C.M.Fortuin, 14-11-2018

Matrix van matrices omkeren

We stellen ons voor dat we een matrix M met dimensie $m+n$ van het type

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

moeten omkeren. Daarin is A een mxm matrix, D een nxn matrix, B een nxm matrix en C een mxn matrix. We zullen laten zien dat de oplossing is

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X_A & -A^{-1}BX_D \\ -D^{-1}CX_A & X_D \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} X_A = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ X_D = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{matrix}$$

Immers, bij de vermenigvuldiging van links met M zien we direct dat:

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_A & -A^{-1}BX_D \\ -D^{-1}CX_A & X_D \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} AX_A - BD^{-1}CX_A & -BX_D + BX_D \\ CX_A - CX_A & -CA^{-1}BX_D + DX_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Uit de symmetrie tussen rijen en kolommen volgt dat de oplossing ook kan worden geschreven:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X_A & -X_ABD^{-1} \\ -X_DCA^{-1} & X_D \end{pmatrix}$$

Daaruit concluderen we dat kennelijk

$$A^{-1}BX_D = X_ABD^{-1} \quad \text{en} \quad D^{-1}CX_A = X_DCA^{-1},$$

hetwelk natuurlijk ook rechtstreeks zou kunnen worden geverifieerd door invullen van de X_A en X_D en uitwerken. Uit de rij/kolom symmetrie volgt ook dat $M^{-1}M = 1$.

Voorbeeld: als $m = n = 1$ zijn alle matrices getallen, is de inverse gelijk aan de omgekeerde 1/, en doet de volgorde er niet meer toe. We vereenvoudigen dan tot

$$\begin{matrix} X_A = 1/(A - BC/D) = D/(AD - BC) \\ X_D = 1/(D - CB/A) = A/(AD - BC) \end{matrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} /(AD - BC)$$