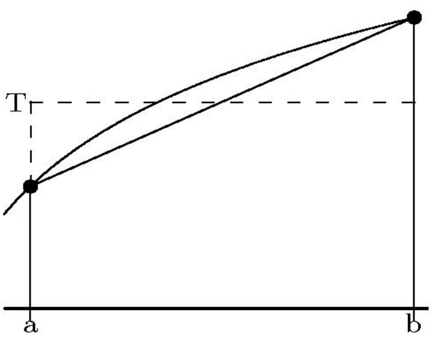
Er zijn twee omstandigheden waarbij we een integraal zouden willen berekenen maar dat niet kunnen, met de tot nu toe geleerde methoden. Soms zullen we, met alle moeite die we er aanbesteden, tot de erkenning komen dat de integraal te moeilijk is. Het komt zelfs voor dat het niet mogelijk is om de primitieve van een funktie te vinden!

In een ander geval kennen we van de funktie, waarvan we de integraal willen bepalen, slechts een aantal punten. Dat is het geval als we met een tabel van funktiewaarden werken.

In dit hoofdstuk zullen we methoden leren die we in beide gevallen kunnen aanwenden om de integratie uit te voeren. Het is nodig dat de integraal bepaald is: de grenzen zijn bekend. Deze integratiemethoden zijn dan recepten om een getal te krijgen. We spreken daarom over <u>numerieke integratie</u>.

1. Trapeziumregel en Rechthoekregel

1.1 Afleiding trapeziumregel



We zullen eerst uitgaan van een funktie f(x) die we zouden willen integreren van a naar b. Kennelijk lukt het niet, zodat we een vereenvoudiging zoeken. De uitkomst van de integraal is een getal dat het oppervlak weergeeft tussen de grafiek van de funktie en de x-as. We vereenvoudigen de grafiek door ze te vervangen door de RECHTE LIJN, die door de randpunten gaat. Er onstaat een TRAPEZIUM waarvan het oppervlak eenvoudig is te bepalen:

integraal= oppervlak

= basis.gemiddelde hoogte

$= (b-a) . \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$

We zullen steeds voor de lengte van het integratie-interval de afkorting h gebruiken.

H:= b-a

Voor de funktiewaarden voeren we de verkorte schrijfwijze in:

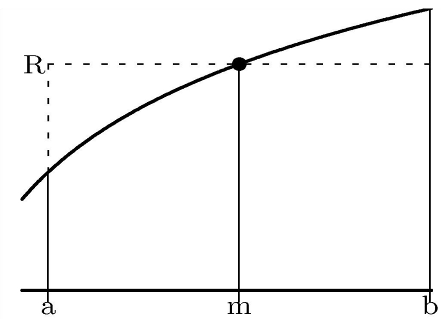
fa := f(a)

fb := f(b)

De integraalbenadering die we vinden met de trapeziumregel noteren we met T. Samenvattend:

TRAPEZIUMREGEL T= h. (½ fa+ ½ fb)

Deze benadering is als volgt op te vatten. In het algemeen is het oppervlak gelijk aan basis maal hoogte. In het geval van integralen is de basis altijd gelijk aan het integratieinterval h. Voor de hoogte kunnen we echter verschillende keuzen doen. In geval van de trapeziumregel nemen we het gemiddelde van de randpunten, die dan ieder voor de helft meedoen.



Nog eenvoudiger is om het punt in het midden te nemen. Dat is hetzelfde als de grafiek vereenvoud-igen tot een rechthoek op de hoogte van het punt m in het midden van het integratie interval:

m := ½(a+b)

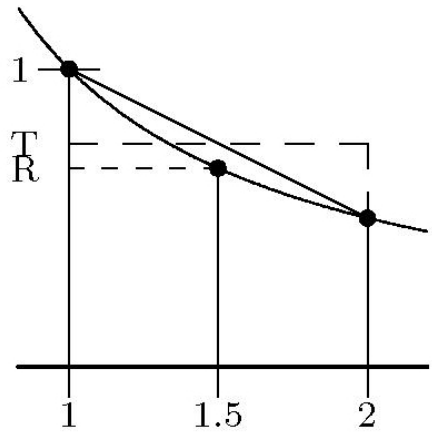
We noemen de bijbehorende funktiewaarde in het middenpunt:

fm := f(m)

De integraalbenadering die we vinden met de rechthoekregel noemen we R. Het is een benadering met slechts een punt:

RECHTHOEKREGEL R= h.fm

Voorbeeld Bereken de bepaalde integraal voor 1/x van 1..2



Oplossing. De intervallengte h= 2-1=1, het middenpunt m= ½(1+2)= 3/2, fm= 1/m= 2/3. De rechthoekregel geeft

R= 1.(2/3) = 0,67

Voor de randpunten hebben we a=1,fa=1/1=1, b=2, fb=½. De trapeziumregel geeft

T=1. (½.1+ ½.½)= ¾ = 0,75

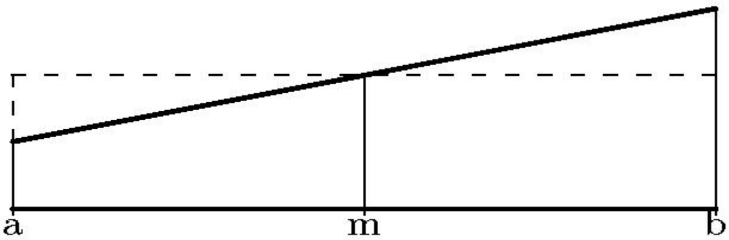
Omdat in dit voorbeeld de funktie wel is te integreren kunnen we vergelijken met de exacte integratiewaarde:
I=[ln(x)]1..2=ln(2/1)=0,69|314718
Het feit dat in dit voorbeeld de rechthoekregel dichterbij de echte waarde komt dan de trapeziumregel is niet toevallig. Maar nu is nog geeen konklusie te trekken (vooralsnog)!

1.2 Foutschatting

Bij iedere benaderingsmethode rijst de vraag: hoe goed is het antwoord? Het zou mooi zijn wanneer we een schatting van de 'fout' zouden kunnen maken. Voor de duidelijkheid:

Integraal = Benadering + Fout

I = B + E



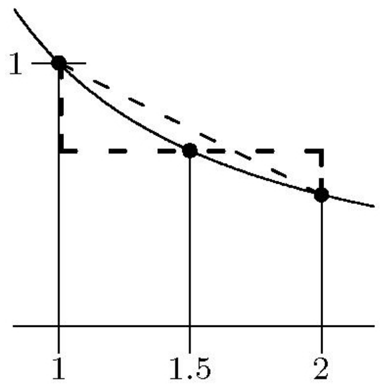
Laten we eerst aannemen dat de functie bekend is. Het is niet moeilijk om te zien dat beide benaderingen, de rechthoek en het trapezium, foutloos zijn als de grafiek van de funktie een rechte is. De funktie van een rechte is een eerste graadspolynoom.Een eerste graadsfunktie wordt gekenmerkt door het feit dat de tweede afgeleide nul is. Het ligt daarom voor de hand te veronder- stellen dat de fout E evenredig is met de tweede afgeleide f''. Omdat bij het bepalen van de afgeleide door afstanden wordt gedeeld kunnen we ook verwachten dat E evenredig is met de derde macht van h (de enige afstand die in het antwoord is). De eerste h vanwege de basis, de andere twee h's vanwege de tweede afgeleide (om de dimensie goed te houden). Men kan bewijzen dat geldt:

RECHTHOEKFOUT $E_R =$ ½$(h^3/3!)(f''/2!)$

TRAPEZIUMFOUT $E_T =$ $-(h^3/3!)(f''/2!)$

Merk op, dat de fouten tegengestelde tekens hebben. Dat kunnen we gebruiken : de integraal ligt tussen R en T. De f'' is van een vooralsnog onbekende waarde x uit het interval (a,b). De x hangt af van de gekozen methode en het integratieinterval. We mogen daarom nog niet konkluderen, uit bovenstaande foutformules, dat de fout bij de rechthoekbenadering de helft is van die bij de trapeziumbenadering. In het voorbeeld is dat duidelijk ook niet het geval.

Voorbeeld Benader de fout die we maken bij het berekenen van de integraal in bovenstaand voorbeeld.



Oplossing: Met $f=1/x$ wordt $f''= 2/x^3$. In het interval van 1 naar 2 is dus

$$1/8 < f''/2! < 1$$

Verder is $h=1$, zodat voor de fout geldt $h^3/3!= 1/6$. Totaal krijgen we

RECHTHOEK $0{,}01= 1/96 < E_R < 1/12=0{,}02$

TRAPEZIUM $-0{,}02=-1/48 > E_T > -1/6=-0{,}17$

Vergelijk: de werkelijke fout is bij de rechthoek-benadering 0,02 en bij de trapezium benadering -0,06.

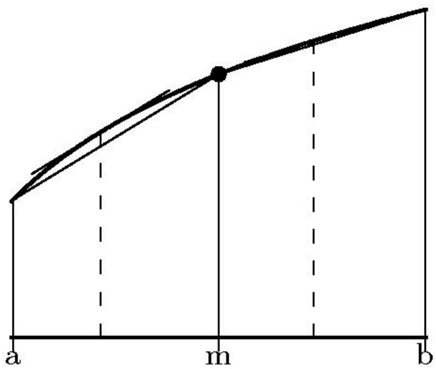
In het algemeen kunnen we opmerken dat, bij funkties die bol zijn de rechthoekbenadering een te hoge waarde geeft, de trapeziumregel een te lage waarde. Bij holle funkties is dat andersom, omdat daar de tweede afgeleide positief is.

1.3 Verschil tussen trapezium- en rechthoekregel

Wat is het verschil tussen de benadering met de rechte lijn en die met het middenpunt? Door aftrekken blijkt:

$$T-R = h(½fa - fm + ½fb) = h(fa-2fm+fb)/2$$

Nu is de faktor met de drie funktiewaarden precies gelijk aan de tweede differentie van de funktie. Dat is als volgt te zien. De eerste differentie Df van een funktie, met gegeven steunpunten, is het verschil tussen opeenvolgende waarden van de funktie. De tweede differentie is, opnieuw, de differentie van 'funktie' Df, dus D^2f. Met de drie punten a, m en b krijgen we:



$$Dfm = fb-fm , Dfa = fm-fa ,$$
$$D^2f = Dfm-Dfa = fb-fm-fm+fa = fa-2fm+fb$$

$$T-R = ½h.D^2f$$

Bedenk dat de differentie van de x-waarden gelijk is aan Dx= ½h. Daardoor is het differentie quotient Df/Dx gelijk aan de afgeleide f' in het punt x, tussen a en b, waar de raaklijn evenwijdig loopt aan de rechte door de randpunten.
Evenzo is voor het volgende differentiequotient $D(Df/Dx)/Dx= D^2f/(Dx)^2$ een punt te vinden in het zelfde interval, waar de tweede afgeleide f'' gelijk is aan het tweede differentiequotient. Het verschil tussen de trapezium en de rechthoekbenadering is dus uit te drukken in de tweede afgeleide (net zoals de fouten!):

$$T-R = (½h)^3.(D^2f)/(Dx)^2= (3/2)(h^3/3!)(f''/2!)$$

We zien precies zo'n formule als voor de fouten E. Daaruit kunnen we een schatting voor de fout in R en T vinden:

RECHTHOEKFOUT $E_R = (T-R)/3$

TRAPEZIUMFOUT $E_T = -2(T-R)/3$

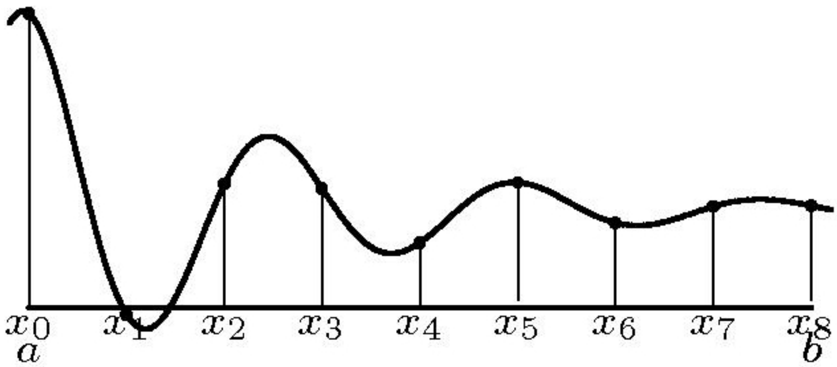
1.4 Het principe van herhalen

Het gebruik van de rechthoek of trapezium benadering is natuurlijk niet meer zinvol wanneer het integratie-interval 'groot' is. Groot betekent hier dat h>> een afstand waarover de funktie niet te veel verandert; anders gezegd: als de funktiewaarden teveel veranderen over het integratieinterval, dan wordt de fout te groot. In het vervolg korten we het integratieinterval af met:

H:= b-a

Het ligt dan voor de hand om het integratieinterval te verdelen in een aantal intervallen n, die ieder klein genoeg zijn.

%totzover 22 juni 1990



Stel er zijn n intervallen. Praktisch is het om intervallen te nemen, met elk dezelfde breedte; ieder interval heeft dan een breedte H/n. We geven de randpunten van de intervallen index i= 0,..,n. Nummer het interval met de index van het rechterpunt; dan hebben de intervallen het rangnummer i= 1,..,n. De middens van de intervallen noteren we met m_1,..m_n. De integraal benaderingen voor die intervallen tezamen geven de benadering van de gewenste integraal (met of zonder tabel). De waarde die we vinden, met behulp van het herhalen van de rechthoek of trapeziumregel voor n intervallen met breedte h/n,wordt genoteerd R_n of T_n:

$$R_n = (h/n)(\ fm_0\ ) + (h/n)(\ fm_2\ ) +..$$
$$T_n = (h/n)(f_0 + f_1) + (h/n)(f_1 + f_2) +..$$

Nemen we alle intervallen samen dan krijgen we:

HERHAALDE RECHTHOEK $R_n = h\ (fm_0+fm_2+..+fm_{n-1})/n$

HERHAALDE TRAPEZIUM $T_n = h\ (f_0+f_1+f_2+..+f_{n-1}+ f_n)/n$

De foutschatting kan per interval worden gedaan.Omdat we nu meerdere punten hebben kunnen we, ook in het geval dat alleen tabelpunten zijn gegeven, een schatting maken van de fout. Dat kan op twee manieren:

1. gebruik het verschil tussen T en R.
2. schat de tweede afgeleiden uit de funktietabel.

Daartoe berekenen we de tabel met tweededifferentiequotienten, en bepalen daaruit een schatting voor f''. Toepassen van de boven gegeven foutschatting en sommeren over de intervallen levert de foutschatting bij het gebruik van de herhaalde regels over n intervallen:

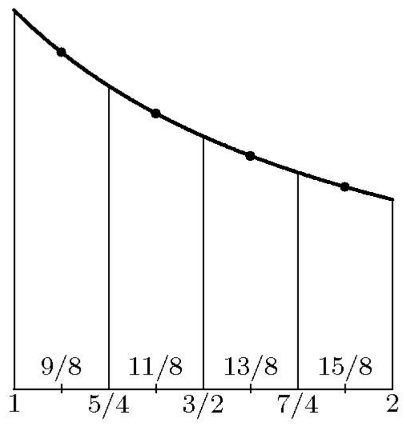
HERH RECHTHOEK $E_{Rn} = ½\ (h^3/3!)(f''/2!)/n^2$

HERH TRAPEZIUM $E_{Tn} = -\ (h^3/3!)(f''/2!)/n^2$

Immers, er zijn n fouten die ieder evenredig zijn met de derde macht van h/n. Het punt waar de f'' moet worden bepaald, is zoiets als het gemiddelde van de punten per interval apart. Merk op dat de fout ruwweg met het *kwadraat van n* afneemt: $E_n=E_1/n^2$

Voorbeeld Maak een schatting voor het aantal intervallen nodig om ln(2) te berekenen met een fout kleiner dan 0.5E-3.

Oplossing. Eerder zagen bij één interval voor de fout:



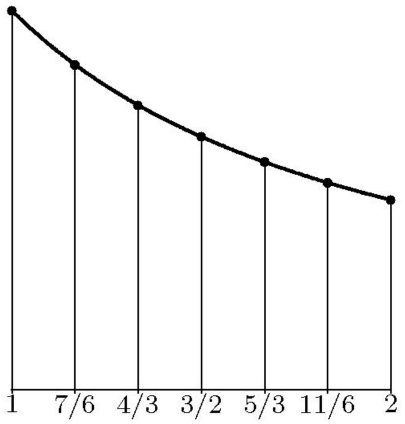
RECHTH 0,01<E1< 0,08

TRAPEZ -0,02>E1>-0,17

Delen door n^2 geeft E_n. Om onder de 0,005 te komen nemen we n voldoende groot. Bij de rechthoek n>=4: $0{,}08/n^2<0{,}005$ en bij trapezium n>=6: $0{,}17/n^2<0{,}005$

We bezien eerst de rechthoekregel. Voor n=4 is h=¼ en de middens der intervallen ziten bij x= 9/8, 11/8, 13/8 en 15/8:

R_4 = 1(8/9+8/11+8/13+8/15)/4=0,691
0,001 < E_4 <0,005
0,692 < ln(2) < 0,696



Voor de trapeziumregel is n=6, dus h=1/6 en de fout E_6= E_1/36. E randen zijn de punten x= 1, 7/6, 8/6 =4/3, 9/6=3/2, 10/6=5/3, 11/6 en 2. De benadering met de herhaalde trapeziumregel is:

T_6= (½+6/7+¾+2/3+3/5+ +6/11+½)/6=0,695

Tezamen met de fout geldt:
-0,005 < E6 < -0,001
0,690 < ln(2) < 0,694

Tenslotte in tabelvorm een indruk van de verschillen tussen het gebruik van de trapeziumregel en de rechthoekregel, in het bijzonder bij meerdere intervallen. Voor de berekening van ln(2) als in de voorbeelden zien we:

	n=1	n=2	n=4	n=8
T	0,75	0,71	0,697	0,694
E	-0,06	-0,02	-0,004	-0,001
R	0,67	0,686	0,691	0,6927
E	0,02	0,007	0,002	0,0005

Conclusie De RECHTHOEKREGEL is tweemaal beter dan TRAPEZIUMREGEL

Vraagstukken zijn te vinden in het boek. Bij alle vraagstukken moet ook dezelfde vraag met de rechthoekregel worden beantwoord. Verder de fouten volledig afschatten in de vrgstk 6,7

2 De regel van Simpson: paraboolbenadering

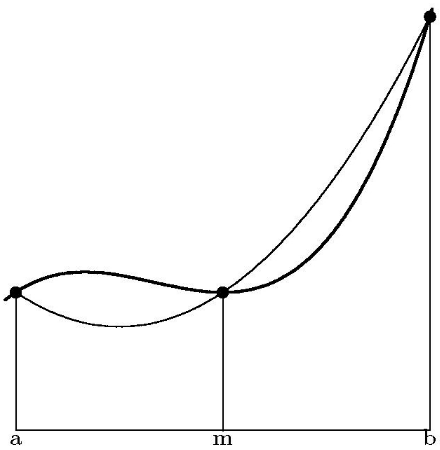
2.1 Afleiding Simpsonregel

In het vorige gedeelte hebben we gezien hoe we een benadering voor de integraal konden vinden met behulp van de twee randpunten (trapeziumregel) of het middenpunt (rechthoekregel). In feite hebben we de grafiek benaderd met een rechte lijn door de randpunten of door het middenpunt.

Het ligt voor de hand om te proberen een betere benadering voor de integraal te krijgen door de grafiek te benaderen met een parabool door de drie punten. Aan de andere kant hebben we gezien dat de fouten van de rechthoekregel en van de trapeziumregel sterk op elkaar lijken: de fout van de rechthoekregel is ongeveer tegengesteld aan de helft van die van de trapeziumregel. Het ligt dan voor de hand om een nieuwe benadering te maken tussen R en T op een derde van R af: T S R

SIMPSONREGEL $S = 2/3\ R + 1/3\ T$

$S = h\ (1/6\ fa + 4/6\ fm + 1/6\ fb)$



Merk op, dat tussen haakjes een soort gewogen funktiewaarde staat. We zullen laten zien dat dit inderdaad de bovengenoemde paraboolbenadering is! Omdat de integratievariabele x kan worden verschoven zonder de integraal te veranderen, nemen we het midden m bij x=0. Dan liggen de randpunten bij -h/2 en +h/2. Een verdere vereenvoudiging volgt als we de schaal met h veranderen, waardoor de integraal met dezelfde faktor h verandert, en de randpunten bij – ½ en ½ komen. De parabool heeft dan de vorm

$p(x) = c + bx + a\ x.x$

waarbij de coefficienten zijn bepaald door de drie punten waar de parabool doorgaat:

$p(0) = c = fm$

$p(-½) = c - b/2 + a/4 = fa$

$p(+½) = c + b/2 + a/4 = fb$

Hieruit lossen we de coefficienten op: $b = fb - fa$

$a = 2(fa - 2fm + fb)$

De paraboolbenadering wordt dan, rekening houdend met de faktor h, in de variabele x:

$p(x) = fm + x(fb-fa)/h + 2.x^2(fa-2fm+fb)/h2$

$= fm + x(Df/Dx) + x^2(D^2f/Dx2)/2!$

Bij het integreren verdwijnt de middelste term met x, zoals alle oneven machten verdwijnen, omdat m precies in het midden ligt. De uitkomst is de Simpsonregel:

$$S = h.fm + 2.2.(h/2)^3(fa-2fm+fb)/3h^2$$

$$S = h(fa + 4fm + fb)/6$$

Wanneer de regel herhaald wordt gebruikt, als te voren bij trapezium en rechthoekregel, krijgen we n intervallen met de breedte h= H/n. Als we alle bijdragen optellen dan vinden we, de punten weer van 0 (a) tot n (b) nummerend:

HERHAALDE SIMPSONREGEL $S_n = h(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+.. +4f_{n-1}+f_n)/6n$

Voorbeeld Benader ln(2) met de Simpsonregel

Oplossing. Als we weer 1/x integreren van 1 naar 2, dan hebben we de drie punten a=1,m=1,5 en b=2. Daarmee wordt h=1 en

SIMPSON S= 1(1/1+4.1/1,5+½)/6= 25/36= 0,694

2.2 Foutschatting

We hebben gezien dat de paraboolbenadering de Simpsonregel geeft. We hopen dat de fout veel kleiner zal zijn dan die bij de trapezium of rechthoekregel, die van de orde van de tweede afgeleide waren. Natuurlijk zullen we geen fout hebben als we de regel toepassen bij funkties die van de eerste of tweede graad zijn. Maar ook als de funktie van de derde graad is, zullen we geen fout maken: de term met x^3 is van de oneven graad, en zal dus in de integraal niet bijdragen. De funkties tot en metde graad drie worden gekenmerkt door $f''''=0$. Om redenen van dimensie verwachten we verder, dat de fout evenredig zal zijn met $h.h^4=h^5$.
Men kan bewijzen dat de fout die wordt gemaakt bij het berekenen van de integraal met de Simpsonregel is:

SIMPSONFOUT $E_S = -(h^5/5!)(f''''/4!)$

Natuurlijk kunnen we ook nu de Simpsonregel herhaald gebruiken wanneer we een te groot integratieinterval hebben. Als er n intervallen zijn, dan wordt de fout

HERH SIMPSONFOUT $E_{Sn} = -(h^5/5!)(f''''/4!)/n^4$

De nauwkeurigheid neemt dus snel toe met het aantal n, en wel met de vierde macht van het aantal intervallen.

Voorbeeld Bepaal ln(2) met de herhaalde Simpsonregel zodat de fout kleiner is dan 5E-4

Oplossing. De fout wordt bepaald door de vierde afgeleide van de funktie 1/x; dat is 4!/x5. Het interval van integratie is lang h=1, van a=1 tot b=2. Bij n intervallen wordt de fout

En=-(1/5!)((4!/x5)/4!)/n4

dus ligt de fout tussen die bij x=1 en 2:

-1/(120n4)<En<-1/(120.32.n4)

Willen we En kleiner dan 5E-4, dan moet 1/(120n4)<5E-4 , dus n^4>1/(120.5E-4), is n > 2.
Bij twee intervallen krijgen we de punten x=1,5/4, 6/4, 7/4 en 2:

S2=1(1/1+4.4/5+2.4/6+4.4/7+½)/6/2=0.69325

vgl ln(2)=0,69314|718. De fout hierin kan worden geschat tussen

-0,0005 < E2 <-0,00002

0,6927 <ln(2)< 0,69323

2.3 Verschil tussen enkele en herhaalde benadering

Om te zien hoe de integraalbenadering verbetert als we meerdere intervallen nemen, bekijken we bij de paraboolbenadering het verschil tussen de waarde bij twee intervallen en bij een interval:

```
            a                m                b

            0       1        2       3        4

  S2 = h(f0   +   4f1   +   2f2    + 4f3   +    f4)/12

  S  = h(f0             +   4f2            +    f4)/6
 ---------------------------------------------------
S2-S =-h(f0   - 4f1   +   6f2    - 4f3   +    f4)/12
```

Merk op, dat de getallen precies gelijk zijn aan die in de driehoek van Pascal: 1 4 6 4 1 is de vierde rij. Daaruit is af te leiden dat we te maken hebben met de vierde differentie van de funktiewaarden, waardoor we hebben:

S2-S = -h.D4f/12

Het is opmerkelijk, dat we opnieuw een differentie van de funktie vinden. Het is een vierde differentie met als verschil van de x waarden Dx=h/4. Nu is er een punt in het interval a..b waar f'''' gelijk is aan het vierde differentiequotient: f''''= D4f/(Dx)4. Net zoals we de fout bij de rechthoek en trapeziumregel konden afschatten met het verschil tussen die benaderingen, kunnen we nu de fout bij de paraboolregel afschatten met het verschil tussen de herhaalde benadering S2 en de enkele benadering S=S1:

SIMPSONFOUT E_{S1} = 16(S2-S1)/15

We kunnen dus ook nu verwachten een betere benadering te krijgen door de paraboolbenadering te korrigeren met de bovenstaande foutschatting:

$$V = S1 + 16(S2-S1)/15 = S2 + (S2-S1)/15$$

Men noemt deze methode de RICHARDSON korrektie. Door deze korrektie op de Simpsonregel blijkt de vierde orde fout te zijn weggewerkt. Dus is de benadering V zonder fout tot aan veeltermen in x van de graad Vier; de fout in V is dan geworden van de graad zes.

Voorbeeld

Bepaal de integraal van f=x5tussen 0 en 1 mbv de Simpsonregel met 1 en 2 intervallen.

Oplossing. Bij een interval is n=1,h=1-0=1 en de punen zijn 0,½ en 1.

$$S= 1.(0+4.(½)5+(1))/6=(1+1/8)/6= 3/16$$

Bij twee intervallen is n=2, en de punten zijn 0, ¼, ½, ¾ en 1.

$$S2= 1(0+4.(¼)5+2(½)5+4(3/4)5+1)/(6.2)=43/256$$

De fout in S is dan 16(43/256-3/16)/15=-1/48 zodat S verbeterd met de Richardson korrektie wordt

$$V=3/16-1/48=1/6$$

welke waarde niet anders is dan de exacte uitkomst!

Tenslotte vergelijken we in tabelvorm het gebruik van de Simpsonregel, zonder en met de Richardsonkorrektie,en de Rechthoekregel voor verschillende aantallen intervallen n aan de hand van de berekening van de berekening van ln(2)=0,6931471806, als in de voorbeelden.

	n=1	n=2	n=4	n=8
R	0,67	0,686	0,691	0,6927
E	0,02	0,007	0,002	0,0005
S	0,694	0,6933	0,69315	0,6931477
E	-0,001	-0,0001	-0,00007	-0,0000005
V		0,69317	0,6931479	0,69314719

Conclusie GEBRUIK DE SIMPSONREGEL MET RICHARDSONKORREKTIE

Vraagstukken zijn te vinden in het boek. Bij de vraagstukken 4,5 en 6 ook de fouten afschatten, en de uitkomsten met de Richardsonmethode corrigeren.

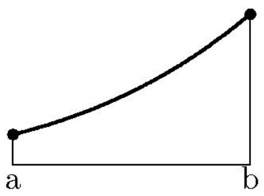
3. NUMERIEKE INTEGRATIE RECURSIEF

Inleiding

In het voorgaande hebben we enkele eenvoudige methoden geleerd om een integraal te benaderen. Die methoden zijn bruikbaar in het geval we de integraal niet analytisch kunnen oplossen; maar ook als we van de integrand slechts een tabel met funktiepunten hebben. Nu zullen we een methodiek leren, die ons systematisch de voorgaande benaderingen geeft. Daardoor is ze bijzonder geschikt voor gebruik met de rekenmachine.

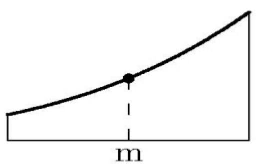
3.1. Middenpunt, randpunten en recursie

Zoals we zagen kunnen we de integraalbenadering,met een van de benaderingsregels, verbeteren door meer intervallen, dus meer punten te nemen. Tot nu toe deden we dat door die intervallen achter elkaar te "herhalen". Maar we kunnen het ook op de volgende manier doen: We starten met een interval a..b., waarop de randpunten a en b zijn. De bijbehorende benaderingsmethode is de eerste graadsinterpolatie met de trapeziumregel



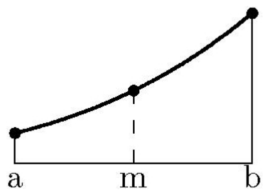
TRAPEZIUM T1=(fa+fb)h/2

We gaan verder met de nuldegraadsinterpolatie door het middenpunt m. De bijbehorende benaderingsmethode is met de rechthoekregel



RECHTHOEK R1= fm.h

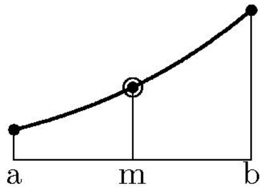
Er zijn nu drie punten in het spel. Het punt m zien we nu op twee manieren. Ten eerste als een derde punt op datzelfde interval. Die drie punten bepalen de tweede-graads interpolatie. De bijbehorende benaderings-methode voor de integraal is de parabool benadering met de simpsonregel



SIMPSON S1=(2R1+T1)/3

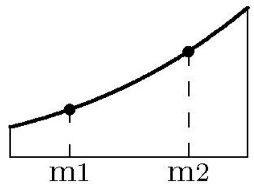
3.2 Halveringsmethode

De tweede manier, waarop we m bezien is, is als het randpunt van twee intervallen die slechts de halve breedte hebben. Dus kunnen we de herhaal methode toepassen. Wat betreft de trapeziumregel zien we dat er geen enkel nieuw punt is gekomen. We kunnen dus de herhaalde trapeziumregel uitdrukken in T (randpunten) en R (midden).



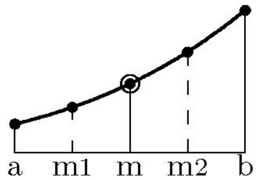
Omdat T2=(fa+2fm+fb)h/4=(fa+fb)h/4+fmh/2, vinden we

HERHAALD TRAPEZIUM   T2=(T+R)/2



Wat betreft de rechthoekregel zien we dat we daar wel nieuwe punten krijgen. Maar al die nieuwe punten samen vormen precies de bijdrage tot de herhaalde rechthoek-regel

HERHAALDE RECHTHOEK   R2=(fm0+fm1)h/2



Wie goed heeft opgelet, weet nu dat we de herhaalde Simpsonregel zo kunnen opschrijven. Immers voor beide intervallen geldt de bovengenoemde regel, waarin S wordt berekend uit de T en R van hetzelfde interval. Dan geldt hetzelfde ook voor de som van de twee intervallen

HERHAALDE SIMPSON   S2=(T2+2R2)/3

De systematiek wordt nu duidelijk. Nadat we eerst voor het eerste interval n=1 met lengte h=b-a de integraal-benaderingen voor de trapeziumregel T1 en de recht-hoekregel R1 hebben bepaald, volgt daaruit de Simpson-benadering S1. Verdergaande met twee intervallen n=2, met lengte h/2,wordt eerst nog, met de nog bekende waarden van T1 en R1, T2 berekend, waarna aan de hand van de funktiewaarden in de twee middens de rechthoek-benadering R2 wordt berekend.
Maar dan kan de herhaalde Simpsonbenadering S2 weer volgen uit T2 en R2. En dit kan verder zo doorgaan!
Schematisch ziet de berekening er dan zo uit:

```
T1,R1 > S1
      > T2|R2 > S2
              > T4|R4 > S4    enzovoort
```

Merk op, dat we heel efficient omgaan met de funktie-waarden die in de benadering worden gebruikt. Iedere keer worden alle nieuwe funktiewaarden (de middens van de na de halvering van de oude intervallen ontstane nieuwe intervallen) tezamen opgenomen in de nieuwe rechthoekbenadering R. Dus hebben we de funktie-berekeningen alleen nodig voor de bepaling van T1 (de randpunten a en b) en de Rn (de middenpunten).

Vraagstukken

1 Van een functie zijn de volgende (tabel)punten bekend

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	0	0	6	24	60	120

a bereken de integraal van de functie van 0 tot 4 met de trapeziumregel en 4 intervallen
b schat de daarbij gemaakte fout af van ieder interval apart met behulp van tweede afgeleiden, te bepalen uit een differentietabel
c als a, maar nu met de Simpsonregel voor 1 en 2 intervallen
d schat de daarbij gemaakte fout af met de Richardsoncorrectie
e geef de beste schatting voor de integraal
f vergelijk c,d,e met a,b

2 Bereken de integraal van x-x*ln(x) over het interval (1,e) in een aantal stappen

a bereken voor enkel interval de waarden van T1 en R1
b bereken daaruit recursief de waarden van S1 en T2
c bereken voor twee intervallen met intervalhalvering de waarde van R2
d bereken uit R2 en T2 de waarden van S2 als afschatting van de integraal met twee intervallen
e bereken de afschatting van de fout E2 uit de Richardsoncorrectie (S2-S1)/15
f bereken met partiëel integreren de exacte waarde van de integraal en vergelijk de werkelijke fout met de geschatte fout

3.3. Programma numerieke integratie

```
PROGRAM  inteGratiehalveren(f(x);a,b,dI;Tn,Rn,Sn);

{bepaalt de integraal van de funktie f van x tussen
 de randpunten a en b, met de nauwkeurigheid dI in de
 simpsonbenadering S, met n intervallen door halvering
 verkregen, de herhaalde trapeziumbenadering Tn,
 de herhaalde rechthoekbenadering Rn en
 de herhaalde simpsonbenadering Sn}

VAR  a  : linkergrens van integratieinterval;
     fa : funktiewaarde in a;
     b  : rechtergrens;
     fb : funktiewaarde in b;
     m  : middenpunt van het linker interval;{m=a+h/
     fm : funktiewaarde in m;
     n  : aantal intervallen;
     i  : index van de intervallen;     {i=0..n-1}
     h  : breedte van het interval;     {h=(b-a)/n}
     R  : rechthoekbenadering voor n intervallen;
     T  : trapeziumbenadering voor n intervallen;
     S  : simpsonbenadering voor n intervallen;
     SO : oude simpsonbenadering;
     dI : nauwkeurigheid in simpsonbenadering;
     E  : foutschatting;

FUNCTION    f:=f(x);                          {a<x<b}

BEGIN{integratiehalveren}
  read(a); fa:=f(a);                     {linkergrens}
  read(b); fb:=f(b);                    {rechtergrens}
  read(dI);                           {nauwkeurigheid}

  n:=1; write(n);                    {eerste interval}
  h:=b-a; m:=a+h/2; SO:=0;
  T:=(fa+fb)*h/2; write(T);
  fm:=f(m);
  R:=fm*h; write(R);
  S:=(T+2*R)/3; write(S);

  WHILE NOT abs(3*E) <dI DO     {3*E is geschatte
                                     maxfout in S}
  BEGIN
    n:=n*2; write(n);      {gehalveerde interval}
    h:=h/2; m:=a+h/2; SO:=S;
    T:=(T+R)/2; write(T);
    fm:=0; FOR i:=0 TO n-1 DO fm:=fm+f(m+i*h);
    R:=fm*h; write(R);
    S:=(T+2*R)/3; write(S);
    E:=(S-SO)/15;
   END;
   write(E);         {laatste geschatte fout op S}
   write(S + E)         {richardsonkorrektie op S}
END. {integratiehalveren}
```

Vraagstukken

3 Bereken de integraal van x-x*ln(x) over het interval (1,e) in een aantal stappen

a met recursie en intervalhalvering. Noteer voor alle intervallen n=1, 2, 4,.. de waarde van de Simpsonregel S en ga door tot 6 decimalen nauwkeurig (dI= 5E-7)

b schat de fout bij de laatste integraalbenadering

c geef de beste benadering van de integraal

d* bereken met partiëel integreren de exacte waarde van de integraal (gelijk aan 2f), bepaal de gevonden fout en vergelijk die met de geschatte fout

Antwoorden 1a I= 60, b -5<= E <= -3, c I= 56

2a T1= 0,8591 R1= 1,2136, b S1= 1,0911 T2= 1,0361,

c R2= 1,1275, d S2= 1,0971 e E2= 0,00022 f I=(e^2-3)/4

3a S1= 1,091... S2= 1,0971.. S4= 1,0972.. S8= 1,097264

b E8= 0,000000.., c S= 1,097264..

C.M.Fortuin, fortuinc@xs4all.nl